АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIV 1968 Вып. 2

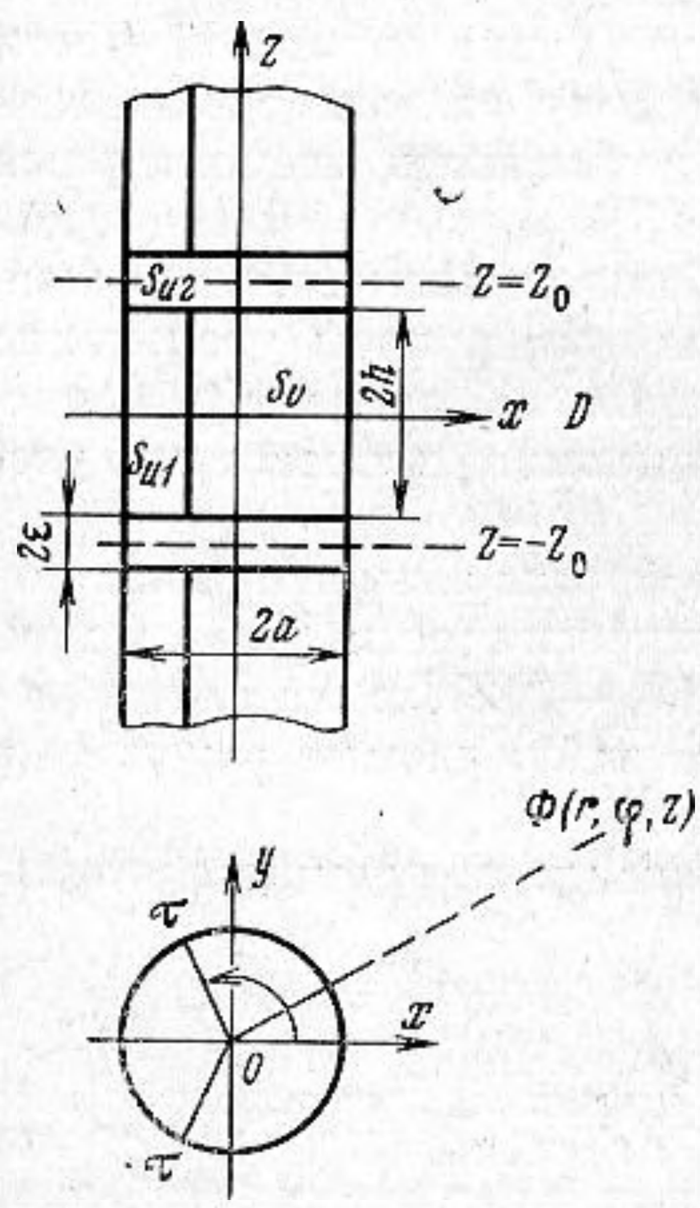
УДК 534.26

АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ЛИНЕЙНОГО РЯДА КОНЕЧНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

В. А. Андебура

Рассматривается поле конечного кругового цилиндрического излучателя со смешанными условиями на его границах. Предполагается, что излучатель находится в составе бесконечного линейного ряда таких же излучателей.

В работе [1] рассмотрено звуковое поле, создаваемое бесконечным круговым цилиндром, когда на части его поверхности задается зависящая от полярного угла радиальная скорость, а остальная поверхность предполагается акустически мягкой, т. е. на ней потенциал скорости равен нулю. Более общий случай, когда на части поверхности цилиндра задан отличный от нуля потенциал, а на остальной поверхности — радиальная скорость, рассмотрен в работе [2]. В обоих случаях рассмотрение сводилось к плоской краевой задаче.



Рассмотрим трехмерную задачу об излучении конечного цилиндрического излучателя со смешанными условиями на его границах в предположении, что излучатель находится в составе периодического бесконечного линейного ряда таких же излучателей. Для построения приближенного решения используем метод, развитый в работе [1], обобщив его на случай трехмерной задачи.

