

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ СМЕСЕЙ

Я. З. Клейман

Рассматриваются волны сжатия и разрежения в многокомпонентной среде в акустическом приближении. Показано, что за фронтом волны может происходить разделение компонент вследствие различия их скоростей. Выясняются особенности волновых движений смесей по сравнению с аналогичными движениями однокомпонентной среды. В частности, устанавливается возможность возникновения в смеси (в определенных случаях) совокупности волн, распространяющихся друг за другом, число которых равно числу компонент. Первые волны аналогичны волнам (сжатия и разрежения) в однокомпонентной среде; последующие же характерны для смесей, и при стремлении к нулю содержаний всех компонент, кроме одной (т. е. при переходе к однокомпонентной среде), эти волны исчезают.

Ограничимся случаями распространения плоских, цилиндрических и сферических волн. Тогда для изучения движений многокомпонентной среды (пренебрегая действием массовых сил и трением между компонентами *) имеем следующую систему уравнений, вытекающих из уравнений, приведенных в работе [1]:

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{1}{\rho_n^0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + v_n \frac{\partial \rho_n}{\partial x} + \rho_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{s}{x} \rho_n v_n = 0, \quad (n = 1, \dots, N), \quad (1)$$

$$p = F_n(\rho_n^0, p_n^0, \rho_{nn}^0), \quad \sum_{n=1}^N \frac{\rho_n}{\rho_n^0} = 1,$$

где p — давление, v_n , ρ_n^0 , ρ_n — скорость, истинная и приведенная плотности n -й компоненты, p_n^0 , ρ_{nn}^0 — некоторые начальные значения давления и истинной плотности. Для плоских волн $s = 0$, для цилиндрических и сферических волн $s = 1$ и $s = 2$. В последних двух случаях под x следует понимать величину радиуса-вектора соответственно в цилиндрической и сферической системах координат.

Если s/x заменить функцией $\frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx}$, то уравнения (1) справедливы для случая приближенной постановки задачи о нестационарном движении смеси в трубе переменного сечения. Тогда $f(x)$ — площадь сечения трубы, причем производная $df(x)/dx$ должна быть настолько мала, чтобы составляющими скорости по осям y и z можно было пренебречь.

Для случая волн малой интенсивности уравнения (1) можно линеаризовать. Представим параметры смеси в виде

$$p = p_0 + p', \quad \rho_n^0 = \rho_{0n}^0 + \rho_n^{\prime 0}, \quad \rho_n = \rho_{0n} + \rho_n',$$

$$v_n = v_{0n} + v_n', \quad (n = 1, \dots, N), \quad (2)$$

* Поскольку цель работы — установление некоторых принципиальных отличий между движениями смесей и однокомпонентных сред, то для получения результатов, удобных для сравнения и анализа, не учитывается трение между компонентами. Учет трения не влияет на выводы, сформулированные в конце статьи (усложняя лишь математическую сторону вопроса) и является предметом специального рассмотрения.

где $\rho_0, \rho_{0n}^0, \rho_{0n}, v_{0n}$ — значения параметров невозмущенной среды, а $p', \rho_n', \rho_n, v_n'$ — являются весьма малыми величинами. Подставляя в уравнения (1) выражения (2) и считая, что в невозмущенном состоянии среда неподвижна ($v_{0n} = 0; n = 1, \dots, N$), получим в результате линеаризации следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial v_n'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_{0n}^0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_n'}{\partial t} + \rho_{0n} \frac{\partial v_n'}{\partial x} + \frac{s}{x} \rho_{0n} v_n' = 0, \quad (n = 1, \dots, N), \quad (4)$$

$$p' = a_{0n}^2 \rho_n^{01}, \quad (a_{0n}^2 = F_n'(\rho_{0n}^0, p_H, \rho_{Hn}^0)), \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\rho_{0n}^0} \left(\rho_n' - \frac{\rho_{0n}}{\rho_{0n}^0} \rho_n^{01} \right) = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (6) при помощи (5) получим

$$\sum_{n=1}^N \frac{\rho_n'}{\rho_{0n}^0} = \xi_0 p', \quad \left(\xi_0 = \sum_{n=1}^N \frac{\rho_{0n}}{\rho_{0n}^0 a_{0n}^2} \right). \quad (7)$$

