

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ

М. П. Сахарова

В настоящей работе получено асимптотическое представление звукового поля точечного источника в клиновидной области с идеально мягкими или идеально жесткими границами на больших расстояниях от источника, удобное для численных расчетов в случае малых углов раствора клина. Показано, что поле в области геометрической тени убывает вдаль с увеличением расстояния вдоль ребра клина по степенному закону, причем показатель степени зависит только от угла раствора клина.

Пусть в клиновидной области  $G$ , определяемой неравенствами  $0 \leq r < \infty$ ;  $-\infty < z < \infty$ ;  $0 < \varphi < \Phi$  расположен в точке  $Q(r_0, \varphi_0, 0)$  точечный источник, излучающий волну  $e^{ikR}/R$ , где  $R(\varphi - \varphi_0) = \sqrt{r^2 + r_0^2 + z^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$  (см. фиг. 1). Грани клина (границы области  $G$ ) считаются акустически идеально мягкими или жесткими. Задача состоит в определении звукового поля  $\psi$  ( $\psi \sim e^{-i\omega t}$ ) в любой точке  $P$  области  $G$ .

Математически задача ставится следующим образом. Нужно найти функцию  $\psi(P, k)$ , удовлетворяющую в области  $G$  дифференциальному уравнению

$$\Delta\psi + k^2\psi = -4\pi\delta(P - Q), \tag{1}$$

где  $\delta(P - Q)$  — трехмерная функция Дирака. При этом функция  $\bar{\psi} = \psi - e^{ikR}/R$  должна быть аналитической функцией параметра  $k$ , однозначной в области  $|k| > 0$ ,  $0 \leq \arg k \leq \pi$ , ограниченной и непрерывной всюду в области  $G$  и на границе при  $\text{Im } k > 0$  (принцип погашаемости); на границе области функция  $\psi$  должна удовлетворять условиям:

$$\psi = 0 \text{ (мягкие грани)} \tag{2a}$$

или

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \text{ (жесткие грани)}. \tag{2б}$$

При этих условиях задача имеет единственное решение [1].

Строгое решение поставленной задачи дано Зоммерфельдом [2] и может быть представлено в виде [3]

$$\psi(r, \varphi, z) = \frac{1}{4\Phi i} \int_{\gamma} \frac{e^{ikR(\alpha)}}{R(\alpha)} \left[ \text{ctg} \frac{\pi}{2\Phi} (\alpha + \varphi - \varphi_0) \mp \text{ctg} \frac{\pi}{2\Phi} (\alpha + \varphi + \varphi_0) \right] d\alpha, \tag{3}$$

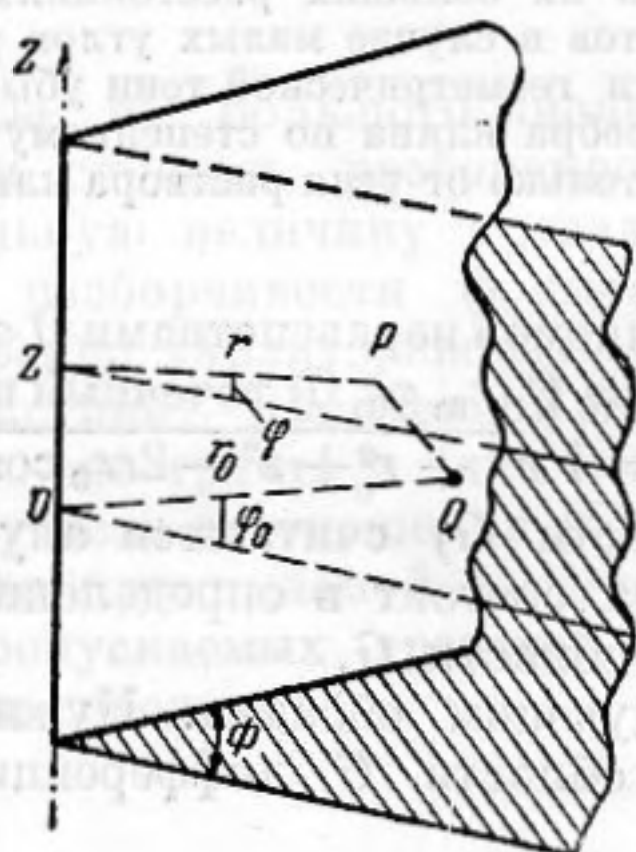
причем знак минус берется для случая мягких граней, знак плюс — для случая жестких граней. Контур интегрирования  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  для случая  $\arg k = 0$  показан на фиг. 2.