Пусть система образована цилиндрическими излучателями радиуса a, высотой $2h$, находящимися друг от друга на расстоянии 2ε (см. фигуру). Поверхность цилиндра $r = a$ разделяется окружностями $z = \pm(2mz_0 \pm h)$, $m = 0, 1, 2 \ldots$ и образующими $\varphi = \pm\tau$ на области S_{u1}, S_{u2} и S_v, определяемые условиями $\tau < |\varphi| < \pi$, $|z \mp 2mz_0| < h$ для области S_{u1}, $0 \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$, $|z \mp (2m+1)z_0| < \varepsilon$ для области S_{u2} и $|\varphi| < \tau$, $|z \mp 2mz_0| < h$ для области S_v; $z_0 = h + \varepsilon$. На указанных поверхностях задаются смешанные граничные условия:

$$\Phi(r, \varphi, z)\big|_{r=a} = \begin{cases} u_1(\varphi, z), & (\varphi, z) \in S_{u1}; \\ u_2(\varphi, z), & (\varphi, z) \in S_{u2}; \end{cases} \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi(r, \varphi, z)}{\partial r}\right|_{r=a} = v(\varphi, z), \quad (\varphi, z) \in S_v,$$

где $\Phi(r, \varphi, z)$ — амплитуда потенциала скорости. Задача заключается в нахождении решения уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0, \quad k = \omega / c \tag{2}$$

для области, внешней по отношению к излучателю, при граничных условиях (1) и при условии, что функция $\Phi \cdot \exp(-i\omega t)$ должна описывать расходящуюся волну.

Предполагается, что функции u_1, u_2 и v четны по z, достаточно гладки на соответственных поверхностях S_{u1}, S_{u2}, S_v и принимают вещественные или комплексные значения. Для упрощения дальнейших вычислений предполагаем указанные функции четными также относительно φ. Частный случай $u_1(\varphi, z) = u_2(\varphi, z) \equiv 0$ соответствует акустически мягким поверхностям S_{u1} и S_{u2}.

Вследствие симметрии системы относительно плоскостей $z_m = \pm mz_0$ звуковое поле в произвольной плоскости $z = C$ будет зеркальным отражением поля в плоскости $z = -C$; в частности, в плоскостях $z = \pm(2m + 1)z_0$ составляющая колебательной скорости частиц среды $\partial\Phi / \partial z$ должна обращаться в нуль. Таким образом, звуковое поле оказывается периодическим по z с периодом $2z_0$, а область решения задачи сводится к области D, представляющей собой слой, внешний по отношению к цилиндру радиуса a и высоты $2z_0$, причем на плоских границах этого слоя должно выполняться условие

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=\pm z_0} = 0.$$

Учитывая это, можно показать, что всякое решение уравнения (2) в области D при любых краевых условиях на поверхности (с учетом предположения относительно функций u_1, u_2 и v) и при соблюдении условий излучения может быть представлено в виде

$$\Phi(r, \varphi, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{\nu n} H_\nu(\mu_n r) \cos \nu\varphi \cdot \cos \frac{n\pi}{z} z, \tag{3}$$

где $C_{\nu n}$ — комплексные константы; $H_\nu(\mu_n, r)$ — функция Ганкеля 1-го рода порядка ν (верхний индекс $H_\nu^{(1)}$ опущен); $\mu_n{}^2 = k^2 - (n\pi / z_0)^2$.

С физической стороны волновой процесс, описываемый формулой (3), можно рассматривать как суперпозицию волн, бегущих вдоль r и стоячих по φ и z. Волны модулированы по фронту по закону $\cos \nu\varphi \cdot \cos \frac{n\pi}{z} z$. Каждой паре значений ν и n соответствует колебание излучателя моды (ν, n) и волна с фазовой скоростью $w_n = c\left(1 - \frac{n\pi c}{\omega z_0}\right)^{-1/2}$ и волновым числом $\mu_n = k\left(1 - \frac{n\pi c}{\omega z_0}\right)^{1/2}$. Важно отметить, что колебание моды (ν, n) может распространяться лишь при условии, что $\mu_n{}^2 > 0$, т. е. $k > n\pi / z_0$. Для каждого значения n существует критическая частота $\omega_n = n\pi c / z_0$, ниже которой волновой процесс не возникает.

Если $\omega < \omega_n$, то волновое число μ_n — мнимое. Физически это означает, что фаза колебаний не зависит от r. Амплитуда колебаний при этом экспоненциально уменьшается вдоль r, что нетрудно показать, воспользовавшись интегральным представлением функции Ганкеля [3]. Подобный результат хорошо известен в теории волноводов [4].

