

О НОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ЗВУКОВОМ ПОЛЕ
В ЖИДКОМ КЛИНЕ

В. К. Кузнецов

В статье дается новый подход к решению задачи о звуковом поле в жидком клине. Приводятся некоторые результаты расчета звукового поля для случая абсолютно отражающих границ клина. Теория предсказывает новое явление — рефракцию нормальных волн в клине, или в применении к гидроакустике — гидроакустическую береговую рефракцию. Указывается на возможность объяснения рефракцией нормальных волн некоторых не объясненных ранее результатов, сообщаемых Ворцелем и Ивингом. Теоретические результаты иллюстрируются экспериментальными данными.

Решения волновой задачи для клина, полученные в работах Зоммерфельда и в ряде других работ [1] в общем виде, часто не дают возможности представить без дополнительных и сложных преобразований физическую картину поля. В связи с этим оказался полезным новый метод решения, позволивший сравнительно просто выявить некоторые характерные особенности звукового поля в клине.

Будем рассматривать клин с абсолютно отражающими границами и выберем систему координат так, чтобы границы клина отвечали значениям $\varphi = \varphi_0/2$ и $\varphi = -\varphi_0/2$, где φ_0 — угол раствора клина.

Тогда мы можем записать волновое уравнение в цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \tag{1}$$

и расщепить его подстановкой

$$z\psi = W(r, z)\Phi(\varphi) \tag{2}$$

на два уравнения:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + (k^2 - \mu^2)W = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \mu^2 \Phi = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) вместе с граничными условиями определяет совокупность волновых форм, получивших в работе Краснушкина [2] название нормальных волн в обобщенном смысле. Для краткости мы будем называть их просто нормальными волнами.