Для получения из (3) представления поля на больших расстояниях можно было бы воспользоваться методом, обычно применяемым для асимптотического представления поля из точного решения, полученного в виде интеграла Зоммерфельда.

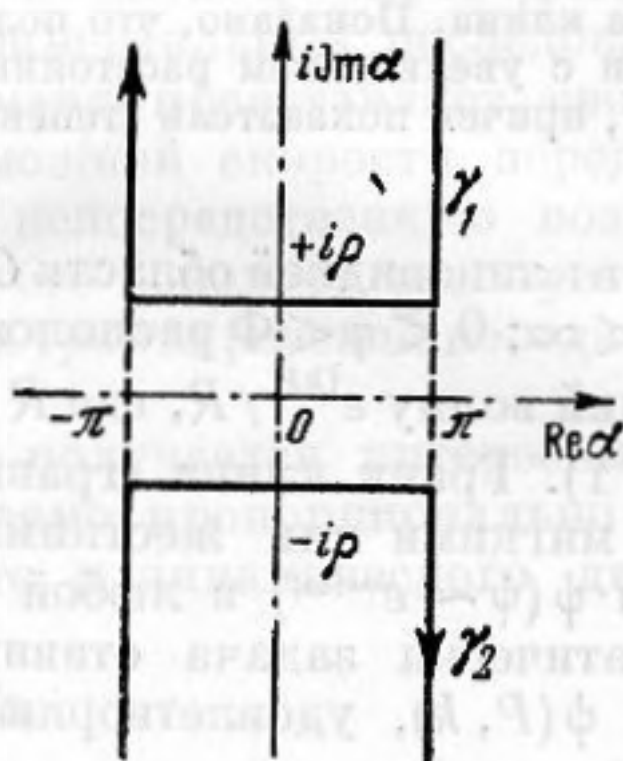
Для этого контур интегрирования  $\gamma$  деформируется так, что он превращается в две прямые  $\text{Re } \alpha = \pm \pi$  (см. фиг. 2). При этом интеграл дает сумму вычетов в полюсах подынтегрального выражения  $\alpha = 2n\Phi - \varphi \pm \varphi_0$ , которые расположены в полосе  $|\text{Re } \alpha| < \pi$ , и выражение (3) получает вид:

$$\psi = \sum_n \left[ \frac{e^{ikR(2n\Phi - \varphi + \varphi_0)}}{R(2n\Phi - \varphi + \varphi_0)} \mp \frac{e^{ikR(2n\Phi - \varphi - \varphi_0)}}{R(2n\Phi - \varphi - \varphi_0)} \right] + \\ + \frac{1}{4\Phi i} \left( \int_{-\pi - i\infty}^{-\pi + i\infty} - \int_{\pi - i\infty}^{\pi + i\infty} \right) \frac{e^{ikR(\alpha)}}{R(\alpha)} \left[ \text{ctg } \frac{\pi}{2\Phi} (\alpha + \varphi - \varphi_0) \mp \text{ctg } \frac{\pi}{2\Phi} (\alpha + \varphi + \varphi_0) \right] d\alpha,$$

где сумма представляет собой совокупность сферических волн, соответствующих действительному и мнимым источникам геометрического при-



Фиг. 1



Фиг. 2

ближения. Интегральный член, легко вычисляемый асимптотически для больших расстояний методом перевала, представляет волновую поправку к геометрическому приближению. Для углов раствора клина  $\Phi = \pi/n$ , где  $n$  — целое число, интегральный член исчезает, и точное решение задачи дается только суммой полей мнимых источников, расположенных на окружности  $r = r_0$ ,  $z = 0$ .

