АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VIII 1962 Вып. 4

К ВОПРОСУ О РАССЕЯНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. Д. Лапин

Рассмотрена плоская задача о рассеянии звуковой волны специального вида на периодически неровной поверхности, мало отличающейся от симметричной пилообразной поверхности, имеющей прямоугольные зубцы. Показано, что эта задача эквивалентна задаче об отражении нормальных волн от конца волновода, закрытого соответственным элементом неровной поверхности. Последняя задача решается путем применения метода малых возмущений и сшивания полей на границах областей, в которых собственные функции известны. Для амплитуд спектров рассеянного поля получена бесконечная система алгебраических уравнений, которая решена численно редукционным методом при некоторых соотношениях между параметрами неровной поверхности и длиной волны звука.

Как известно, рассеянное поле, возникающее при падении плоской волны на периодически неровную поверхность, представляет собой суперпозицию плоских волн («спектров»), направляющие косинусы которых определяются условием Брэгга. Следовательно, в случае периодически неровной поверхности задача о нахождении рассеянного поля состоит в определении комплексных амплитуд (амплитуд и фаз) этих спектров. Как было показано в работе [1], комплексные амплитуды спектров могут быть найдены путем численного решения бесконечной системы алгебраических уравнений, коэффициенты которых выражаются двухкратными интегралами. Однако, вследствие сложности выражений для коэффициентов уравнений этой системы, ее решение очень громоздко. Поэтому в некоторых частных случаях амплитуды рассеянных спектров удобнее искать иными методами. Например, как было показано в работе [2], для решения задачи о рассеянии плоской волны специального вида на пилообразной неровной поверхности целесообразно применить метод «сшивания» полей на границах областей, в которых собственные функции известны. Выражения для коэффициентов получающейся при этом бесконечной системы алгебраических уравнений очень просты.

В настоящей работе получено обобщение решения, изложенного в работе [2], на случай периодически неровной поверхности, мало отличающейся от пилообразной (фиг. 1).

В качестве падающего поля здесь, как и в работе [2], выберем плоскую волну

$$p_0(x, y) = \exp\left[i\left(\varkappa_r x + \xi_r y\right)\right], \tag{1}$$

где $\xi_r = r\pi/a$, $\varkappa_1 = \sqrt{k^2 - \xi_r^2}$. В соответствии с вышеизложенным, рассеянное поле p будем искать в виде суперпозиции плоских волн

$$p(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp\left[i\left(-\varkappa_n x + \xi_n y\right)\right], \tag{2}$$

где R_n — неизвестные амплитуды.

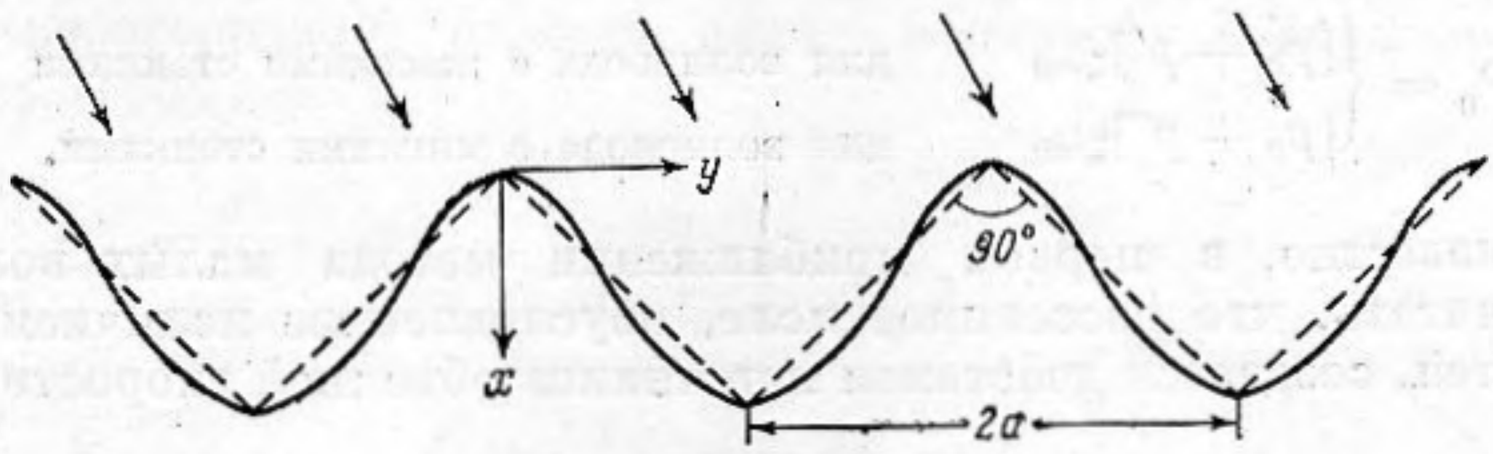
Будем считать, что неровная поверхность описывается четной функцией. Тогда задача о рассеянии на ней плоской волны (1) может быть сведена к более простой задаче об отражении нормальных волн

