АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VIII 1962 Вып. 4

О КОРРЕЛЯЦИИ ФЛЮКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ, ОТРАЖЕННОЙ ОТ СТАТИСТИЧЕСКИ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Э. П. Гулин

В рамках метода возмущений получены выражения для функций продольной и поперечной автокорреляции флюктуаций амплитуды и фазы сферической звуковой волны, отраженной от абсолютно мягкой статистически шероховатой поверхности. С помощью метода стационарной фазы в геометрическом приближении выделены области на неровной поверхности, наиболее существенные для рассеяния.

Существенными характеристиками статистических свойств звуковых сигналов, отраженных от шероховатой поверхности, являются пространственные функции автокорреляции флюктуаций амплитуды и фазы. Представляет интерес выяснить, насколько коррелированы флюктуации амплитуды и фазы звукового поля в двух приемниках, разнесенных вдоль трассы распространения звука (продольная корреляция) и в поперечном направлении (в горизонтальной и вертикальной плоскостях). Наше рассмотрение будет ограничено случаем малых значений параметра Рэлея.

Предположим, что источник и приемник звука расположены в точках Q_0 и Q_1 с координатами $(0, 0, z_1)$ и $(L, 0, z_2)$, а форма неровной поверхности задана в виде $Z = F(x, y)$, где $F(x, y)$ — однородная случайная функция координат x и y с нулевым средним значением (усреднение берется по статистическому ансамблю поверхностей). Считая звуковую волну монохроматическим процессом, найдем решение уравнения Гельмгольца с правой частью $\nabla^2 p + k^2 p = -4\pi\delta(Q - Q_0)$, удовлетворяющее граничному условию на абсолютно мягкой неровной поверхности $p_{z=F} = 0$ и регулярное на бесконечности. Представим искомое решение в виде суммы двух полей $p = p_0 + p_1$, где p_0 соответствует решению задачи при наличии отражения от плоскости $z = 0$, а p_1 удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и граничному условию на поверхности $p_{1Z=F} = -p_0$. Считая, что неровная поверхность мало уклоняется от средней плоскости и является достаточно пологой, для рассеянного поля на плоскости $Z = 0$ в первом приближении, получим выражение: $p_1(x, y, 0) = -\left(\frac{\partial p_0}{\partial z}\right)_{z=0} \cdot F(x, y)$. Для рассеянного поля в произвольной точке наблюдения с помощью формулы Грина в случае плоской границы получается интегральное выражение:

$$p_1(L, 0, z_2) = -\frac{1}{2\pi}\iint p_1(x, y, 0) \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{ikR_2'}}{R_2'}\right) F(x, y)\, dx\, dy. \quad (1)$$

Нулевое приближение для поля будет иметь вид: $p_0 = \frac{e^{ikR'}}{R'} - \frac{e^{ikR_1'}}{R_1'}$,

где

$$R' = \sqrt{x^2 + y^2 + (z_1 - z)^2},\ R_1' = \sqrt{x^2 + y^2 + (z_1 + z)^2},$$

$$R_2' = \sqrt{(L - x)^2 + y^2 + (z_2 - z)^2}.$$

Выражение (1) можно переписать в виде

$$p_1(L, 0, z_2) = \frac{1}{2\pi}\iint\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{e^{ikR'}}{R'} - \frac{e^{ikR_1'}}{R_1'}\right]\right\}_{z=0} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{ikR_2'}}{R_2'}\right)\cdot F(x, y)\,dx\,dy. \quad (2)$$

Выполняя дифференцирование по z и полагая $z=0$, при условии $k\cdot\min(R_1', R', R_2')\gg 1$, мы получим

$$p_1 = \frac{k^2 z_1 z_2}{\pi}\iint\frac{e^{ik\left[\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{(L-x)^2+y^2+z_2^2}\right]}}{(x^2+y^2+z_1^2)\left[(L-x)^2+y^2+z_2^2\right]}F(x, y)\,dx\,dy. \quad (3)$$