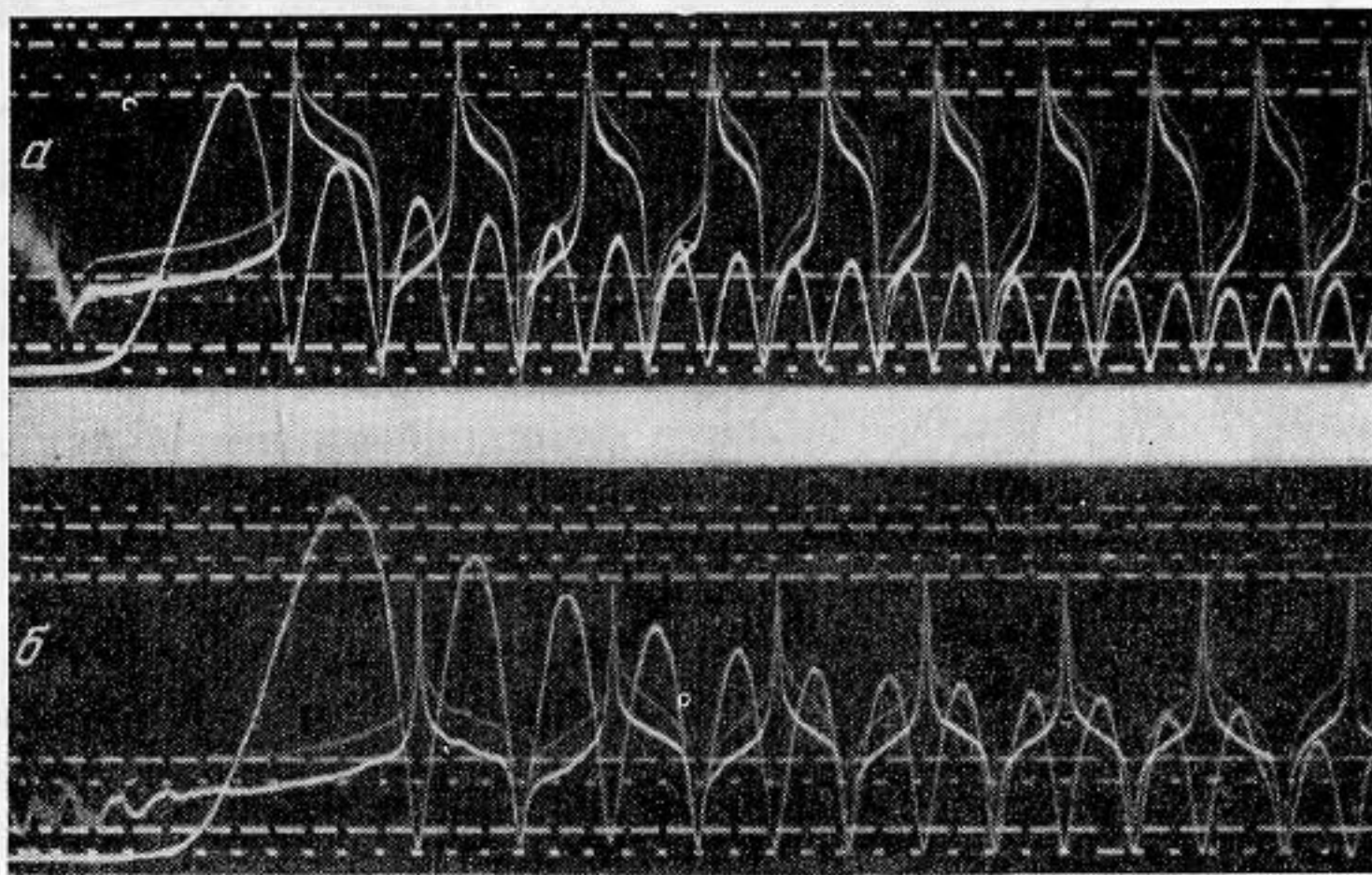
Далее мы будем рассматривать картину поля отдельной нормальной волны. По координате φ распределение звукового давления для отдельной нормальной волны описывается функциями $\sin \mu\varphi$, $\cos \mu\varphi$ в соответствии с характером абсолютно отражающих границ. В плоскости $\varphi = \text{const}$ поле отдельной нормальной волны описывается уравнением (3). Подстановкой $W = u / \sqrt{r}$ это уравнение приводится к двумерному волновому уравнению для слоисто-неоднородной среды.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + k^2 \left(1 - \frac{4\mu^2 - 1}{4k^2 r^2} \right) u = 0. \tag{5}$$

Это значит, что исследование поля отдельной нормальной волны в плоскости (r, z) можно провести методами, разработанными в волновых задачах для неоднородных сред. Как видно из уравнения (5), для этого нужно взять следующий вид показателя преломления:

$$n(r) = \sqrt{1 - \frac{4\mu^2 - 1}{4k^2 r^2}}. \quad (6)$$

Рассмотрим сперва случай падения из бесконечности, под произвольным углом к ребру клина, нормальной волны с плоским фронтом. Соот-



Фиг. 1

ветствующая задача для неоднородной среды решалась в теории распространения радиоволн [3]. Опуская обычный ход решения, запишем готовый результат:

$$u = A \sqrt{r} J_\mu(k \sin \vartheta_0 r) e^{\pm ik \cos \vartheta_0 z}, \quad (7)$$

где A — константа, ϑ_0 — угол, образованный направлением падения волны и ребром клина, J_μ — функция Бесселя. Учитывая соотношение $W = u / \sqrt{r}$, мы получаем выражение для поля в плоскости (r, z) в следующем виде:

$$W = A J_\mu(k \sin \vartheta_0 r) e^{\pm ik \cos \vartheta_0 z}. \quad (8)$$

С точностью до постоянного множителя это выражение совпадает с соответствующим членом в решении Зоммерфельда [1]. Заметим, что для случая нормального падения ($\vartheta_0 = \pi / 2$) приближенное решение было получено Андреевым [4].