Поделим члены каждого уравнения (4) на ρ_{0n}^0 и сложим все N уравнений. Тогда, в силу (7), имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \sum_{n=1}^N \frac{\rho_{0n} v_n'}{\rho_{0n}^0} + \xi_0 \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{s}{x} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^N \frac{\rho_{0n} v_n'}{\rho_{0n}^0} = 0. \quad (8)$$

Умножим члены уравнений (3) на ρ_{0n}/ρ_{0n}^0 и сложим все уравнения. Тогда получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^N \frac{\rho_{0n} v_n'}{\rho_{0n}^0} + \sigma_0 \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad \left(\sigma_0 = \sum_{n=1}^N \frac{\rho_{0n}}{\rho_{0n}^0} \right),$$

в силу которого (8) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a_*^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - a_*^2 \frac{s}{x} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

где

$$a_*^2 = \sigma_0 / \xi_0. \quad (10)$$

Величина a_* является скоростью распространения слабого разрыва в неподвижной смеси, причем выражение (10), как следует из работы [2], справедливо также в общем случае пространственных волн слабого разрыва любой интенсивности. Таким образом, уравнение (9) аналогично соответствующему уравнению для однокомпонентной среды и переходит в последнее, если содержание $N-1$ компонент стремится к нулю.

В случае плоских волн ($s=0$) уравнение (9) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a_*^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0, \quad (11)$$

откуда получаем

$$p' = f_1(x + a_* t) + f_2(x - a_* t). \quad (12)$$

Для волны, распространяющейся в одном направлении (например, вправо) по ранее неподвижной смеси, имеем в силу условия на фронте ($p' = 0$ при $x = a_* t$)

$$p' = f_2(x - a_* t) - f_2(0). \quad (13)$$

Тогда из уравнений (3) и (4) (при $s = 0$) получим следующую связь между акустическими давлением, скоростями и приведенными плотностями компонент:

$$p' = \rho_{0n}^0 a_* v'_n, \quad \rho'_n = \frac{\rho_{0n}}{\rho_{0n}^0 a_*^2} p', \quad (n = 1, \dots, N). \quad (14)$$

Отсюда

$$\frac{v'_n}{v'_j} = \frac{\rho_{0j}^0}{\rho_{0n}^0}, \quad \frac{\rho'_n}{\rho'_j} = \frac{\rho_{0n} \rho_{0j}^0}{\rho_{0j} \rho_{0n}^0}, \quad (n, j = 1, \dots, N),$$

т. е. скорости различных компонент в рассматриваемом случае обратно пропорциональны начальным значениям истинных плотностей, а приращения приведенных плотностей прямо пропорциональны начальным объемным содержаниям компонент (ρ_{0n}/ρ_{0n}^0).

Пусть в начальный момент ($t = 0$) на плоской границе раздела двух многокомпонентных сред ($x = 0$) возникает избыточное давление, являющееся функцией времени $p'_* = \Phi(t)$. Поскольку при возникающем движении среды скорости компонент различны, то в результате взаимного проникания компонент, находившихся в начальный момент по разные стороны от границы раздела, в дальнейшем образуется несколько перемещающихся границ раздела. В каждой из областей движения (между двумя соседними границами) справедливо уравнение (11) и его решение (12), но значения a_* для этих областей различны. При решении задач используются условия непрерывности соответствующих параметров на границах раздела.