И, наконец, переходя к выражениям для флюктуаций амплитуды и фазы, согласно формулам $\delta A/A = \mathrm{Re}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)$, $\delta\varphi = \mathrm{Im}(p_1/p_0)$, мы приходим к выражениям:

$$\begin{aligned}\frac{\delta A}{A_0} &= \frac{k^2 z_1 z_2}{\pi A_0}\iint\frac{1}{R_1^2R_2^2}\cos\left[k(R_1+R_2)-\Phi_0\right]\cdot F(x, y)\,dx\,dy,\\ \delta\varphi &= \frac{k^2 z_1 z_2}{\pi A_0}\iint\frac{1}{R_1^2R_2^2}\sin\left[k(R_1+R_2)-\Phi_0\right]\cdot F(x, y)\,dx\,dy,\end{aligned} \quad (4)$$

где $R_1 = \sqrt{x^2+y^2+z_1^2}$, $R_2 = \sqrt{(L-x)^2+y^2+z_2^2}$, A_0 и Φ_0 — амплитуда и фаза нефлюктуирующей части поля.

Напишем выражение для функции пространственной автокорреляции флюктуаций амплитуды, предполагая, что приемники расположены в точках с координатами $(L, 0, z_2)$ и $(L+\Delta L, \Delta y, z_2+\Delta z)$

$$K_{AA} = \frac{k^4 z_1^2 z_2^2}{\pi^2 A_0 A_1}\iiiint\frac{\cos\left[k\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+k\sqrt{(L-x_1^2)+y_1^2+z_2^2}-\Phi_0\right]}{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)\left[(L-x_1)^2+y_1^2+z_2^2\right]}\times$$
$$\times\frac{\cos\left[k\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}+k\sqrt{(L+\Delta L-x_2)^2+(y_2-\Delta y)^2+(z_2+\Delta z)^2}-\Phi_1\right]}{(x_2^2+y_2^2+z_1^2)\left[(L+\Delta L-x_2)^2+(y_2-\Delta y)^2+(z_2+\Delta z)^2\right]}\times$$
$$\times\overline{F(x_1, y_1)\cdot F(x_2, y_2)}\,dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2, \quad (5)$$

где A_1 и Φ_1 — амплитуда и фаза нефлюктуирующей части поля во втором приемнике. Аналогично можно написать и выражение для функции пространственной автокорреляции флюктуаций фазы.

Найдем вид функций пространственной автокорреляции флюктуаций амплитуды и фазы в случае двумерной квазигармонической шероховатости. При этом мы попытаемся выделить на неровной поверхности области, которые в основном формируют рассеянное поле, наблюдаемое в точке приема.

Рассмотрим вначале случай продольной корреляции (приемники находятся на оси x на расстоянии ΔL друг от друга), задавая функцию пространственной автокорреляции смещений неровной границы в виде $\overline{F_1F_2} = \overline{F_0^2}e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{a^2}}\cdot\cos q(x_1-x_2)$. После предварительного интегрирования по y, выполненного в предположении, что в области, существенной для рассеяния, соблюдены условия $|y|\ll\sqrt{x^2+z_1^2}$ и $|y|\ll\sqrt{(L-x)^2+z_2^2}$ (с последующей проверкой), выражение (5) примеследующий вид:

$$K_{AA}=\frac{2k^3z_1^2z_2^2\overline{F_0^2}}{\pi A_0A_1}\iint\frac{\cos\left[k\left(r_1+r_1'\right)+\frac{\pi}{4}-\Phi_0\right]\cdot\cos\left[k\left(r_2+r_2'\right)+\frac{\pi}{4}-\Phi_1\right]}{\left(r_1\cdot r_1'\right)^{3/2}\left(r_2\cdot r_2'\right)^{3/2}\sqrt{\left(r_1+r_1'\right)\left(r_2+r_2'\right)}}\times$$

$$\times e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{a^2}}\cos q\left(x_1-x_2\right)dx_1\,dx_2, \tag{6}$$

