

УДК 534.26

**ОБ ИМПЕДАНЦЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ПОЛОСЫ,
СОВЕРШАЮЩЕЙ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ,
В БЕСКОНЕЧНОМ ЭКРАНЕ***Ф. Г. Бланк*

Рассматривается комплексный импеданс излучения полосы, совершающей изгибные колебания в бесконечном экране. Получены приближенные выражения для действительной и мнимой составляющих импеданса при различных граничных условиях на краях полосы, в том случае, когда волновые размеры ее велики. Приводятся результаты численных расчетов зависимостей импедансов излучения при различных граничных условиях от соотношения волновых чисел в полосе и в окружающей среде. Проводится сопоставление импедансов бесконечной и ограниченной полос.

При исследовании звукового поля вблизи колеблющихся тел обычно возникает вопрос об импедансе излучения этих тел. В работах [1, 2] рассмотрен импеданс излучения изгибных колебаний ограниченной пластины, однако авторы рассматривали лишь его действительную часть. В работе [2] подробно исследован лишь один случай граничных условий на краях пластины; в работе [1] проведено приближенное рассмотрение трех типов граничных условий, однако характер приближений остался неочевидным.

Ниже исследуется комплексный импеданс излучения изгибных колебаний полосы при различных условиях закрепления ее краев. Задача ставится следующим образом. Тонкая упругая прямоугольная пластина с размером $a \times b \times h$, закрепленная в бесконечном акустически жестком экране, совершает изгибные колебания. Будем считать, что края пластины $y = 0$ и $x = a$ одинаково связаны с экраном и вдоль оси x на пластине задано некоторое распределение колебательной скорости изгибных колебаний. Ограничимся для простоты двумерным случаем и положим $b = 1$; ось z направим по нормали к пластине.

Пусть распределение скорости вдоль x совпадает с одной из форм свободных колебаний полосы с волновым числом k_m , где m — номер соответственной формы колебаний.

При такой постановке задачи акустический импеданс характеризует взаимодействие определенной формы колебаний пластины и окружающей среды. В практических задачах в пластине одновременно возбуждается много форм колебаний; при этом, если пластина велика по сравнению с длиной волны в среде, то взаимодействием между различными формами колебаний не слишком малых номеров m можно пренебречь [3, 4]. В рамках этого приближения импеданс пластины при сложных колебаниях может быть получен простым суммированием импедансов для форм различных номеров.

Импеданс пластины, когда на ней существует некоторое распределение колебательной скорости, однозначно определяется кажущейся мощностью [5]

$$N = \int_S u^* p dS, \quad (1)$$

где u^* — колебательная скорость (* — знак комплексного сопряжения), p — звуковое давление на поверхности пластины (если учитывать излучение в обе стороны, то в выражении (1) появится коэффициент 2), dS — элемент поверхности пластины (множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен). Звуковое давление, согласно формуле Грина [6], можно представить в виде

$$p = i \int_0^a \frac{\partial p}{\partial z} H_0^{(1)}(k|x-x'|) dx', \quad (2)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка при $z = z' = 0$. Здесь всюду штрихованные координаты относятся к точке источника, нештрихованные — к точке наблюдения. В силу непрерывности колебательных скоростей в среде и в пластине мы имеем

$$\frac{\partial p}{\partial z} = ik\rho c u, \quad (3)$$

где k — волновое число в среде, ρ и c — соответственно плотность среды и скорость звука в ней.

Отсюда

$$N = ik\rho c \int_0^a \int_0^a u(x) u^*(x') H_0^{(1)}(k|x-x'|) dx dx' \quad (4)$$

и для импеданса получаем

$$Z = \frac{N}{V_0^2} = \frac{ik\rho c}{V_0^2} \int_0^a \int_0^a u(x) u^*(x') H_0^{(1)}(k|x-x'|) dx dx', \quad (5)$$

где V_0^2 можно определить как среднее по пластине значение квадрата модуля колебательной скорости

$$V_0^2 = \frac{1}{a} \int_0^a |u(x)|^2 dx. \quad (6)$$

Такое определение представляется целесообразным, поскольку при этом формы колебаний, описывающие распределение скорости по пластине, оказываются нормированными. Воспользуемся для $H_0^{(1)}$ представлением Зоммерфельда:

$$H_0^{(1)}(k|x-x'|) = -\frac{i}{\pi} \int_{h+i\infty}^{(h+)} e^{i|x-x'|\gamma} (\gamma^2 - k^2)^{-1/2} d\gamma. \quad (7)$$