Однако для практических целей задачи можно упрощать. Рассмотрим сначала частный случай двухкомпонентной среды, когда в начальный момент по одну сторону от границы раздела находится смесь 1-й и 2-й компонент, а по другую — только 2-я компонента*. Тогда в течение всего времени движения существует одна граница раздела, на которой задана функция $\Phi(t)$. Скорость перемещения границы равна скорости v'_{*1} находящихся на ней частиц 1-й компоненты. Координата границы раздела $x_1 = x_1(t)$ ввиду первого соотношения (14) равна

$$x_1(t) = \int_0^t v'_{*1}(t) dt = \frac{1}{\rho_{01}^0 a_*} \int_0^t \Phi(t) dt. \quad (15)$$

В силу граничного условия

$$p' = \Phi(t) \quad \text{при } x = x_1(t) \quad (16)$$

выражение (13) дает $f_2(z) = \Phi[F(z)] + f_2(0)$,

где $z = x_1(t) - a_* t$, (17)

а $F(z)$ — функция, получающаяся при решении уравнения (17) относительно t . Тогда из (13) получим

$$p' = \Phi[F(x - a_* t)], \quad (18)$$

* Например, песчаное дно водоема: по одну сторону — вода, по другую — водонасыщенный песок. Заметим, что исходные уравнения применимы не ко всяким водонасыщенным грунтам, поскольку в некоторых из них, особенно содержащих газ (воздух), существенную роль играют силы, препятствующие относительному движению компонент. В таких средах могут возникать эффекты, которые не исследуются в рамках данной статьи (сверхмалые скорости волн и так далее); они являются предметом специального рассмотрения.

в силу чего из выражений (14) имеем

$$v'_n = \frac{1}{\rho_{0n}^0 a_*} \Phi [F(x - a_* t)], \quad \rho'_n = \frac{\rho_{0n}}{\rho_{0n}^0 a_*^2} \Phi [F(x - a_* t)], \quad (n = 1, 2). \quad (19)$$

Вместо полученных выражений можно для практических целей пользоваться более простыми формулами. Поскольку в линеаризированной задаче $v'_{*1} \ll a_*$, то величиной $x_1(t)$ в уравнении (17) можно пренебречь. Иначе говоря, пользуясь близостью линии $x = x_1(t)$ к оси t в плоскости $x - t$, мы сносим граничное условие, заданное на этой линии, на ось t . Тогда $F(z) = -z/a_*$ и вместо (18), (19), получим

$$\begin{aligned} p' &= \Phi(t - x/a_*), & v'_n &= \frac{1}{\rho_{0n}^0 a_*} \Phi\left(t - \frac{x}{a_*}\right), \\ \rho'_n &= \frac{\rho_{0n}}{\rho_{0n}^0 a_*^2} \Phi\left(t - \frac{x}{a_*}\right), & & (n = 1, 2). \end{aligned} \quad (20)$$

В общем случае многокомпонентных сред, ввиду соотношений $v'_n \ll \ll a_*$ ($n = 1, \dots, N$), все границы раздела, возникающие в процессе движения, находятся в весьма узкой области по сравнению с пространством, занятым в данный момент движущейся средой. Не интересуясь изменением по оси x параметров среды между крайними границами раздела, будем считать давление в этой узкой области в данный момент одинаковым и равным p' . Тогда для остальной среды снова имеют место формулы (18), (19) (где $n = 1, \dots, N$), которые, однако, в данном случае являются приближенными. Функция $F(z)$ по-прежнему определяется при помощи уравнения (17), где $x_1(t)$ — закон движения крайней (правой) границы раздела, определяемый по формуле (15)*. Если граничное условие снести на ось t , то получим приближенные формулы (20), где $n = 1, \dots, N$.

Пусть $\Phi(t)$ — непрерывная возрастающая или убывающая функция и τ — произвольный промежуток времени от начального момента.