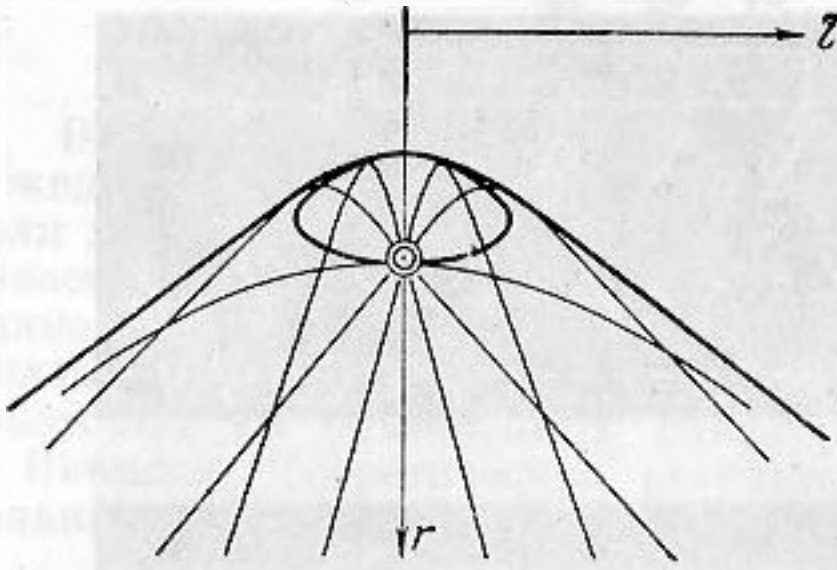
На фиг. 1 показаны экспериментальные записи «разрезов» звукового поля вдоль координаты r ($\varphi = 0$, z — константа) для разных углов падения «плоской» волны. На осциллограммах видны кривая амплитуды, кривая фазы и масштабные метки; длинная черточка соответствует 4 см. Осциллограмма *а* отвечает углу падения 85° , осциллограмма *б* — 80° . Рассмотрение кривых изменения звукового давления показывает, что они очень близко совпадают с кривыми модуля функции Бесселя; отношения максимумов и интервалов между нулями отличаются от теоретических на величину, лежащую в пределах точности эксперимента.

Перейдем теперь к рассмотрению звукового поля в клине, создаваемого точечным источником. Расчет проведем методом геометрической акустики, опуская вопрос о разложении поля источника на нормальные волны.

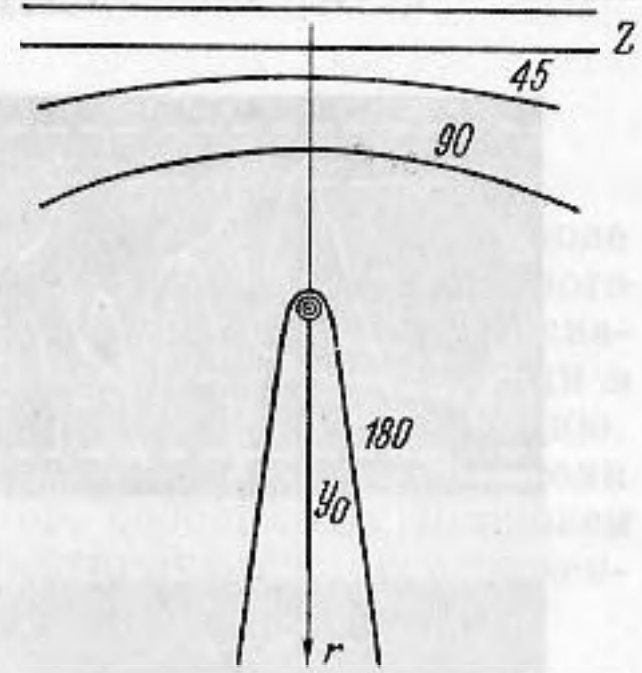
Предположим, что в точке с координатами $z = 0, r = r_0$ возбуждается нормальная волна. На основании закона преломления

$$\cos \vartheta_r = \frac{c_r}{c_{r_0}} \cos \vartheta_0, \quad (9)$$

где ϑ_0 — угол между направлением выхода луча и осью z , ϑ_r — угол между касательной к лучу в точке наблюдения и осью z , c_{r_0} — фазовая скорость нормальной волны в месте расположения излучателя, c_r — то же