Подобное представление поля, удобное для вычислений в случае больших углов раствора клиновидной области ( $\Phi > \pi$ ), становится неудобным в случае малых углов  $\Phi$ , когда требуется суммирование полей весьма большого числа мнимых источников.

Однако возможно другое асимптотическое представление, удобное для вычисления поля в клиновидных областях с малым углом раствора.

Введем в плоскости  $(r, z)$  полярные координаты:

$$\begin{aligned} r &= \rho \cos \theta \\ z &= \rho \sin \theta \end{aligned} \quad \rho = \sqrt{r^2 + z^2},$$

считая координату  $\varphi$  произвольной (см. фиг. 3).

Для получения из (3) приближенного выражения, пригодного для больших значений величины  $\rho/r_0$ , можно приближенно заменить под интегралом  $\frac{e^{ikR(\alpha)}}{R(\alpha)} \simeq \frac{e^{ik\rho}}{\rho} e^{-ikr_0 \cos \theta \cos \alpha}$ , что соответствует пренебрежению членами выше первой степени малой величины  $r_0/\rho$  в разложении

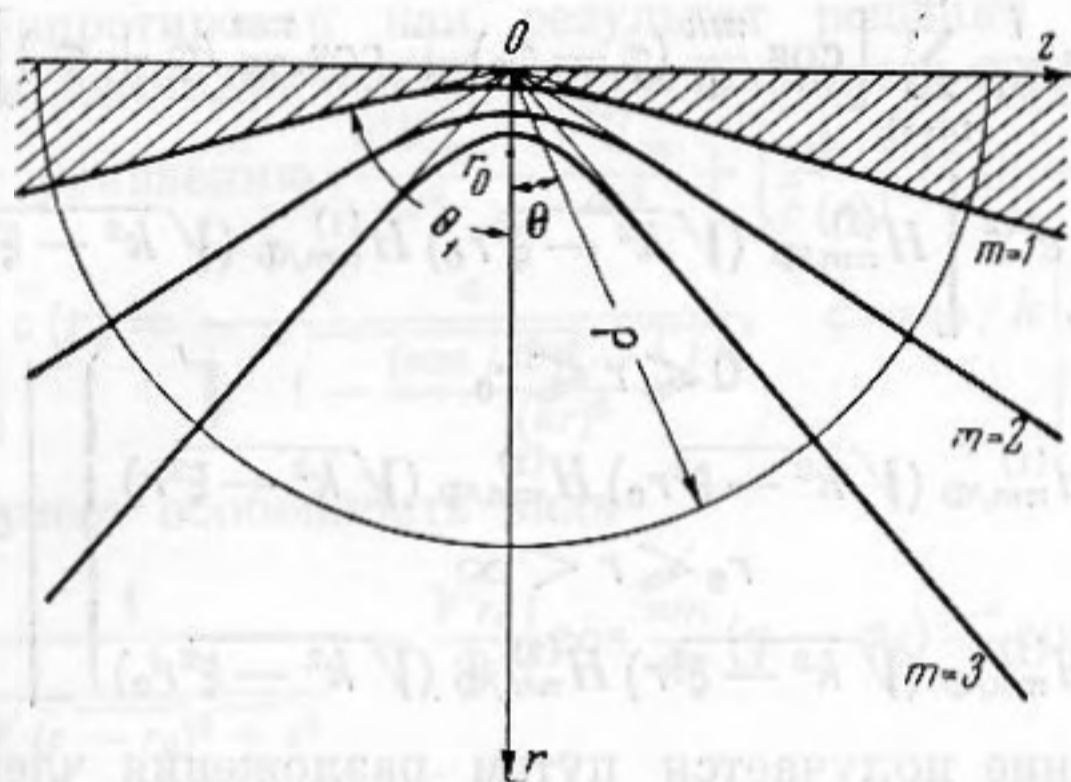
$$R(\alpha) = \sqrt{r^2 + r_0^2 + z^2 - 2rr_0 \cos \alpha} \simeq \rho \left[ 1 - \frac{r_0 r \cos \alpha}{\rho^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^2 - \dots \right]. \quad (4)$$