Контур интегрирования проходит по берегам разреза, исключая точку $\gamma = k$. Таким образом,

$$Z = \frac{ik\rho c}{\pi V_0^2} \int_{h+i\infty}^{(h+)} \int_0^a \int_0^a u^*(x') u(x) e^{i|x-x'|\gamma} (\gamma^2 - k^2)^{-1/2} dx dx' d\gamma. \quad (8)$$

Разлагая подынтегральную функцию на действительную и мнимую части, можно перейти от интегрирования в комплексной плоскости к интегралам по действительному переменному. В результате получим

$$Z = -\frac{2k\rho c}{\pi V_0^2} \left[\int_0^h \int_0^a \int_0^a u^*(x') u(x) \cos[\gamma(x-x')] (k^2 - \gamma^2)^{-1/2} d\gamma - \right. \\ \left. - i \int_h^\infty \int_0^a \int_0^a u^*(x') u(x) \cos[\gamma(x-x')] (\gamma^2 - k^2)^{-1/2} d\gamma \right] dx dx', \quad (9)$$

где γ следует уже понимать как действительное переменное. Очевидно в квадратных скобках формулы (9) стоит алгебраическая сумма действительной и мнимой составляющих импеданца. Подставляя в выражение (9) вместо $u(x)$ распределение колебаний вдоль пластины, отвечающее тем или иным граничным условиям, и проводя интегрирование, получим в каждом случае соответственное значение акустического импеданца. Всюду в дальнейшем будем полагать $k > 0$ и $k_m > 0$.

Рассмотрим сначала простейшие условия закрепления, причем более подробно остановимся на шарнирном варианте, так как видоизменение граничных условий не вносит в характер вычислений принципиальных особенностей. Граничные условия в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u = 0 \Big|_{x=0}^{x=a}. \quad (10)$$

Им отвечают формы колебаний

$$u(x) = u_0 \sin k_m x, \quad (11)$$

где $k_m = m\pi/a$. В дальнейшем будем полагать $u_0 = 1$. Подставим выражение (11) в формулу (9) и, интегрируя по пластине, получим

$$Z_{ш} = -\frac{8k\rho c k_m^2}{\pi} \left[\int_0^h \frac{1 + (-1)^{m+1} \cos \gamma a}{(k^2 - \gamma^2)^{1/2} (k_m^2 - \gamma^2)^2} d\gamma - \right. \\ \left. - i \int_h^\infty \frac{1 + (-1)^{m+1} \cos \gamma a}{(\gamma^2 - k^2)^{1/2} (k_m^2 - \gamma^2)^2} d\gamma \right]. \quad (12)$$

Индекс ш соответствует типу условий закрепления (в данном случае — шарнирное опирание).

Рассмотрим сначала первое слагаемое в квадратной скобке, причем произведем подстановку $\gamma = k \cos \theta$

$$R = -\int_0^{\pi/2} \frac{1 + (-1)^{m+1} \cos(ka \cos \theta)}{(k_m^2 - k^2 \cos^2 \theta)^2} d\theta. \quad (13)$$

Сначала ограничимся случаем $k = k_m$, а в дальнейшем докажем сходимость интегралов при $k \neq k_m$. Заметим, что в этом выражении подынтегральная функция не имеет особых точек в промежутке интегрирования. Формально можно написать

$$R = \frac{1}{2k_m^2} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(k_m \lambda)^2 - k^2 \cos^2 \theta} + \right. \\ \left. + (-1)^{m+1} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(ka \cos \theta)}{\lambda^2 k_m^2 - k^2 \cos^2 \theta} d\theta \right], \quad (14)$$

где $\lambda > 0$ — безразмерный параметр. При $\lambda k_m < k$ оба рассматриваемых интеграла существуют в смысле главного значения. Действительно имеет место следующий признак существования главного значения несобственных интегралов: если функция $f(x)$ обращается в нуль в одной точке B промежутка (a, b) , причем существует $f'(B) \neq 0$ и $f''(B)$, то $\int_a^b dx/f(x)$ расходится, но существует в смысле главного значения [7]. Очевидно,

$$R_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta / (\lambda^2 k_m^2 - k^2 \cos^2 \theta)^{-1} \text{ отвечает этому признаку. Очевидно так-}$$

же, что для $R_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(ka \cos \theta)}{\lambda^2 k_m^2 - k^2 \cos^2 \theta} d\theta$ всюду в промежутке интегрирова-

ния имеет место неравенство $R_1 \leq |R_0|$, следовательно R_1 существует в смысле главного значения, и R_1 существует в этом же смысле как предел ограниченной последовательности.