Фиг. 2



Фиг. 3

в точке приема, с учетом выражения для показателя преломления (6) выведем уравнение луча для нормальной волны. Вывод сводится к решению интеграла

$$r = \int \frac{\sqrt{1 - \frac{c_r^2}{c_{r_0}^2} \cos^2 \vartheta_0}}{\frac{c_r}{c_{r_0}} \cos \vartheta_0} dz. \quad (10)$$

Уравнение лучей имеет вид:

$$\left[z - r_0 \frac{(r_0^2 - r_1^2) \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0}{r_0^2 \sin^2 \vartheta_0 + r_1^2 \cos^2 \vartheta_0} \right]^2 - r^2 \frac{(r_0^2 - r_1^2) \cos^2 \vartheta_0}{r_0^2 \sin^2 \vartheta_0 + r_1^2 \cos^2 \vartheta_0} + \frac{r_0^2 r_1^2 (r_0^2 - r_1^2) \cos^2 \vartheta_0}{[r_0^2 \sin^2 \vartheta_0 + r_1^2 \cos^2 \vartheta_0]^2} = 0, \quad (11)$$

где r_0 — координата источника, $r_1 = \sqrt{4\mu^2 - 1} / 2\mu$. Очевидно r_1 есть координата того места в клине, где «толщина» клина становится критической для данной нормальной волны. Это семейство гипербол с параметром ϑ_0 описывает рефракционную картину нормальных волн в клине. Вершины гипербол лежат на замкнутой кривой (фиг. 2):

$$\frac{z^2}{\left(\frac{r_0^2 - r_1^2}{2r_1}\right)^2} + \frac{[r^2 - 1/2(r_0^2 - r_1^2)]^2}{\left(\frac{r_0^2 - r_1^2}{2}\right)^2} = 1. \quad (12)$$

Каустика (огибающая семейства) является границей геометрической тени и представляет собой гиперболу

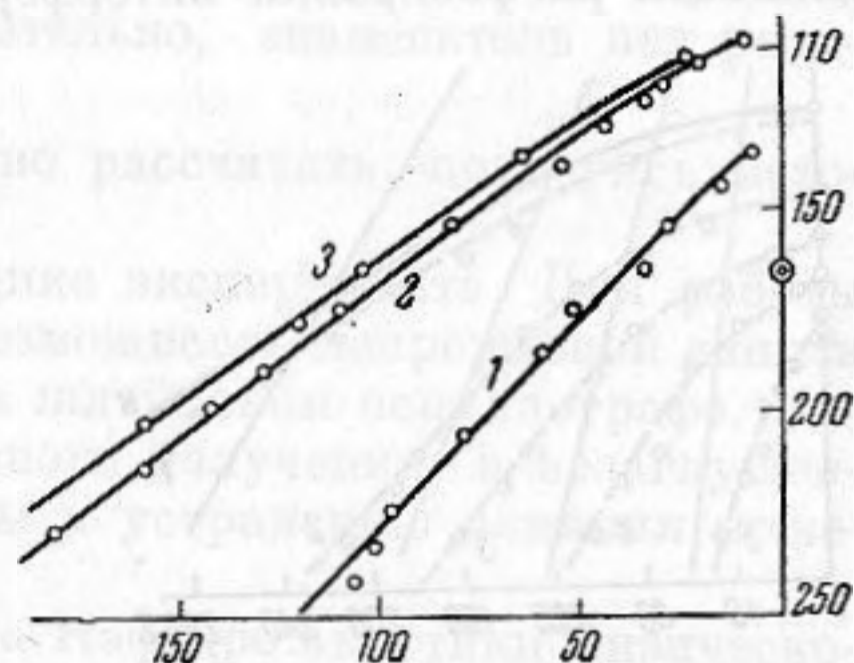
$$\frac{r^2}{r_1^2} - \frac{z^2}{r_0^2 - r_1^2} = 1. \quad (13)$$

На фиг. 3 показаны каустики, рассчитанные для разных величин параметра $r_0^2 - r_1^2 = r_0^2 - \frac{4\mu^2 - 1}{4k^2}$, учитывающего величину угла раствора клина,

частоту излучения, порядок нормальной волны и удаление излучателя от ребра клина.