Подставляя (4) под интеграл (3) и вынося постоянный множитель за знак интеграла, получаем выражение:

$$\psi \simeq \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \frac{1}{4\Phi_i} \int_{\gamma} e^{-ikr_0 \cos \theta \cos \alpha} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\Phi} (\alpha + \varphi - \varphi_0) \mp \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\Phi} (\alpha + \varphi + \varphi_0) \right] d\alpha = F(\theta) \frac{e^{ik\rho}}{\rho}, \quad (5)$$

асимптотически стремящееся к (3) при  $(r_0/\rho)^2 \rightarrow 0$ .

Множитель  $F(\theta)$  можно рассматривать как некоторую «характеристику направленности» точечного источника, расположенного в точке  $r=0$ ,  $z=0$ .



Фиг. 3

Теперь задача заключается в том, чтобы найти удобное для вычислений представление «характеристики направленности»  $F(\theta)$ . Разобьем интеграл (5) на два, соответственно двум членам в квадратных скобках, и рассмотрим первый член, обозначив его через  $F_1(\theta)$ . Разлагая затем стоящий под знаком интеграла член  $\operatorname{ctg} \pi/2\Phi (\alpha + \varphi - \varphi_0)$  в ряд и меняя последовательность операций суммирования и интегрирования, имеем

$$F_1(\theta) = \frac{1}{2\Phi} \left[ - \sum_{m=1}^{\infty} e^{i \frac{\pi}{\Phi} m(\varphi - \varphi_0) + i \frac{\pi^2}{2\Phi} m} \int_{\gamma_1} e^{-ikr_0 \cos \theta \cos \alpha} e^{i \frac{\pi}{\Phi} m\alpha - i \frac{\pi^2}{2\Phi} m} d\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-i \frac{\pi}{\Phi} m(\varphi - \varphi_0) + i \frac{\pi^2}{2\Phi} m} \int_{\gamma_2} e^{-ikr_0 \cos \theta \cos \alpha} e^{-i \frac{\pi}{\Phi} m\alpha - i \frac{\pi^2}{2\Phi} m} d\alpha \right].$$

Замечая, что

$$-2\pi J_{\pi m/\Phi}(kr_0 \cos \theta) = \int_{\gamma_1} e^{-ikr_0 \cos \theta \cos \alpha} e^{i \frac{\pi}{\Phi} m\alpha - i \frac{\pi^2}{2\Phi} m} d\alpha$$

и

$$2\pi J_{\pi m/\Phi}(kr_0 \cos \theta) = \int_{\gamma_2} e^{-ikr_0 \cos \theta \cos \alpha} e^{-i \frac{\pi}{\Phi} m\alpha - i \frac{\pi^2}{2\Phi} m} d\alpha$$

и объединяя суммы, получаем

$$F_1(\theta) = \frac{2\pi}{\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{i \frac{\pi^2}{2\Phi} m} J_{\pi m/\Phi}(kr_0 \cos \theta) \cos \frac{\pi m}{\Phi} (\varphi - \varphi_0).$$

Второй член  $F_2(\theta)$  получается заменой  $\varphi_0$  на  $-\varphi_0$ . Складывая, наконец,  $F_1(\theta)$  и  $F_2(\theta)$ , получаем для характеристики направленности выражение:

$$F(\theta) = \frac{2\pi}{\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi^2}{2\Phi}m} J_{\pi m/\Phi}(kr_0 \cos \theta) \left[ \cos \frac{\pi m}{\Phi}(\varphi - \varphi_0) \mp \cos \frac{\pi m}{\Phi}(\varphi + \varphi_0) \right]. \quad (6)$$

Полученный ряд хорошо сходится, и для случаев  $\Phi = \pi/n$ , где  $n$  целое число, его удобно вычислять непосредственно.