Поскольку частота $\omega = kc$ в нашей задаче задана, то очевидно, что в области D будут распространяться лишь те моды колебаний, для которых выполняется условие $n\pi c / z_0 < \omega$. В соответствии с этим условием в решении (3) должны быть оставлены лишь слагаемые, для которых n меньше или равно ближайшему целому числу, не превосходящему kz_0 / π:

$$\Phi(r, \varphi, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\bar{n}} C_{\nu n} H_\nu(\mu_n r) \cos \nu\varphi \cdot \cos \frac{n\pi}{z_0} z,$$

$$\bar{n} \leqslant \left[\frac{kz_0}{\pi} \right].$$

Будем искать приближенное решение задачи в классе полиномов порядка N

$$f_N(r, \varphi, z) = \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{n=0}^{\eta} A_{\nu n} H_\nu(\mu_n r) \cos \nu\varphi \cos \frac{n\pi}{z_0} z,$$

где

$$\eta = \begin{cases} N, & N \leqslant \bar{n}; \\ \bar{n}, & N > \bar{n}. \end{cases}$$

Эти полиномы удовлетворяют уравнению (2) и условиям излучения, но, в общем случае, могут не удовлетворять граничным условиям.

Для определения констант $A_{\nu n}$ воспользуемся вариационным методом приближенного решения смешанной задачи, развитым в работе [1]. Будем считать полином

$$f_N^*(r, \varphi, z) = \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{n=0} A_{\nu n}^* H_\nu(\mu_n r) \cos \nu\varphi \cos \frac{n\pi}{z_0} z \tag{4}$$

при фиксированном N наилучшим приближенным решением нашей краевой задачи, если среди всех полиномов порядка не выше N полином (4) минимизирует функционал

$$F\{f_N\} = k^2 \iint_{S_{u1}} |u_1(\varphi, z) - f_N(a, \varphi, z)|^2 dS +$$

$$+ k^2 \iint_{S_{u2}} |u_2(\varphi, z) - f_N(a, \varphi, z)|^2 dS + \iint_{S_v} \left| v(\varphi, z) - \left(\frac{\partial f_N}{\partial r} \right)_{r=a} \right|^2 dS. \tag{5}$$

Обозначим через

$$\alpha_{\nu n 1}(\tau, z) = \frac{\varepsilon_\mu \varepsilon_n}{\pi z_0} \int_0^h \int_\tau^\pi u_1(\varphi, z) \cos \nu\varphi \cos \frac{n\pi}{z} z \, d\varphi \, dz,$$

$$\alpha_{\nu n 2}(\tau, z) = \frac{\varepsilon_\mu \varepsilon_n}{\pi z_0} \int_h^{z_0} \int_0^\pi u_2(\varphi, z) \cos \nu\varphi \cos \frac{n\pi}{z_0} z \, d\varphi \, dz \tag{6}$$

и

$$\beta_{\nu n}(\tau, z) = \frac{\varepsilon_\mu \varepsilon_n}{\pi z_0} \int_0^h \int_0^\tau v(\varphi, z) \cos \nu\varphi \cos \frac{n\pi}{z_0} z \, d\varphi \, dz$$

коэффициенты Фурье функций u_1, u_2 и v, отличных от нуля лишь на соответственных поверхностях S_{u1}, S_{u2} и S_v; $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = 2$, $m \neq 0$. Обозначим далее

$$\gamma_{\nu n \xi q}(\tau, z) = k^2 \iint\limits_{\substack{\varphi=\tau \\ z=0}}^{\substack{z=h \\ \varphi=\pi}} (B_{\nu n} \overline{B_{\xi q}})_{r=a} \, d\varphi \, dz +$$

$$+ k^2 \iint\limits_{\substack{\varphi=0 \\ z=h}}^{z=z_0} (B_{\nu n} \overline{B_{\xi q}})_{r=a} \, d\varphi \, dz + \iint\limits_{\substack{\varphi=0 \\ z=0}}^{z=h} \left(\frac{\partial B_{\nu n}}{\partial r} \cdot \frac{\overline{\partial B_{\xi q}}}{\partial r} \right)_{r=a} d\varphi \, dz, \tag{7}$$

где $$B_{\nu n}(r,\varphi,z)=H_\nu(\mu_n r)\cos\nu\varphi\cos\frac{n\pi}{z_0}z.$$

Очевидно, $\gamma_{\nu n\xi q}(\tau,z)=\overline{\gamma_{\xi q\nu n}}(\tau,z)$ (черта сверху обозначает комплексно-сопряженную величину).