Рефракция нормальных волн сказывается сильнее при расположении излучателя близко к месту, соответствующему критической толщине клина, т. е. при малой величине $r_0^2 - r_1^2$, когда распространение принимает сильно направленный характер.

На фиг. 4 представлены графики, построенные по экспериментальным данным и характеризующие зависимость рефракции первой нормальной волны от частоты. Кривые 1, 2, 3 изображают границы тени соответственно для частот 9, 11, 12 кГц. Как и на всех последующих экспериментальных кривых, здесь показана одна половина картины поля, разрезанной по линии симметрии $z = 0$. Хотя приводимые здесь расчетные и экспериментальные данные относятся к случаю абсолютно отражающих границ, можно полагать, что полученные результаты дают качественное описание рефракционной картины в клине также и для многих случаев при неабсолютно отражающих границах.



Фиг. 4

Заметим, что прибрежная зона озер, морей и океанов представляет собою жидкий клин с верхней практически абсолютно отражающей границей, лежащий на полупространстве, обладающем,

вообще говоря, произвольными параметрами. На основании сказанного выше, звуковое поле, создаваемое подводным источником в прибрежных водах, будет иметь рефракционный характер. В частности, будет существовать зона тени, описанная нами выше.

Прямым подтверждением сказанного можно считать некоторые результаты работ американской гидроакустической экспедиции, описанные в работе [5]. При исследовании дисперсии нормальных волн экспедицией проводились измерения звукового поля в прибрежной полосе по трассам вдоль берега. Хотя глубина в направлении, перпендикулярном к трассам, была переменной, предполагалось, что распространение звука вдоль этих трасс не отличается от распространения в плоском слое. В нескольких местах, именно в тех, по нашему мнению, где береговая рефракция должна сказаться наиболее резко, экспериментаторы столкнулись с фактом ненормально большого отклонения опытных значений от теоретических ([5], стр. 163—164, 168). Этому не было найдено объяснения, хотя и обращалось внимание на изменение глубины поперек трассы. Вместе с тем, наблюдаемые отклонения легко объясняются при учете рефракции нормальных волн в клине.

Рассмотрим теперь интерференционную структуру поля нормальной волны в клине при точечном источнике. Во всех точках кроме точек каустики налагаются два луча, как это видно из уравнения (11), которое является квадратичным относительно угла выхода луча ϑ_0 . Получается типичная интерференционная картина с линиями минимальной и максимальной интенсивности поля.

Выведем уравнения этих линий. Для этого находим оптическую длину пути для двух лучей, с углами выхода ϑ_{01} и ϑ_{02} , приходящих в данную точку. В координатах (ϑ_0, z) оптическая длина пути выражается формулой:

$$\eta(\vartheta_0, z) = \frac{r_1 z_0}{\cos \vartheta_0 \sqrt{r_0^2 - r_1^2}} z + r_1 k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[r_0 \frac{\cos \vartheta_0 \sqrt{r_0^2 - r_1^2} + z \sin \vartheta_0 \sqrt{r_0^2 - r_1^2}}{kz} \right]. \quad (14)$$