$$p_0'(x, y) = \exp[i\varkappa_r x]\cos(\xi_r y) \tag{3}$$

и

$$p_0''(x, y) = \exp[i\varkappa_r x]\sin(\xi_r y) \tag{4}$$

от конца волновода, закрытого соответственным элементом неровной поверхности (фиг. 2). Действительно, если поверхность описывается четной функцией, то, как следует из симметрии, рассеянное поле

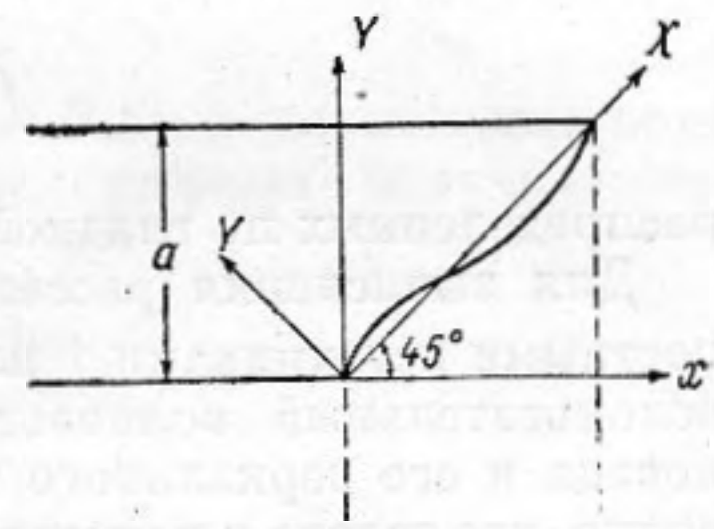


Фиг. 1

$\widetilde{p}$, соответствующее падающей волне $\widetilde{p}_0(x, y) = \exp[i(\varkappa_r x - \xi_r y)]$, будет выражаться также формулой (2) при замене в ней ξ_n на $-\xi_n$. Следовательно, рассеянные поля $p' = {}^1/_2(p + \widetilde{p})$ и $p'' = 1/2i(p - \widetilde{p})$, соответствующие падающим полям $p_0' = {}^1/_2(p_0 + \widetilde{p}_0)$ и $p_0'' = 1/2i(p_0 - \widetilde{p}_0)$, будут выражаться формулами:

$$p'(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp[-i\varkappa_n x]\cos(\xi_n y), \tag{5}$$

$$p''(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp[-i\varkappa_n x]\sin(\xi_n y), \tag{6}$$



Фиг. 2

где коэффициенты A_n и B_n связаны с амплитудами рассеянных спектров R_n соотношениями:

$$R_n = \frac{1}{2}(A_n + B_n), \qquad R_{-n} = \frac{1}{2}(A_n - B_n). \tag{7}$$

Из формулы (5) видно, что рассеянное поле p' удовлетворяет соотношению $\left(\frac{\partial p'}{\partial y}\right)_{y=\pm ma} = 0$, где m — целое число.