где $r_1=\sqrt{x_1^2+z_1^2}$, $r_1'=\sqrt{(L-x_1)^2+z_2^2}$, $r_2=\sqrt{x_2^2+z_1^2}$, $r_2'=\sqrt{(L-x_2)^2+z_2^2}$. Интегрирование здесь ведется в общем случае в бесконечных пределах. Выражения для функций пространственной автокорреляции флюктуаций амплитуды и фазы можно также представить в следующей форме:

$$K=\frac{k^3z_1^2z_2^2\overline{F_0^2}}{4A_0A_1\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}g\left(x_1,\,x_2\right)\left[\pm e^{i(f_1+f_2+qx_1-qx_2)}\pm e^{-i(f_1+f_2+qx_1-qx_2)}\pm\right.$$

$$\pm e^{i(f_1+f_2-qx_1+qx_2)}\pm e^{-i(f_1+f_2-qx_1+qx_2)}+e^{i(f_1-f_2+qx_1-qx_2)}+e^{-i(f_1-f_2+qx_1-qx_2)}+$$

$$\left.+e^{i(f_1-f_2-qx_1+qx_2)}+e^{-i(f_1-f_2-qx_1+qx_2)}\right]dx_1\,dx_2, \tag{7}$$

где знаки плюс и минус относятся соответственно к флюктуациям амплитуды и фазы. В выражении (7) введены обозначения

$$g\left(x_1,\,x_2\right)=e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{\left(r_1r_1'\right)^{3/2}\left(r_2r_2'\right)^{3/2}\sqrt{\left(r_1+r_1'\right)\left(r_2+r_2'\right)}},$$

$$f_1=k\left(r_1+r_1'\right)+\frac{\pi}{4}-\Phi_0,\quad f_2=k\left(r_2+r_2'\right)+\frac{\pi}{4}-\Phi_1.$$

Из выражения (7) видно, что решение поставленной задачи свелось к вычислению интегралов типа

$$I=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}g\left(x_1,\,x_2\right)e^{if(x_1,x_2)}\,dx_1dx_2, \tag{8}$$

которые можно оценить методом стационарной фазы при наличии экстремума в ходе функции $f(x_1, x_2)$, если $|f(x_1, x_2)|\gg 1$. При этом $g(x_1, x_2)$ должна быть медленно меняющейся функцией переменных x_1 и x_2. Раскладывая $f(x_1, x_2)$ в ряд в окрестности точки стационарной фазы, в первом приближении получим [1]

$$I\cong\frac{2g\left(x_1,\,x_2\right)}{\sqrt{f_{x_1x_1}\cdot f_{x_2x_2}}}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(u^2+v^2)}du\,dv}{1+\frac{u}{\sqrt{2f_{x_1x_1}}}\left(\frac{f_{x_1x_1x_1}}{f_{x_1x_1}}-\frac{2g_{x_1}}{g}\right)+\frac{v}{\sqrt{2f_{x_2x_2}}}\left(\frac{f_{x_2x_2x_2}}{f_{x_2x_2}}-\frac{2g_{x_2}}{g}\right)}. \tag{9}$$

Здесь значения функций g и f, а также их частных производных по x_1 и x_2 берутся в точке стационарной фазы. Знаменатель в подынтегральном выражении содержит поправочные члены, которые, если метод стационарной фазы применим, должны быть значительно меньше единицы в области, существенной для интегрирования. Для определения точек стационарной фазы в выражении (8) получаем следующие уравнения: $df_1/dx_1\pm q=0$, $df_2/dx_2\pm q=0$, или после дифференцирования

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z_1}{x}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z_2}{L-x}\right)^2}}=\pm\frac{q}{k},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z_1}{x}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z_2}{L+\Delta L-x}\right)^2}}=\pm\frac{q}{k}. \tag{10}$$