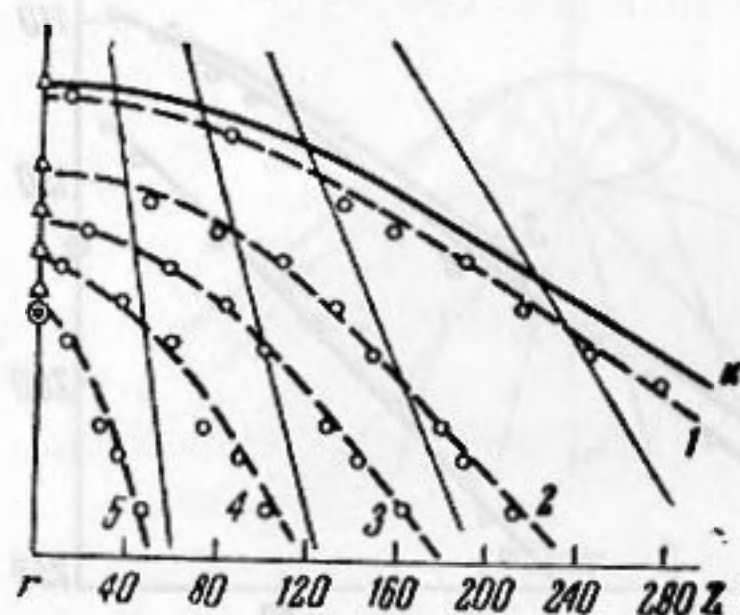
Уравнение интерференционных линий определяется условием:

$$\Delta\eta = \eta(\vartheta_{01}z) - \eta(\vartheta_{02}z) = \text{const.} \quad (15)$$

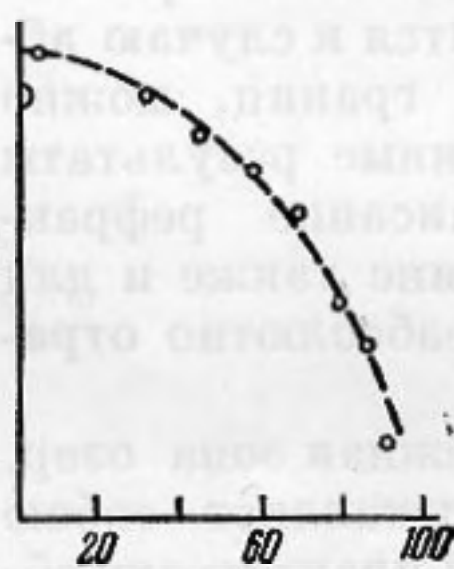
В качестве константы, т. е. параметра семейства интерференционных линий, возьмем разность фаз между прямым и отраженным лучами на линии $z = 0$.

$$\text{const} = \Delta\eta|_{z=0} = 2k \left(\sqrt{r_{\text{пар}}^2 - r^2} - \text{arc tg} \frac{\sqrt{r_{\text{пар}}^2 - r_1^2}}{r_1} \right). \quad (16)$$

При изменении $r_{\text{пар}}$ от r_0 до r_1 параметр семейства линий пробегает весь диапазон расфазировки интерферирующих лучей.



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Переходя от координат (ϑ_0, z) к координатам (r, z) , мы получим после ряда преобразований уравнение интерференционных линий в следующем виде:

$$r^2(r_0^2 - r_1^2 - M^2) - z^2(r_1^2 + M^2) = (r_0^2 - 2r_1^2)M^2 + (r_0^2 - r_1^2)r_1^2 - M^4, \quad (17)$$

где

$$M = \sqrt{r_{\text{пар}}^2 - r_1^2} + r_1 \text{arc tg} \frac{\sqrt{r_{\text{пар}}^2 - r_1^2}}{r_1} - \text{arc ctg} [f(r, z)]. \quad (18)$$

Функция $f(r, z)$, входящая в (18), есть иррациональная дробь; приводить ее выражение здесь нет необходимости, так как очевидно, что величина M является медленно изменяющейся функцией координат (r, z) , и можно утверждать, что интерференционные линии мало отличаются от гипербол. Уравнение каустики получается как частный случай из уравнения (17), если взять значение параметра при $r_{\text{пар}} = r_1$.