Тогда, переходя во всех полученных соотношениях к пределу при $\tau \rightarrow 0$ получим решение задачи о движении ранее неподвижной смеси при распространении в ней скачка давления или разрежения. Скорость перемещения скачка равна a_* , а параметры среды на нем удовлетворяют соотношениям (14). Заметим, что такой скачок давления, возникающий в результате особых граничных условий, в отличие от случая однокомпонентной среды не является линеаризированной ударной волной. Линеаризация соотношений на ударной волне, перемещающейся в смеси, приводит к следующим выражениям (см. [3]):

$$p' = \frac{\rho_{0n}^0 a_{0n}^2 [(D - v_{0n})^2 - \lambda_{0n}^2]}{(D - v_{0n})(a_{0n}^2 - \lambda_{0n}^2)} v'_n, \quad \left(\lambda_{0n}^2 = \frac{p_0}{\rho_{0n}^0} \right), \quad (21)$$

$$\rho_n^{01} = \frac{1}{a_{0n}^2} p', \quad \rho'_n = \frac{\rho_{0n} (a_{0n}^2 - \lambda_{0n}^2)}{\rho_{0n}^0 a_{0n}^2 [(D - v_{0n})^2 - \lambda_{0n}^2]} p', \quad (n = 1, \dots, N), \quad (22)$$

где D — скорость перемещения ударной волны, определяемая из уравнения

$$\sum_{n=1}^N \frac{\rho_{0n}}{\rho_{0n}^0 a_{0n}^2} \left[\frac{a_{0n}^2 - \lambda_{0n}^2}{(D - v_{0n})^2 - \lambda_{0n}^2} - 1 \right] = 0; \quad (23)$$

* В качестве ρ_{01}^0 берется плотность той компоненты, скорость которой совпадает со скоростью правой границы раздела.

из всех значений D , получающихся при решении этого уравнения, следует брать ту величину, которая в пределе при переходе к однокомпонентной среде дает значение скорости звука в этой среде.

Выражения (21), (22) отличаются от выражений (14), но во многих случаях, представляющих практический интерес, весьма близки к ним. В тех случаях, когда величинами λ_{0n}^2 можно пренебречь по сравнению с a_{0n}^2 и $(D - v_{0n})^2$ (подробнее об этом см. ниже), вместо (21) и (22) имеем

$$p' = \rho_{0n}^0 (D - v_{0n}) v'_n, \quad \rho'_n = \frac{\rho_{0n}}{\rho_{0n}^0 (D - v_{0n})^2} p', \quad (n = 1, \dots, N).$$

При этом (23) превращается в уравнение, полученное в работе [2], для определения скорости перемещения поверхности слабого разрыва. Тогда, если $v_{0n} = v_0$ ($n = 1, \dots, N$), то $D - v_0 = a_*$ и, следовательно, последние выражения для p' и ρ'_n совпадают с зависимостями (14).

Рассмотрим теперь задачу о движении смеси за поршнем, перемещающимся в безграничной трубе ускоренно или с постоянной скоростью. Пусть в смеси N компонент с различными плотностями

$$\rho_{01}^0 > \rho_{02}^0 > \dots > \rho_{0N}^0,$$

в момент $t = 0$, соответствующий состоянию покоя, поршень начинает двигаться влево с ускорением из начала координат. Скорость поршня обозначим через $v_* = \varphi(t)$. Частицы смеси, прилегавшие в начальный момент к поршню, стремятся ввиду инерции отстать от него. Поскольку этого не может произойти, так как нарушилась бы сплошность среды, то от поршня будут отставать только частицы более плотных компонент, а частицы наименее плотной N -й компоненты, прилегавшие к поршню, будут двигаться вместе с ним. При этом вправо пойдет волна разрежения со скоростью a_* . Так как скорости всех компонент различны, $|v'_1| < |v'_2| < \dots < |v'_N|$, ($v'_N = v_*$), то за поршнем образуются $N - 1$ границ раздела (см. фигуру). За первой (крайней правой) границей раздела смесь не содержит 1-й компоненты, за второй границей — 2-й компоненты и так далее; область, примыкающая к поршню, содержит только N -ю компоненту.