Эти уравнения дают четыре точки стационарной фазы. Найти их решения в общем случае не удается. Рассмотрим предельные случаи, когда уравнения можно упростить. При $q=0$ существуют две точки стационарной фазы $x=Lz_1/z_1+z_2$ и $x=(L+\Delta L)z_1/z_1+z_2$. При q, отличном от нуля, но очень малом, естественно предположить, что точки стационарной фазы лежат в окрестности тех же значений. Полагая $z_1/x \ll 1$, $z_2/L-x \ll 1$ при выполнении условий $\frac{2q}{k\psi^2}\cdot\frac{z}{z_1+z_2} \ll 1$, $\frac{\Delta L}{L} \ll 1$, получим

$$x_{1,2}=\frac{Lz_1}{z_1+z_2}\pm\frac{q}{k}\,\frac{L}{\psi^2}\,\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2},$$

$$x_{3,4}=\frac{(L+\Delta L)\,z_1}{z_1+z_2}\pm\frac{q}{k}\,\frac{(L+\Delta L)}{\psi^2}\cdot\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2},$$

где $z=\max(z_1,z_2)$, $\psi=\operatorname{arctg} z_1+z_2/L$ — угол скольжения. Можно показать, что поправка в знаменателе подынтегральной функции выражения (9) мала по сравнению с единицей при выполнении условий $D=\frac{ka^2\sin^2\psi}{R} \gg 1$, $\frac{D^{3/2}}{qa} \gg 1$ (если $\Delta L \lesssim a$), где $R=\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)\sin\psi}$, т. е. пространственный интервал автокорреляции шероховатостей должен превосходить размеры зоны Френеля. Если положить $A_0=A_1=L/\cos\psi$, $\Phi_0=kL/\cos\psi$, $\Phi_1=k(L+\Delta L)/\cos\psi$, то после выполнения интегрирования в выражении (7) мы получим

$$K_{AA}=2k^2\sin^2\psi\overline{F_0^2}\left[1-\left(1-\frac{3}{2D^2}\right)e^{-\frac{q^2a^2}{D}}\cdot\cos\left(\frac{q^2a^2}{2D}\right)\right]e^{-\frac{(\Delta L)^2z_1^2}{a^2(z_1+z_2)^2}}\cdot\cos\left(\frac{q\Delta Lz_1}{z_1+z_2}\right),$$

$$K_{\varphi\varphi}=2k^2\sin^2\psi\overline{F_0^2}\left[1+\left(1-\frac{3}{2D^2}\right)e^{-\frac{q^2a^2}{D}}\cdot\cos\left(\frac{q^2a^2}{2D}\right)\right]e^{-\frac{(\Delta L)^2z_1^2}{a^2(z_1+z_2)^2}}\cdot\cos\left(\frac{q\Delta Lz_1}{z_1+z_2}\right). \quad (11)$$

При $\Delta L=0$ получаются выражения для средних квадратов флюктуаций амплитуды и фазы, которые совпадают с полученными ранее в случае рассеяния ограниченной площадкой, охватывающей существенную для рассеяния область [2].

Из формул (11) видно, что коэффициенты пространственной автокорреляции флюктуаций амплитуды и фазы в принятых нами приближениях совпадают по виду. Интервал корреляции, определенный по спаданию корреляционной кривой в e раз, выражается формулой $\Delta L=a(z_1+z_2)/z_1$. При $z_1=z_2$ мы получаем $\Delta L=2a$, если же $z_2 \gg z_1$, то $\Delta L \cong az_2/z_1$ и интервал корреляции флюктуаций амплитуды и фазы заметно превосходит соответствующий интервал корреляции шероховатой поверхности.

При дальнейшем увеличении q точки стационарной фазы расходятся от точек зеркального отражения в направлениях к источнику и приемнику звука. Если параметр q настолько велик, что справедливо неравенство $2q/k\psi^2\cdot z'/z_1+z_2 \gg 1$, где $z'=\min(z_1,z_2)$, то координаты точек стационарной фазы лежат в окрестности источника и приемника звука. В этом случае, решая приближенно уравнения (10), мы получаем координаты точек стационарной фазы

$$x_1=z_1\sqrt{k/2q},\; x_2=L-z_2\sqrt{k/2q},\; x_3=z_1\sqrt{k/2q},$$
$$x_4=L+\Delta L-z_2\sqrt{k/2q}.$$