На фиг. 5 по экспериментальным точкам пунктиром нанесены линии максимумов звукового давления, представляющие собой интерференционные линии, на которых разности фаз интерферирующих лучей кратны 2π . На фиг. 1 — линия максимума ближайшая к каустике, сплошная линия K — каустика, рассчитанная по уравнению (13); 2, 3, 4, 5 есть линии максимумов, соответствующие разностям фаз интерферирующих лучей $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi$. Треугольниками обозначены вершины соответствующих теоретических кривых, прямыми линиями — их асимптоты.

В рассмотренном случае максимальная величина разности фаз $4 \cdot 2\pi < \Delta\eta_{\text{max}} < 5 \cdot 2\pi$ и, следовательно, имеется всего пять линий интерференционных максимумов. На фиг. 6 и 7 даны экспериментальные кривые максимумов для случаев $\Delta\eta_{\text{max}} < 2\pi$ и $\Delta\eta_{\text{max}} < 2 \cdot 2\pi$, когда наблюдаются соответственно одна и две линии максимумов.

Расчет интенсивности поля обычным методом геометрической акустики (т. е. расчет расширения лучевой трубки) приводит к весьма громоздким выражениям. В асимптотическом представлении для больших r , интен-

сивность поля в плоскости (r, z) выражается формулой:

$$P = C \sqrt{\frac{r_0}{\sqrt{r^2 + z^2} \sqrt{r^2 r_0^2 - k^2 z^2 - k^2 r^2}}} (1 - \cos \Delta\eta), \quad (19)$$

где

$$\Delta\eta = 2k \left\{ \frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{r^2 (r_0^2 - r_1^2) - r_1^2 z^2}{z^2 + r^2}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{r^2 (r_0^2 - r_1^2) - z^2 r_1^2}{z^2 + r^2}} \right] \right\},$$

где C — величина, пропорциональная мощности излучения.

Как и следовало ожидать, на каустике получается бесконечное значение интенсивности. Действительно, асимптотическое уравнение каустики имеет вид: $r^2 r_0^2 - r_1^2 z^2 - r_1^2 r^2 = 0$; следовательно, знаменатель под радикалом в (19) на каустике равен нулю.

Интенсивность поля на каустике можно рассчитать, пользуясь методом Бреховских [6].

Сделаем некоторые замечания о методике эксперимента. Для работы была собрана установка, обеспечившая возможность непрерывной записи амплитуды и фазы звукового давления на шлейфовом осциллографе. Измерения проводились в режиме непрерывного излучения, в незаглушенном бассейне, причем были приняты меры к устранению влияния нежелательных отражений.

Данная работа выполнялась автором на Кафедре акустики физического факультета МГУ в 1955—1956 гг. и докладывалась им на III Всесоюзной акустической конференции в мае 1957 года.

В заключение необходимо отметить, что настоящая статья представляет часть работы, выполненной автором по теме, предложенной доцентом Кафедры акустики МГУ В. С. Нестеровым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Франк, Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М., ОНТИ, 1937, стр. 873.
2. П. Е. Краснушкин. Метод нормальных волн в применении к волноводам и их алгебраическим прообразам. (Докторская диссертация). МГУ, 1945.
3. С. М. Рытов, Ф. С. Юдкевич. Отражение электромагнитных волн от слоя с отрицательной диэлектрической постоянной. Ж. эксперим. и теор. физики, 1940, 10, 887—902.
4. Н. Н. Андреев. Метод усреднения в решении волновых задач. Сб., посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1950, стр. 467.
5. Д. Ворцель, М. Ивинг. Распространение звука взрывов в мелкой воде. Сб. статей. «Распространение звука в океане». М., ИЛ, 1951.
6. Л. М. Бреховских. Фокусировка звука неоднородными средами. Акуст. ж., 1956, 2, 2, 124—132.

Кафедра акустики
Московского государственного
университета

Поступила в редакцию
23 сентября 1957 г.