Аналогично предыдущему в весьма узкой области между первой границей раздела и поршнем будем пренебрегать изменением параметров по оси x . Тогда скорость N -й компоненты на первой границе считаем равной скорости поршня v_* и, обозначая приращение давления на первой границе через $p'_* = \Phi(t)$, получим в силу первого уравнения (14)

$$p'_* = \rho_{0N}^0 a_* \varphi(t). \quad (24)$$

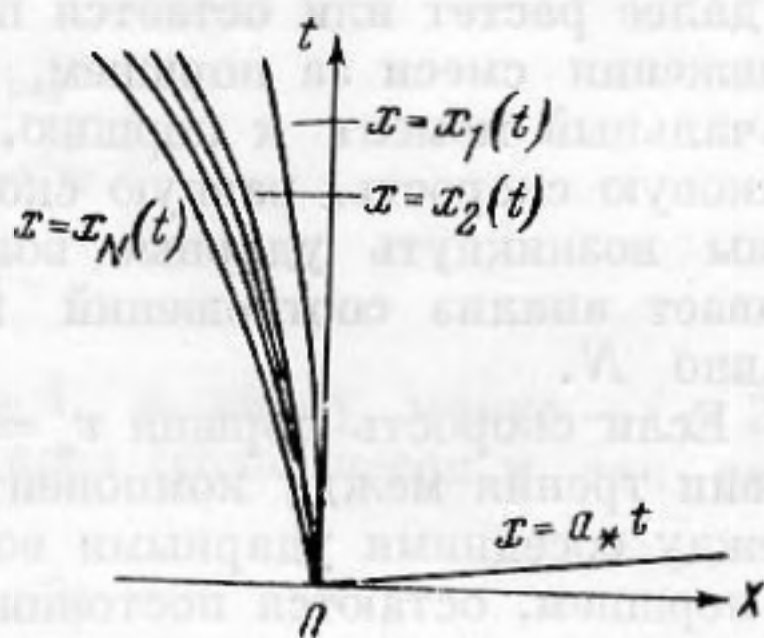
Законы движения границ раздела определяются по приближенным формулам

$$x_n(t) = \frac{\rho_{0N}^0}{\rho_{0n}^0} \int_0^t \varphi(t) dt, \quad (n = 1, \dots, N). \quad (25)$$

Для всей области движения правее первой границы приближенно справедливы формулы (18), (19), из которых в силу (24) имеем

$$p' = \rho_{0N}^0 a_* \varphi [F(x - a_* t)], \quad (26)$$

$$v'_n = \frac{\rho_{0N}^0}{\rho_{0n}^0} \varphi [F(x - a_* t)], \quad \rho'_n = \frac{\rho_{0N}^0 \rho_{0n}}{\rho_{0n}^0 a_*} \varphi [F(x - a_* t)] \quad (n = 1, \dots, N).$$



Здесь функция $F(z)$ является решением уравнения (17), где $x_1(t)$ определяется из (25). Снося граничное условие на ось t , получим (см. (20))

$$p' = \rho_{0N}^0 a_* \varphi(t - x/a_*), \quad (27)$$

$$v'_n = \frac{\rho_{0N}^0}{\rho_{0n}^0} \varphi\left(t - \frac{x}{a_*}\right), \quad \rho'_n = \frac{\rho_{0N}^0 \rho_{0n}}{\rho_{0n}^0 a_*} \varphi\left(t - \frac{x}{a_*}\right),$$

$$(n = 1, \dots, N).$$

Рассмотрим теперь ту же смесь, движущуюся перед поршнем, скорость которого скачком увеличивается от начального значения до величины v_* и далее растет или остается постоянной. В этом случае, в отличие от движения смеси за поршнем, частицы всех N компонент, прилежавшие в начальный момент к поршню, движутся вместе с ним, т. е. имеют одинаковую скорость, равную скорости поршня. Тогда перед поршнем должны возникнуть ударные волны, причем количество волн, как показывает анализ соотношений на ударной волне [3], в общем случае равно N .