Таким образом, задача о рассеянии поля p_0' на симметричной периодически неровной поверхности эквивалентна задаче об отражении нормальной волны (3) от конца волновода с жесткими стенками, закрытого соответственным элементом неровной поверхности (фиг. 2). Аналогично из формулы (6) получим, что задача о рассеянии поля p_0'' на симметричной периодически неровной поверхности эквивалентна задаче об отражении нормальной волны (4) от конца волновода с податливыми стенками, закрытого тем же элементом неровной поверхности, что и в вышерассмотренном случае. Если известны амплитуды отраженных нормальных волн A_n и B_n, то искомые амплитуды рассеянных спектров можно определить по формулам (7).

Все предыдущие рассуждения справедливы для любой симметричной периодически неровной поверхности. Предположим теперь, что неровная поверхность мало отличается от пилообразной поверхности, имеющей прямоугольные зубцы. Обозначим через $\zeta(X)$ — отклонение поверхности, закрывающей волновод, от координатной плоскости $Y=0$. Будем считать, что величина ζ удовлетворяет соотношениям

$$k|\zeta| \ll 1; \qquad |d\zeta/dX| \ll 1.$$

В этом случае влияние неровностей ζ на отражение нормальных волн от закрытого конца волновода можно оценить методом малых возмущений, принимая за нулевое приближение P_0 решение, полученное в работе [2], т. е.

$$P_0 = \begin{cases} [p_0' + p']_{\zeta=0} & \text{для волновода с жесткими стенками} \\ [p_0'' + p'']_{\zeta=0} & \text{для волновода с мягкими стенками.} \end{cases}$$

Как известно, в первом приближении метода малых возмущении можно считать, что рассеянное поле, обусловленное наличием жестких неровностей, создается действием источников объемной скорости

$$f(X) = \left\{\left(\frac{\partial P_0}{\partial X}\right)_{Y=0} \frac{d\zeta}{dX} - \left(\frac{\partial^2 P_0}{\partial Y^2}\right)_{Y=0} \zeta\right\},$$

распределенных по гладкой стенке при $Y=0$. В том же приближении можно считать, что рассеянное поле, обусловленное наличием податливых неровностей, создается действием сторонних давлений

$$\widetilde{f}(X) = -\left(\frac{\partial P_0}{\partial Y}\right)_{Y=0} \zeta,$$

распределенных по гладкой стенке при $Y=0$.

Для вычисления рассеянного поля, т. е. поля, создаваемого поверхностными источниками f (или $\widetilde{f}$), применим следующий прием. Рассмотрим вспомогательный волновод, образованный сочленением исходного волновода и его зеркального отражения в плоскости $Y=0$. Из симметрии видно, что задача о нахождении рассеянного поля в волноводе эквивалентна задаче о вычислении поля, создаваемого в вспомогательном волноводе источниками объемной скорости

$$F(X,Y) = \begin{cases} 2f(X)\,\delta(Y) & \text{для волновода с жесткой перегородкой} \\ 2\widetilde{f}(X)\,\delta'(Y) & \text{для волновода с мягкой перегородкой,} \end{cases}$$

где через δ обозначена δ-функция Дирака.

Последняя задача решается методом, аналогичным изложенному в работе [2]. Выполняя соответственные вычисления, получим, что амплитуды $A_n' \equiv \{(A_n)_{\zeta\neq 0} - (A_n)_{\zeta=0}\}$ нормальных волн рассеянного поля в волноводе с жесткими стенками являются решением бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{\delta_{n,l}\theta_l a e^{-i\varkappa_l a} \pm 2\alpha_{n,l}\}}{\sin(\varkappa_n a)} A_n' + ia \sum_{m=0}^{\infty} M_{m,l}^{\pm} = 0, \tag{8}$$