Перейдем к рассмотрению поля в области геометрической тени. Точное решение задачи дифракции сферической волны в клиновидной области, представленное выражением (3), можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{i}{2\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \cos \frac{\pi m}{\Phi}(\varphi - \varphi_0) \mp \cos \frac{\pi m}{\Phi}(\varphi + \varphi_0) \right] \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z} \left[ H_{\pi m/\Phi}^{(1)}(\sqrt{k^2 - \xi^2}r_0) H_{\pi m/\Phi}^{(1)}(\sqrt{k^2 - \xi^2}r) + \right. \\ & \left. + \begin{cases} H_{\pi m/\Phi}^{(1)}(\sqrt{k^2 - \xi^2}r_0) H_{\pi m/\Phi}^{(2)}(\sqrt{k^2 - \xi^2}r) & 0 \leq r \leq r_0 \\ H_{\pi m/\Phi}^{(1)}(\sqrt{k^2 - \xi^2}r) H_{\pi m/\Phi}^{(2)}(\sqrt{k^2 - \xi^2}r_0) & r_0 \leq r < \infty \end{cases} \right] d\xi. \quad (7) \end{aligned}$$

Такое представление получается путем разложения члена в квадратных скобках в ряд, подобно тому, как это делалось для интеграла (5), представления члена  $e^{ikR(\alpha)}/R(\alpha)$  в виде

$$\frac{e^{ikR(\alpha)}}{R(\alpha)} = \int_0^{\infty} \frac{ndn e^{-|z|\sqrt{n^2 - k^2}}}{\sqrt{n^2 - k^2}} J_0(n\sqrt{r^2 + r_0^2 + z^2 - 2rr_0 \cos \alpha})$$

и замены последовательности суммирования и интегрирования.

Каждый член суммы (7) можно назвать, следуя П. Е. Краснушкину, «нормальной волной номера  $m$ ». Каждую нормальную волну можно рассматривать как некоторый волновой процесс, распространяющийся в плоскости  $(r, z)$ ; член в квадратных скобках характеризует распределение поля по координате  $\varphi$ .

Для каждой нормальной волны, т. е. для каждого члена суммы (7), можно найти приближение геометрической акустики, анализируя интеграл методом перевала для больших значений  $kr$ . Геометрическая картина представляет собой семейство лучей — гипербол, выходящих из точки  $r = r_0, z = 0$ . Огибающая (каустика) этого семейства, которая является границей геометрической тени, описывается уравнением.

$$\frac{\frac{r^2}{\left(\frac{\pi m}{\Phi}\right)^2 - \frac{1}{4}}}{k^2} - \frac{\frac{z^2}{r_0^2 - \frac{\left(\frac{\pi m}{\Phi}\right)^2 - \frac{1}{4}}}{k^2}}{r_0^2 - \frac{\left(\frac{\pi m}{\Phi}\right)^2 - \frac{1}{4}}}{k^2} = 1.$$

Это уравнение гиперболы. На больших расстояниях можно считать, что границу тени определяет не гипербола, а ее асимптота (см. фиг. 3), уравнение которой в координатах  $\rho, \theta$  имеет вид:  $\theta = \arccos \cos \frac{\pi m}{\Phi} kr_0$ . Каустика первой нормальной волны (имеется в виду нормальная волна, описываемая первым не обращающимся в нуль членом суммы (7)) определяет границу геометрической тени в клине в плоскости  $(r, z)$ , так как каустики нормальных волн высших порядков лежат в области интерференции для первой нормальной волны (см. фиг. 3).