Если скорость поршня $v_* = \text{const}$, то, ввиду предположения об отсутствии трения между компонентами, параметры среды в каждой области между соседними ударными волнами, а также между последней волной и поршнем, остаются постоянными в течение всего времени движения. Определим для данного случая параметры смеси во всех этих областях. Для этого найдем приращения параметров v'_{ni} , p'_i , ρ_{ni}^{01} , ρ'_{ni} , ($n, i = 1, \dots, N$) на каждой ударной волне. Индекс i обозначает номер ударной волны, возрастание которого соответствует убыванию скорости волны D_i ($D_1 > D_2 > \dots > D_N$). Значения D_i определяются из уравнения (23)*.

Для каждой компоненты имеем очевидное равенство

$$v_* - v_{0n} = \sum_{n=1}^N v'_{ni}, \quad (n = 1, \dots, N). \quad (28)$$

Поделим почленно для i -й волны каждое n -е уравнение (21) на j -е уравнение. Тогда получим

$$v'_{ni} = c_{ni} v'_{ji}, \quad (29)$$

где

$$c_{ni} = \frac{\rho_{0j}^0 a_{0j}^2 (a_{0n}^2 - \lambda_{0n}^2) (D_i - v_{0n}) [(D_i - v_{0j})^2 - \lambda_{0j}^2]}{\rho_{0n}^0 a_{0n}^2 (a_{0j}^2 - \lambda_{0j}^2) (D_i - v_{0j}) [(D_i - v_{0n})^2 - \lambda_{0n}^2]} \quad (30)$$

Из (28) в силу (29) получаем систему N линейных уравнений относительно величин v'_{ji} , откуда определяем приращения скорости j -й компоненты на каждой ударной волне

$$v'_{ji} = \Delta_i / \Delta \quad (i = 1, \dots, N),$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2i} & \dots & c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{Ni} & \dots & c_{NN} \end{vmatrix}, \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & v_* - v_{01} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & v_* - v_{02} & \dots & c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & v_* - v_{0N} & \dots & c_{NN} \end{vmatrix}.$$

* Очевидно, что в случае линейной постановки задачи в уравнении (23) так же, как и в соотношениях (21), (22), под параметрами с индексом 0 следует понимать параметры перед первой волной (невозмущенной среды), а не перед данной i -й волной.

Приращения скоростей остальных компонент определяются по формулам (29), после чего из соотношений (21), (22) можно определить остальные параметры смеси.

Если $v_* = 0$, то имеем решение задачи о гидравлическом ударе смеси о неподвижную стенку.

В случае смеси, состоящей из двух компонент, скорости которых в невозмущенном состоянии одинаковы ($v_{01} = v_{02} = v_0$), имеем

$$(D_i - v_0)^2 = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4E\xi_0}}{2\xi_0}, \quad (31)$$

где

$$\xi_0 = \frac{\rho_{01}}{\rho_{01}^2 a_{01}^2} + \frac{\rho_{02}}{\rho_{02}^2 a_{02}^2}, \quad E = \frac{p_0}{\rho_{01}^0 \rho_{02}^0},$$

$$L = \sigma_0 + E \left(\frac{\rho_{01}}{\rho_{01}^0 a_{01}^2} + \frac{\rho_{02}}{\rho_{02}^0 a_{02}^2} \right)$$

$$\left(\sigma_0 = \frac{\rho_{01}}{\rho_{01}^0} + \frac{\rho_{02}}{\rho_{02}^0} \right).$$

Знаку плюс перед корнем соответствует $i = 1$, а знаку минус — $i = 2$.