Воспользовавшись обозначениями (6), (7), функционал (5) можно привести к следующему виду:

$$F\{f_N\}=k^2\int\limits_{\substack{\varphi=\tau\\ z=0}}^{\substack{z=h\\ \varphi=\pi}}\int|u_1(\varphi,z)|^2\,d\varphi\,dz-\pi z_0k^2\sum_{\nu=0}^{N}\sum_{n=0}^{\eta}\overline{\frac{\alpha_{\nu n1}(\tau,z)}{\varepsilon_\nu\varepsilon_n}}A_{\nu n}H_\nu(\mu_n a)-$$

$$-\pi z_0k^2\sum_{\xi=0}^{N}\sum_{q=0}^{\eta}\frac{\alpha_{\xi q1}(\tau,z)}{\varepsilon_\xi\varepsilon_q}\overline{A_{\xi q}H_\xi(\mu_q a)}+k^2\int\limits_{\substack{\varphi=0\\ z=h}}^{\substack{z=z_0\\ \varphi=\pi}}\int|u_2(\varphi,z)|^2\,d\varphi\,dz-$$

$$-\frac{\pi z_0k^2}{4}\sum_{\nu=0}^{N}\sum_{n=0}^{\eta}\overline{\frac{\alpha_{\nu n_2}(\tau,z)}{\varepsilon_\nu\varepsilon_n}}A_{\nu n}H_\nu(\mu_n a)-$$

$$-\pi z_0k^2\sum_{\xi=0}^{N}\sum_{q=0}^{\eta}\frac{\alpha_{\xi q2}(\tau,z)}{\varepsilon_\xi\varepsilon_q}\overline{A_{\xi q}H_\xi(\mu_q a)}+$$

$$+\int\limits_{\substack{\varphi=0\\ z=0}}^{\substack{z=h\\ \varphi=\tau}}\int|v(\varphi,z)|^2\,d\varphi\,dz-\pi z_0\sum_{\nu=0}^{N}\sum_{n=0}^{\eta}\overline{\frac{\beta_{\nu n}(\tau,z)}{\varepsilon_\nu\varepsilon_n}}A_{\nu n}\mu_nH_\nu'(\mu_n a)-$$

$$-\pi z_0\sum_{\xi=0}^{N}\sum_{q=0}^{\eta}\frac{\beta_{\xi q}(\tau,z)}{\varepsilon_\xi\varepsilon_q}\mu_q\overline{A_{\xi q}H_\xi'(\mu_q a)}+\sum_{\nu=0}^{N}\sum_{n=0}^{\eta}\sum_{\xi=0}^{N}\sum_{q=0}^{\eta}\gamma_{\nu n\xi q}A_{\nu n}A_{\xi q}.$$

Отыскивая обычным образом стационарные точки функционала $F\{f_N\}$, приходим к системе уравнений относительно неизвестных $A_{\nu n}$:

$$\sum_{\nu=0}^{N}\sum_{n=0}^{\eta}\gamma_{\nu njm}A_{\nu n}=\frac{\pi z_0}{\varepsilon_j\varepsilon_m}\{k^2[\alpha_{jm1}(\tau,z)+\alpha_{jm2}(\tau,z)]\overline{H_j(\mu_m a)}+$$

$$+\mu_m\beta_{jm}(\tau,z)\overline{H_j'(\mu_m a)}\},\tag{8}$$

$$j=0,1,2,\ldots,N;\quad m=0,1,2,\ldots,\eta.$$

Коэффициенты $\gamma_{\nu njm}$ вычисляются согласно формуле (7) и имеют вид

$$\gamma_{\nu njm}=P_{\nu njm}+Q_{\nu njm}+R_{\nu njm};$$

$$P_{0000}=k^2h(\pi-\tau)|H_0(\mu_0 a)|^2;\quad Q_{0000}=k^2\varepsilon\pi|H_0(\mu_0 a)|^2;$$

$$R_{0000}=\mu_0^2h\tau|H_0'(\mu_0 a)|^2;$$

при $\nu, n\neq 0$:

$$P_{\nu n\nu n}=\frac{k^2}{4}|H_\nu(\mu_n a)|^2\left(\pi-\tau-\frac{\sin 2\nu\tau}{2\nu}\right)\left(h+\frac{\sin\frac{2n\pi h}{z_0}}{\frac{2n\pi}{z_0}}\right);$$

$$Q_{\nu n \nu n} = \frac{\pi k^2}{4} |H_\nu(\mu_n a)|^2 \left(\varepsilon - \frac{\sin \frac{2n\pi h}{z_0}}{\frac{2n\pi}{z_0}} \right);$$

$$R_{\nu n \nu n} = \frac{\mu_n^2}{4} |H_\nu'(\mu_n a)|^2 \left(\tau + \frac{\sin 2\nu\tau}{2\nu} \right) \left(h + \frac{\sin \frac{2n\pi h}{z_0}}{\frac{2n\pi}{z_0}} \right);$$