При этом предполагается, что горизонтальные размеры неровностей значительно превосходят длину звуковой волны ($q/k \ll 1$). Нетрудно показать, что первые четыре члена в подынтегральной функции выражения (7) можно не учитывать, если выполнено условие $qR/k\psi^2a \gg 1$. Это неравенство означает, что области интенсивного рассеяния на неровной поверхности, лежащие в окрестности точек стационарной фазы, не перекрываются. Из выражения (7) при $A_0 = A_1 = L/\cos\psi$, мы получаем

$$K_{AA} \cong K_{\varphi\varphi} \cong \frac{k^2\overline{F_0^2}\sin^2\psi}{2} \cdot \frac{1}{2}\left[1 + e^{-(\Delta L/a)^2}\cos(q\cdot\Delta L)\right]$$

и коэффициент продольной автокорреляции флюктуаций амплитуды и фазы будет равен

$$R_{AA} \cong R_{\varphi\varphi} \cong \frac{1}{2}\left[1 + e^{-(\Delta L/a)^2}\cos(q\Delta L)\right].$$

Таким образом, когда существенные для рассеяния области лежат в окрестности излучателя и приемника, коэффициенты корреляции R_{AA} и $R_{\varphi\varphi}$ не спадают до нуля, а лишь уменьшаются в два раза при разнесении приемников на расстояние $\Delta L \sim a$. Спад коэффициентов корреляции до нуля произойдет лишь при разнесении приемников на расстояние $\Delta L \sim a\cdot L/z_1\sqrt{2q/k}$.

Для применимости метода стационарной фазы в этом случае требуется соблюдение условий $\frac{ka^2z_1^2}{x_1^3}\cdot\frac{a^2}{(\Delta L)^2} \gg 1$ и $\frac{ka^2z_2^2}{(L-x_2)^3}\cdot\frac{a^2}{(\Delta L)^2} \gg 1$.

Среднеквадратичные значения флюктуаций амплитуды и фазы определяются параметром Рэлея $\Phi = 2k\sqrt{\overline{F_2^0}}\sin\psi$ с точностью до множителя, изменяющегося в пределах от 0,35 до 0,7 (в зависимости от расположения точек стационарной фазы). Области, расположенные в окрестности точек стационарной фазы, определяют зоны интенсивного рассеяния звука неровной поверхностью. С удалением от излучателя существенные для рассеяния области смещаются в направлениях к источнику и к точке наблюдения. При достаточно большом расстоянии между излучателем и приемником местоположение этих областей целиком определяется горизонтами излучателя и приемника (z_1 и z_2) и отношением волновых чисел шероховатой поверхности и звуковой волны q/k.

Достаточным условием применимости полученных результатов может служить, по-видимому, неравенство $hF\sin\psi_0 \ll 1$, где ψ_0 — максимальный угол скольжения поверхностного луча в областях интенсивного рассеяния. В последнем рассмотренном нами случае $\sin\psi_0 \cong \sqrt{2q/k}$, и неравенство примет вид: $\sqrt{kq}\cdot F \ll 1$. Это неравенство совпадает с условием применимости метода возмущений в форме, предложенной Фейнбергом [3].

Аналогично предыдущему, можно рассмотреть случай пространственной автокорреляции флюктуаций амплитуды и фазы при разнесении приемников по вертикали на расстояние Δz. Напишем уравнения для определения координат точек стационарной фазы:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z_1}{x}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z_2}{L-x}\right)^2}} = \pm\frac{q}{k},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z_1}{x}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z_2+\Delta z}{L-x}\right)^2}} = \pm\frac{q}{k}.$$