Во многих случаях для малосжимаемых сред (вода, песок и так далее) величины

$$\lambda_{0n}^2 = p_0 / \rho_{0n} \quad (n = 1, 2)$$

являются весьма малыми по сравнению с величинами

$$a_{0n}^2 = (dp/d\rho_n^0)_{p=p_0}.$$

Тогда имеет место неравенство $E\xi_0 \ll L^2$, причем можно считать, что $L = \sigma_0$. Разлагая корень в выражении (31) в ряд по степеням величины $E\xi_0$ и ограничиваясь членами не выше первой степени, имеем

$$(D_1 - v_0)^2 = \frac{\sigma_0}{\xi_0} = a_*^2$$

$$(D_2 - v_0)^2 = \frac{p_0}{\rho_{01}^0 \rho_{02}^0 \sigma_0}. \quad (32)$$

При помощи выражения (31) нетрудно проверить, что величина $(D_1 - v_0)^2$ заключена между значениями a_{01}^2 и a_{02}^2 , а величина $(D_2 - v_0)^2$ — между значениями λ_{01}^2 и λ_{02}^2 . Отсюда следует, что если величины λ_{01}^2 и λ_{02}^2 весьма малы по сравнению с a_{01}^2 и a_{02}^2 , то они весьма малы также по сравнению с $(D_1 - v_0)^2$, и, кроме того, $(D_1 - v_0)^2 \gg (D_2 - v_0)^2$. Пренебрегая малыми величинами в выражениях (30), (21) и (22) и принимая во внимание второе из выражений (32), получим в рассматриваемом случае

$$v'_{11} = (v_* - v_0) \frac{1}{\rho_{01}^0 \sigma_0}, \quad v'_{12} = -(v_* - v_0) \frac{(\rho_{02}^0 - \rho_{01}^0) \rho_{02}}{\rho_{01}^0 \rho_{02}^0 \sigma_0},$$

$$v'_{21} = (v_* - v_0) \frac{1}{\rho_{02}^0 \sigma_0}, \quad v'_{22} = (v_* - v_0) \frac{(\rho_{02}^0 - \rho_{01}^0) \rho_{01}}{\rho_{01}^0 \rho_{02}^0 \sigma_0}, \quad (33)$$

$$p'_1 = (v_* - v_0) \frac{D_1 - v_0}{\sigma_0}, \quad p'_2 = (v_* - v_0) \frac{\rho_{01} \rho_{02} (\rho_{02}^0 - \rho_{01}^0)^2 (D_2 - v_0)}{\rho_{01}^0 \rho_{02}^0 \sigma_0},$$

$$p'_{11} = (v_* - v_0) \frac{\rho_{01}}{\rho_{01}^0 \sigma_0 (D_1 - v_0)}, \quad p'_{12} = -(v_* - v_0) \frac{\rho_{01} \rho_{02} (\rho_{02}^0 - \rho_{01}^0)}{\rho_{01}^0 \rho_{02}^0 \sigma_0 (D_2 - v_0)},$$

$$p'_{21} = (v_* - v_0) \frac{\rho_{02}}{\rho_{02}^0 \sigma_0 (D_1 - v_0)}, \quad p'_{22} = (v_* - v_0) \frac{\rho_{01} \rho_{02} (\rho_{02}^0 - \rho_{01}^0)}{\rho_{01}^0 \rho_{02}^0 \sigma_0 (D_2 - v_0)}.$$

Формулы (33) выражают следующую картину движения. На первой ударной волне увеличиваются все параметры смеси, причем приращения скоростей компонент обратно пропорциональны их истинным плотностям, а приращения приведенных плотностей прямо пропорциональны их объемным содержаниям. Нетрудно показать, что за первой волной скорость менее плотной компоненты превышает скорость поршня v_* , а скорость более плотной компоненты меньше v_* . На второй ударной волне происходит дальнейшее увеличение давления и, следовательно, истинных плотностей обеих компонент, а также скорости и приведенной плотности более плотной компоненты. Скорость и приведенная плотность менее плотной компоненты уменьшаются, причем изменения (по абсолютной величине) скоростей компонент обратно пропорциональны их объемным содержаниям, а изменения приведенных плотностей прямо пропорциональны истинным плотностям. При этом скорости обеих компонент становятся равными v_* .

В силу неравенства $D_1 - v_0 \gg D_2 - v_0$, имеем $p'_1 \gg p'_2$, т. е. увеличение давления на второй волне незначительно по сравнению с увеличением его на первой волне. Этим, по-видимому, объясняется отчасти то обстоятельство, что существование в двухкомпонентных смесях второй волны еще не было обнаружено экспериментально*. Изменения скоростей и приведенных плотностей на второй волне могут быть значительными.