при $\nu \neq 0$:

$$P_{\nu 0 \nu 0} = \frac{k^2 h}{2} |H_\nu(\mu_0 a)|^2 \left(\pi - \tau - \frac{\sin 2\nu\tau}{2\nu} \right);$$

$$Q_{\nu 0 \nu 0} = \frac{k^2 \varepsilon \pi}{2} |H_\nu(\mu_0 a)|^2;$$

$$R_{\nu 0 \nu 0} = \frac{\mu_0^2 h}{2} |H_\nu'(\mu_0 a)|^2 \left(\tau + \frac{\sin 2\nu\tau}{2\nu} \right);$$

при $n \neq 0$:

$$P_{0n0n} = \frac{k^2(\pi - \tau)}{2} |H_0(\mu_n a)|^2 \left(h + \frac{\sin \frac{2n\pi h}{z_0}}{\frac{2n\pi}{z_0}} \right);$$

$$Q_{0n0n} = \frac{\pi k^2}{2} |H_0(\mu_n a)|^2 \left(\varepsilon - \frac{\sin \frac{2n\pi h}{z_0}}{\frac{2n\pi}{z_0}} \right);$$

$$R_{0n0n} = \frac{\mu_n^2 \tau}{2} |H_0'(\mu_n a)|^2 \left(h + \frac{\sin \frac{2n\pi h}{z_0}}{\frac{2n\pi}{z_0}} \right) \text{ и т. д.}$$

Наконец, при $\nu, n, j, m \neq 0$, $\nu \neq j$ и $n \neq m$:

$$P_{\nu n j m} = -\frac{k^2}{4} H_\nu(\mu_n a) \overline{H_j(\mu_m a)} \left[\frac{\sin(\nu + j)\tau}{\nu + j} + \frac{\sin(\nu - j)\tau}{\nu - j} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{\sin \frac{(n+m)\pi h}{z_0}}{\frac{(n+m)\pi}{z_0}} + \frac{\sin \frac{(n-m)\pi h}{z_0}}{\frac{(n-m)\pi}{z_0}} \right];$$

$$Q_{\nu n j m} = 0;$$

$$R_{\nu n j m} = \frac{\mu_n \mu_m}{4} H_\nu'(\mu_n a) \overline{H_j'(\mu_m a)} \left[\frac{\sin(\nu + j)\tau}{\nu + j} + \frac{\sin(\nu - j)\tau}{\nu - j} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{\sin \frac{(n+m)\pi h}{z_0}}{\frac{(n+m)\pi}{z_0}} + \frac{\sin \frac{(n-m)\pi h}{z_0}}{\frac{(n-m)\pi}{z_0}} \right].$$

Нетрудно показать, подобно тому, как сделано в работе [1], что система (8) имеет единственное решение — совокупность чисел $A_{\nu n}^* \begin{pmatrix}\nu = 0,1,2,\ldots,N\\ n = 0,1,2,\ldots,\eta\end{pmatrix}$. При этом выражение (4) дает наилучшее приближенное решение нашей задачи в ранее определенном смысле с ошибкой, равной $F(f_N^*)$.

Отметим некоторые частные случаи. Если $\varepsilon \to 0$ $(h \to z_0)$, что соответствует бесконечному цилиндрическому излучателю с периодическим распределением колебаний вдоль оси z, то в системе (8) исчезают коэффициенты α_{jm2}. Если же, кроме того, $u(\varphi, z) \equiv u(\varphi)$ и $v(\varphi, z) \equiv v(\varphi)$, то мы приходим к плоской задаче об излучении бесконечного цилиндра при смешанных граничных условиях на его поверхности [1, 2]. При этом частные случаи $\tau = \pi$ и $\tau = 0$ соответствуют классическим задачам Неймана и Дирихле [5, 6].

Автор приносит благодарность М. И. Карновскому и В. Г. Лозовику за внимание к настоящей работе и ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Карновский, В. Г. Лозовик. Акустическое поле бесконечного кругового цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности. Акуст. ж., 1964, 10, 3, 313—317.
2. И. Л. Обозненко. О скалярном поле цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности. Вестн. Киевск. политехн. ин-та, сер. радиоэлектроники, 1965, 2, 59—64.
3. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, часть 1. М., ИЛ, 1949.
4. С. Н. Ржевкин. Курс лекций по теории звука. М., Изд-во МГУ, 1960.
5. Ф. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. 2. М., ИЛ, 1960.
6. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., Физматгиз, 1962.

Киев

Поступила в редакцию
2 октября 1966 г.