где

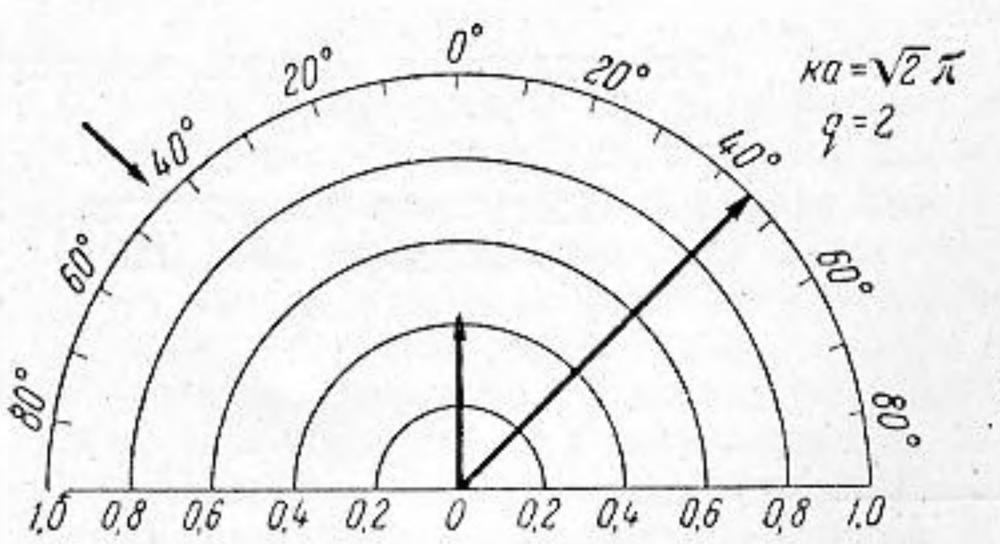
$$M_{m,l}^{+} = \frac{8\sqrt{2}}{a^2\theta_m(\varkappa_l^2 - \xi_m^2)} \int_0^a f(\sqrt{2}x)\cos(\xi_m x)\cos(\xi_l x)\,dx,$$

$$M_{m,l}^{-} = \frac{4}{a^2\theta_m(\varkappa_l^2 - \xi_m^2)} \int_0^a \widetilde{f}(\sqrt{2}x)\,\{\xi_{l+m}\sin(\xi_{l-m}x) + \xi_{l-m}\sin(\xi_{l+m}x)\}\,dx,$$

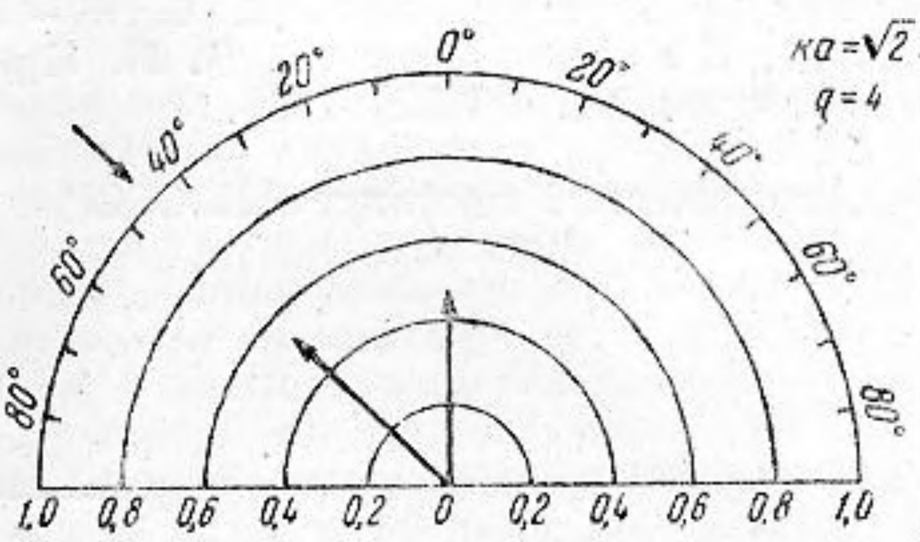
$$\alpha_{n,l} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^l \theta_l a}{2} & \text{при } \varkappa_n = \xi_l \\ \dfrac{\varkappa_n}{(\varkappa_n^2 - \xi_l^2)} \sin(\varkappa_n a) & \text{при } \varkappa_n \neq \xi_l, \end{cases}$$