Заметим, что каждый член суммы (7), который, если его умножить на  $\sqrt{r}$ , можно записать в виде

$$U_m = \frac{i}{2\Phi} A_m(\varphi, \varphi_0) \sqrt{r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z} \left[ \begin{aligned} & H_{\pi m/\Phi}^{(1)}(\sqrt{k^2 - \xi^2} r_0) H_{\pi m/\Phi}^{(1)}(\sqrt{k^2 - \xi^2} r) + \\ & \left\{ \begin{aligned} & 0 \leq r \leq r_0 \\ & H_{\pi m/\Phi}^{(1)}(\sqrt{k^2 - \xi^2} r_0) H_{\pi m/\Phi}^{(2)}(\sqrt{k^2 - \xi^2} r) \\ & r_0 \leq r < \infty \\ & H_{\pi m/\Phi}^{(1)}(\sqrt{k^2 - \xi^2} r) H_{\pi m/\Phi}^{(2)}(\sqrt{k^2 - \xi^2} r_0) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right] d\xi,$$

может быть интерпретирован как результат решения плоской задачи о распространении цилиндрической волны в слоисто-неоднородной среде.

Он удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial^2 U_m}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U_m}{\partial z^2} + \left[ \frac{\omega}{\bar{c}(r)} \right]^2 U_m = 0$

$$\left| \bar{c}(r) = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{(\pi m / \Phi)^2 - 1/4}{(kr)^2}}}, \quad c = \omega / k \right|$$

в точке  $Q(r_0, 0)$  имеет особенность вида

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ z \rightarrow 0}} U_m(r, z) \frac{1}{\ln \frac{1}{\sqrt{(r-r_0)^2 + z^2}}} = \frac{\sqrt{r_0}}{\Phi} \left[ \cos \frac{\pi m}{\Phi} (\varphi - \varphi_0) \mp \cos \frac{\pi m}{\Phi} (\varphi + \varphi_0) \right],$$

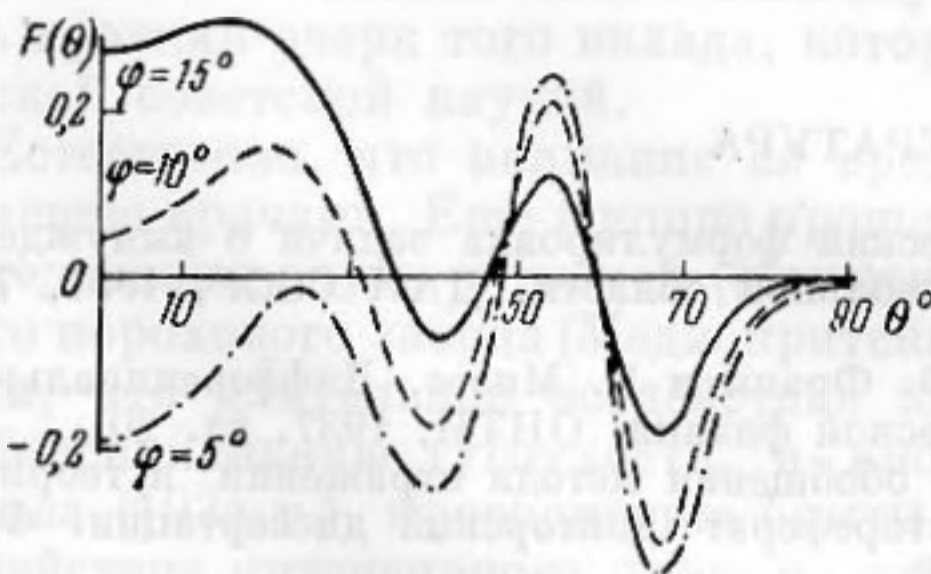
причем всюду, кроме окрестности точки  $Q(r_0, 0)$ ,  $|U_m| < \infty$  при  $\text{Im } k > 0$ .