Отсюда при выполнении условий $\frac{2q}{k\psi^2}\cdot\frac{z}{z_1+z_2} \ll 1$, $\frac{\Delta z}{z'} \ll 1$, где $z = \max(z_1, z_2)$, $z' = \min(z_1, z_2)$, получаем

$$x_{1,2} = \frac{Lz_1}{z_1+z_2} \pm \frac{q}{k}\,\frac{L}{\psi^2}\,\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2},$$

$$x_{3,4} = \frac{Lz_1}{z_1+z_2} \pm \frac{q}{k}\,\frac{L}{\psi^2}\,\frac{z_1(z_2+\Delta z)}{(z_1+z_2+\Delta z)^2}$$

и коэффициенты автокорреляции флюктуаций амплитуды и фазы по вертикали определяются выражением:

$$R_{AA} \cong R_{\varphi\varphi} \cong e^{-\frac{z_1^2(\Delta z)^2}{(z_1+z_2)^2 a^2 \psi^2}} \cdot \cos\left(\frac{q\Delta z}{\psi} \cdot \frac{z_1}{z_1+z_2}\right). \tag{12}$$

Из данной формулы видно, что при малых углах скольжения ($\psi \ll 1$) интервал корреляции по вертикали значительно меньше продольного интервала корреляции.

При выполнении условия $2q / k\psi^2 \cdot z' / z_1 + z_2 \gg 1$ мы получаем для координат точек стационарной фазы и для коэффициента автокорреляции флюктуаций амплитуды и фазы выражения:

$$x_1 = z_1 \sqrt{k / 2q}, \quad x_2 = L - z_2 \sqrt{k / 2q}, \quad x_3 = z_1 \sqrt{k / 2q},$$

$$x_4 = L - z_2 \sqrt{k / 2q} - \Delta z \sqrt{k / 2q},$$

$$R_{AA} \cong R_{\varphi\varphi} \cong \frac{1}{2} \left[1 + e^{-(\Delta z / a)^2 k / 2q} \cdot \cos \sqrt{kq / 2}\, (\Delta z)\right].$$

Поскольку мы полагаем $k / q \gg 1$, корреляция по вертикали уменьшается значительно быстрее, чем продольная корреляция.

Рассмотрим теперь случай корреляции по фронту звуковой волны в горизонтальном направлении (поперечная корреляция), характеризуя неровную поверхность функцией пространственной корреляции вида

$$\overline{F_1 F_2} = \overline{F_0^2}\; e^{-\frac{(y_1-y_2)^2}{a^2}} \cos q (y_1 - y_2).$$

Предварительно интегрируем по x_1 и x_2, считая выполненными условия $|y| \ll \sqrt{x^2 + z_1^2}, |y| \ll \sqrt{(L-x)^2 + z_2^2}$. Для определения координат точек стационарной фазы по y мы имеем уравнения:

$$\frac{y}{\sqrt{R_{10}^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{R_{20}^2 + y^2}} = \pm \frac{q}{k},$$

$$\frac{y}{\sqrt{R_{10}^2 + y^2}} + \frac{y - \Delta y}{\sqrt{R_{20}^2 + (y - \Delta y)^2}} = \pm \frac{q}{k},$$

откуда при условии $q / k \ll 1$ получаем $y_{1,2} = \pm \frac{q}{2k} R$, $y_{3,4} = \pm \frac{q}{2k} R + \Delta y \cdot \frac{z_1}{z_1 + z_2}$, где $R = 2R_{10}R_{20} / R_{10} + R_{20}$. После вычисления интегралов мы получаем окончательный результат в виде

$$K_{AA} = \frac{2k^2 \sin^2\psi \overline{F_0^2}}{1 + \frac{q^2 R^2}{4k^2 z_1 z_2}} \left[1 - \left(1 - \frac{3}{2D^2}\right) e^{-\frac{q^2R^2}{k^2a^2}} \cdot \cos\left(\frac{q^2 R}{2k}\right)\right] e^{-\left(\frac{\Delta y}{a}\right)^2 \cdot \frac{z_1^2}{(z_1+z_2)^2}} \times$$