$$\theta_l = \begin{cases} 2 \text{ при } l = 0 \\ 1 \text{ при } l \neq 0 \end{cases} \qquad \delta_{n,l} = \begin{cases} 1 \text{ при } n = l \\ 0 \text{ при } n \neq l. \end{cases}$$

В формуле (8) верхний знак соответствует волноводу, закрытому жесткой перегородкой; нижний знак — волноводу, закрытому податливой перегородкой.



Фиг. 3



Фиг. 4

Аналогично для амплитуд $B_n' \equiv \{(B_n)_{\zeta\neq 0} - (B_n)_{\zeta=0}\}$ нормальных волн рассеянного поля в волноводе с податливыми стенками получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{\delta_{n,l}\varkappa_l^2 a e^{-i\varkappa_l a} \pm 2\xi_n \xi_l \alpha_{n,l}\}}{\varkappa_n \sin(\varkappa_n a)} B_n' - a \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m N_{m,l}^{+} = 0, \tag{9}$$

где

$$N_{m,l}^{+} = \frac{8\sqrt{2}}{a^2(\varkappa_l^2 - \xi_m^2)} \int_0^a f(\sqrt{2}\,x) \sin(\xi_m x) \sin(\xi_l x)\, dx,$$

$$N_{m,l}^{-} = \frac{4}{a^2(\varkappa_l^2 - \xi_m^2)} \int_0^a \tilde{f}(\sqrt{2}\,x) \{\xi_{l+m} \sin(\xi_{l-m} x) - \xi_{l-m} \sin(\xi_{l+m} x)\}\, dx.$$

Выбор знаков в формуле (9) производится по тому же правилу, что и в формуле (8).

Можно показать, что система уравнений (8) и (9) удовлетворяет условию Коха [8], поэтому решение удобно искать численно редукционным методом [4]. Подставляя полученные решения A_n' и B_n' в формулу (7), получим амплитуды R_n' спектров рассеянного поля, обусловленного малым отклонением неровной поверхности от пилообразной поверхности.

Численные расчеты рассеянного поля были выполнены для частного случая $r = 1$, $ka = \sqrt{2}\pi$ и $\zeta(X) = b\cos[\xi_q X \sqrt{2}]$. В этом случае нулевое приближение P_0 имеет вид:

$$P_0(x, y) = \begin{cases} 2\cos(\xi_1 x)\cos(\xi_1 y) & \text{для волновода, имеющего жесткие стенки} \\ i2\sin(\xi_1 x)\sin(\xi_1 y) & \text{для волновода, имеющего мягкие стенки.} \end{cases}$$

Полученные в первом приближении метода малых возмущений величины $|R_n'/2(kb)|$ — приведенные амплитуды спектров рассеянного поля, обусловленного малым отклонением неровной поверхности от пилообразной поверхности, представлены в виде графиков на фиг. 3 и 4. Эти графики показывают, что при выбранной форме неровности в рассеянном поле отсутствуют некоторые спектры. Это обусловлено тем, что в направлении этих спектров взаимно компенсируется действие поверхностных источников, учитывающих влияние малых неровностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Урусовский. Дифракция звука на периодически неровной и неоднородной поверхности. Докл. АН СССР, 1960, **131**, 4, 801—804.
2. А. Д. Лапин. Об отражении нормальных волн от закрытого конца волновода. Акуст. ж., 1962, **8**, 2, 189—193.
3. Л. В. Канторович. Функциональный анализ и прикладная математика. Усп. мат. наук, 1948, **3**, 6, 89—185.
4. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М., ГТТИ, 1949.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
15 декабря 1961 г.