Приближенное рассмотрение задачи о точечном источнике непосредственно на этом пути и геометрическая трактовка были предложены В. С. Нестеровым и развиты В. К. Кузнецовым, получившим выражения для каустик [4].

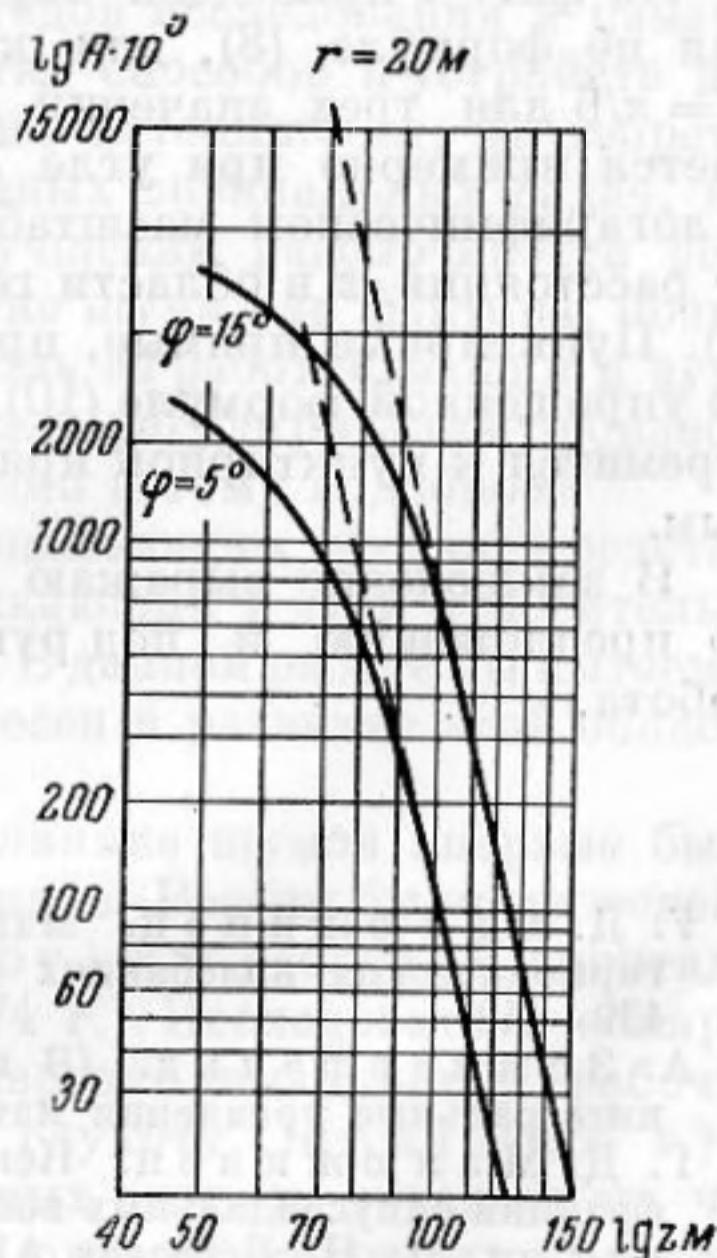
Вернемся к характеристике направленности (6). Рассматривается для определенности случай клина с мягкими гранями. Тогда  $F(\theta)$  запишется в виде

$$F(\theta) =$$

$$= \frac{\pi}{\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{i \frac{\pi^2}{2\Phi} m} J_{\pi m/\Phi}(kr_0 \cos \theta) \sin \frac{\pi m}{\Phi} \varphi \cdot \sin \frac{\pi m}{\Phi} \varphi_0. \quad (8)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Непосредственно видно, что первый член суммы, т. е. член с функцией Бесселя минимального порядка, имеет первый, самый большой максимум как раз при  $\theta_1 = \arccos \cos \pi/\Phi kr_0$ , т. е. на границе геометрической