$$\times \cos\left(q \Delta y \frac{z_1}{z_1 + z_2}\right),$$

$$K_{\varphi\varphi} = \frac{2k^2 \sin^2\psi \overline{F_0^2}}{1 + \frac{q^2 R^2}{4k^2 z_1 z_2}} \left[1 + \left(1 - \frac{3}{2D^2}\right) e^{-\frac{q^2R^2}{k^2a^2}} \cdot \cos\left(\frac{q^2 R}{2k}\right)\right] e^{-\left(\frac{\Delta y}{a}\right)^2 \cdot \frac{z_1^2}{(z_1+z_2)^2}} \times$$

$$\times \cos\left(q \Delta y \cdot \frac{z_1}{z_1 + z_2}\right)$$

и, следовательно,

$$R_{AA} = R_{\varphi\varphi} = e^{-\left(\frac{\Delta y}{a}\right)^2 \frac{z_1^2}{(z_1+z_2)^2}} \cdot \cos\left(q \Delta y \cdot \frac{z_1}{z_1+z_2}\right).$$

Интервал корреляции, определенный по спаданию в e раз огибающей коэффициента корреляции, определяется формулой $\Delta y = a \cdot \frac{z_1 + z_2}{z_1}$. В отличие от случая продольной корреляции R_{AA} и $R_{\varphi\varphi}$ стремятся к нулю при разнесении приемников на расстояние, сравнимое с интервалом корреляции неровностей (если $z_1 \sim z_2$). Пределы применимости метода стационарной фазы в рассмотренном случае поперечной корреляции ограничены условиями $ka^2/R \gg 1$ и $ka^2/Rqa \gg 1$ (если $|\Delta y| \lesssim a$), т. е. пространственный интервал корреляции шероховатой поверхности должен быть значительно больше поперечных размеров зоны Френеля.

В частном случае, когда рассеивающая область сосредоточена в окрестности точки зеркального отражения $\left(\frac{2q}{k\psi^2} \cdot \frac{z}{z_1 + z_2} \ll 1, \quad \text{где} \quad z = \max(z_1, z_2)\right)$, можно получить выражение для коэффициента пространственной автокорреляции флюктуаций амплитуды и фазы при любом расположении приемников. Это выражение будет иметь следующий вид:

$$R_{AA} = R_{\varphi\varphi} = e^{-\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{a^2}\left[\left(\Delta L - \frac{\Delta z}{\operatorname{tg}\psi}\right)^2 \cos^2\alpha + (\Delta y)^2 \sin^2\alpha + 2\left(\Delta L - \frac{\Delta z}{\operatorname{tg}\psi}\right)\Delta y \sin\alpha \cdot \cos\alpha\right]}.$$

Оно получено для функции пространственной корреляции шероховатостей вида

$$\overline{F_1 F_2} = \overline{F_0^2}\, e^{-\frac{[(x_1 - x_2)\cos\alpha + (y_1 - y_2)\sin\alpha]^2}{a^2}} \cdot \cos[q\cos\alpha \cdot (x_1 - x_2) + q \sin\alpha \cdot (y_1 - y_2)].$$

Если приемники разнесены в плоскости xz ($\Delta y = 0$) на расстояние $\Delta L = \Delta z / \operatorname{tg}\psi$, то $R = 1$, т. е. в принятых нами приближениях флюктуации амплитуды и фазы в двух точках полностью коррелированы (при этом приемники расположены вдоль зеркально отраженного луча). При $\alpha = 0$, т. е. в случае поверхности, шероховатой вдоль оси x, флюктуации полностью коррелированы в плоскости xy, а при $\alpha = \pi/2$, т. е. для поверхности, шероховатой вдоль оси y, полная корреляция наблюдается в плоскости xz.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг. Распространение радиоволн. М., ГТТИ, 1953.
2. Э. П. Гулин. О флюктуациях амплитуды и фазы звуковой волны, отраженной от статистически неровной поверхности. Акуст. ж., 1962, 8, 2, 175—182.
3. Е. Л. Фейнберг. Распространение радиоволн вдоль реальной поверхности. «Исследования по распространению радиоволн», сб. II, М., Изд-во АН СССР, 1948.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
16 января 1961 г.