Из выражений (33) видно, в частности, как влияет на параметры изменение состава смеси. При переходе к однокомпонентной среде, т. е. при стремлении одной из величин ρ_{01}/ρ_{01}^0 , ρ_{02}/ρ_{02}^0 к нулю, а второй — к единице, имеем

$$\sigma_0 \rightarrow 1/\rho_{0n}^0, \quad D_1 - v_0 \rightarrow a_{0n},$$

где ρ_{0n}^0 , a_{0n} ($n = 1, 2$) — плотность и скорость звука в рассматриваемой однокомпонентной (n -й) среде.

Тогда приращения параметров n -й компоненты на второй волне стремятся к нулю (т. е. вторая волна исчезает), а соотношения на первой волне переходят в известные соотношения на слабом (линеаризованном) скачке, распространяющемся в однокомпонентной среде. При этом $\rho'_{n1} \rightarrow \rho_{n1}^0$.

Сравнивая рассмотренные случаи движения, можно сделать следующие выводы. Первая ударная волна и волна разрежения в задаче о поршне, а также волны давления и разрежения в задаче о распространении возмущений от границы раздела различных сред являются волнами той же природы, что и волны (сильного и слабого разрывов), распространяющиеся в однокомпонентных сжимаемых средах. При переходе к однокомпонентной среде скорости всех этих волн (как слабого разрыва, так и линеаризованных ударных волн) стремятся к скорости звука в данной однокомпонентной среде.

При переходе к несжимаемым смесям значения скоростей этих волн стремятся к бесконечности.

Возникновение волн такого типа, как вторая ударная волна в задаче о поршне, специфично для смесей. При переходе к однокомпонентной среде интенсивность этой волны стремится к нулю. Как видно из рассмотренных примеров, такие волны в одних случаях могут возникать, а в других не реализуются.

* Решение аналогичной задачи о поршне для случая ударных волн большой интенсивности (нелинеаризованных) показывает, что неравенство $p'_1 \gg p'_2$ по-прежнему имеет место.

При переходе к несжимаемым смесям значения скоростей таких волн стремятся к конечным величинам, определяемым из уравнения (23), в котором $a_{0n} \rightarrow \infty$ ($n = 1, \dots, N$). Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^N \frac{\rho_{0n}}{\rho_{0n}^{02} [(D - v_{0n})^2 - \lambda_{0n}^2]} = 0.$$

Для двухкомпонентной среды отсюда получаем

$$D = \frac{1}{\sigma_0} \left(v_{01} \frac{\rho_{02}}{\rho_{02}^{02}} + v_{02} \frac{\rho_{01}}{\rho_{01}^{02}} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} \left(v_{01} \frac{\rho_{02}}{\rho_{02}^{02}} + v_{02} \frac{\rho_{01}}{\rho_{01}^{02}} \right)^2 + \frac{p_0}{\sigma_0 \rho_{01}^0 \rho_{02}^0} - \frac{1}{\sigma_0} \left(v_{01}^2 \frac{\rho_{02}}{\rho_{02}^{02}} + v_{02}^2 \frac{\rho_{01}}{\rho_{01}^{02}} \right)}$$

В случае $v_{01} = v_{02} = v_0$ это выражение переходит во вторую из формул (32).

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. А. Р а х м а т у л и н. Основы газодинамики взаимнопроникающих движений сжимаемых сред. Прикл. матем. и механ., 1956, 20, 2, 184—195.
2. Я. З. К л е й м а н. О распространении волн слабого разрыва в многокомпонентной среде. Акуст. ж., 1958, 4, 3, 253—262.
3. Я. З. К л е й м а н. О распространении сильных разрывов в многокомпонентной среде. Прикл. матем. и механ., 1958, 22, 2, 199—205.

Институт механики АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
10 января 1958 г.