тени и далее по мере продвижения в область тени (по мере уменьшения  $\cos \theta$ ) быстро убывает. Остальные члены с функциями Бесселя высших порядков имеют первые максимумы, лежащие уже в области интерференции, и убывают еще быстрее по мере углубления в область тени. Оценивая тот вклад в звуковое поле, который дается членами высших порядков, можно с хорошим приближением считать, что характеристика направленности в области тени определяется лишь первым членом:

$$F(\theta) = \frac{\pi}{\Phi} e^{i\pi^2/2\Phi} J_{\pi/\Phi}(kr_0 \cos \theta) \sin \frac{\pi}{\Phi} \varphi \cdot \sin \frac{\pi}{\Phi} \varphi_0,$$

так что поле в области тени получает приближенный вид:

$$\psi = \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\pi}{\Phi} e^{i\pi^2/2\Phi} J_{\pi/\Phi}(kr_0 \cos \theta) \sin \frac{\pi}{\Phi} \varphi \sin \frac{\pi}{\Phi} \varphi_0 = Ae^{ikr}. \quad (9)$$

Можно еще больше упростить это выражение, заменив функцию Бесселя ее приближенным значением для малых аргументов. Подставляя полученную для  $F(\theta)$  формулу в (5), мы получаем поле в области тени:

$$\psi = \frac{\pi}{\Phi} \sin \frac{\pi}{\Phi} \varphi \cdot \sin \frac{\pi}{\Phi} \varphi_0 \frac{e^{i(k\sqrt{r^2+z^2}-\pi^2/2\Phi)} (kr_0 r)^{\pi/\Phi}}{2^{\pi/\Phi} \Gamma(1+\pi/\Phi)} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \right)^{\pi/\Phi+1}.$$

Это выражение сводится к виду:

$$\psi = \frac{\pi}{\Phi} \sin \frac{\pi}{\Phi} \varphi \cdot \sin \frac{\pi}{\Phi} \varphi_0 \frac{e^{i(k\sqrt{r^2+z^2}-\pi^2/2\Phi)} (kr_0 r)^{\pi/\Phi}}{2^{\pi/\Phi} \Gamma(1+\pi/\Phi)} (1/z)^{\pi/\Phi+1}, \quad (10)$$

если зона тени лежит в области больших углов  $\theta$ , близких к  $\pi/2$ . Таким образом, звуковое поле убывает с увеличением расстояния вдоль ребра клина  $z$  при постоянном  $r$  и  $\varphi$  по степенному закону, причем показатель степени зависит только от угла раствора клина.

На фиг. 4 приведена характеристика направленности  $F(\theta)$ , построенная по формуле (8), для клина с мягкими гранями с углом раствора  $\theta = \pi/6$  для трех значений координаты  $\varphi$ ,  $kr_0$  равно 20. Зона тени начинается примерно при угле  $72^\circ$ . Сплошные линии на фиг. 5 изображают в логарифмическом масштабе зависимость амплитуды звукового поля  $A$  от расстояния  $z$  в области геометрической тени, построенную по формуле (9). Пунктирные прямые, представляющие ту же зависимость, построены по упрощенной формуле (10). С увеличением расстояния сплошная линия стремится к пунктирной прямой, т. е. закон спада становится степенным.

В заключение выражаю глубокую благодарность Г. Д. Малюжину, по предложению и под руководством которого выполнена настоящая работа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Д. Малюжинец. Математическая формулировка задачи о вынужденных гармонических колебаниях в произвольной области. ДАН СССР, 1951, 78, 3, 439—442.
2. А. Зоммерфельд. (В книге Ф. Франк и Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, 1937, гл. 20).
3. Г. Д. Малюжинец. Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции синусоидальных волн. Автореферат докторской диссертации. Физич. ин-т им. П. Н. Лебедева АН СССР.
4. В. К. Кузнецов. О новом методе решения задачи о звуковом поле в жидком клине. Акуст. ж., 1959, 5, 2.