Представим выражение для R_1 в виде

$$R_1 = \lim_{\beta \rightarrow 1} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(ka\beta \cos \theta)}{\lambda^2 k_m^2 - k^2 \cos^2 \theta} d\theta = \lim_{\beta \rightarrow 1} R_{1\beta}, \quad (15)$$

где β — безразмерный параметр. Дифференцируя подынтегральную функцию дважды по β , получим для $R_{1\beta}$ дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$R_{1\beta}'' + a^2 \lambda^2 k_m^2 R_{1\beta} = \frac{\pi a^2}{2} J_0(ka\beta), \quad (16)$$

где $J_0(ka\beta)$ — функция Бесселя нулевого порядка. В качестве граничных условий используем значение интеграла $R_{1\beta}$ и его первой производной при $\beta = 0$

$$R_{1\beta}|_{\beta=0} = R_0; \quad R_{1\beta}'|_{\beta=0} = 0. \quad (17)$$

Общее решение уравнения (16) имеет вид

$$R_{1\beta} = A e^{-ia\lambda k_m \beta} + B e^{ia\lambda k_m \beta} + \frac{\pi a}{2 k_m \lambda} \int_0^{\beta} J_0(kay) \sin[\lambda k_m a(\beta - y)] dy \quad (18)$$

Определяя из граничных условий постоянные A и B и подставляя результат в формулу (14), получим

$$R = \frac{(-1)^{m+1} \pi a}{4 k_m^3} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{\lambda} \int_0^1 J_0(kay) \sin[\lambda k_m a(1 - y)] dy. \quad (19)$$

Таким образом, вычисление интеграла (13) свелось к вычислению другого интеграла:

$$\int_0^1 J_0(kay) \sin[\lambda k_m a(1 - y)] dy = \int_0^{\infty} J_0(kay) \sin[\lambda k_m a(1 - y)] dy - \int_1^{\infty} J_0(kay) \sin[\lambda k_m a(1 - y)] dy. \quad (20)$$

Первый интеграл в правой части формулы (20) — табличный. Второй же может быть приближенно вычислен, если пластина велика по сравнению с длиной волны в среде.

При этом, ограничиваясь первым членом асимптотического ряда для функции Бесселя, получим

$$R = -\frac{\pi a}{4k_m^3} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{k_m}{\sqrt{k^2 - k_m^2}} & (k_m < k) \\ \frac{2k_m^2 - k^2}{a(k_m^2 - k^2)^{3/2}} & (k_m > k) \end{array} + \frac{1}{\sqrt{2ka}} \Phi_R(u_1, u_2) \right\}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_R(u_1, u_2) = & \left\{ \frac{C(u_1) - S(u_1)}{u_1} \left(1 - \frac{k_m a}{2u_1^2}\right) + \right. \\ & \left. \frac{S(u_1) + C(u_1) - 1}{u_1} \left(1 + \frac{k_m a}{2u_1^2}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{S(u_2) - C(u_2)}{u_2} \left(1 + \frac{k_m a}{2u_2^2}\right) - k_m a \left[\frac{1 - C(u_1) - S(u_1)}{u_1} + \frac{1 - C(u_2) - S(u_2)}{u_2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{S(u_2) - C(u_2)}{u_2} \left(1 + \frac{k_m a}{2u_2^2}\right) - k_m a \left[\frac{S(u_1) - C(u_1)}{u_1} + \frac{1 - C(u_2) - S(u_2)}{u_2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{(-1)^m \cdot 2}{\sqrt{2\pi}} [\cos ka - \sin ka] \frac{k_m k}{k^2 - k_m^2} \right\}_{\substack{k > k_m \\ k < k_m}}, \end{aligned}$$

$S(u_1)$ и $C(u_1)$ — интегралы Френеля

$$u_1 = \begin{cases} (ka - k_m a)^{1/2} & (k > k_m), \\ (k_m a - ka)^{1/2} & (k < k_m), \end{cases}$$

$$u_2 = (k_m a + ka)^{1/2}.$$

Совершенно аналогичные выкладки для второго интеграла в правой части выражения (12), после подстановки $\gamma = k \operatorname{ch} \theta$ и проведения соответствующих вычислений, приводят к выражению

$$i = \frac{(-1)^{m+1} \pi a}{4k_m^3} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{\lambda} \int_0^1 N_0(kay) \sin[\lambda k_m a(1-y)] dy. \quad (22)$$

Используя при $ka \gg 1$ первый член асимптотического разложения функции Неймана, получим окончательно

$$\begin{aligned} i = -\frac{\pi a}{4k_m^3} & \left\{ \frac{-2(2k_m^2 - k^2)}{\pi a(k^2 - k_m^2)^{3/2}} \arcsin \frac{k_m}{k} \right. \\ & \left. + \frac{2(2k_m^2 - k^2)}{\pi a(k_m^2 - k^2)^{3/2}} \ln \left[\frac{k_m}{k} - \sqrt{\frac{k_m^2}{k^2} - 1} \right] - \frac{k_m}{\sqrt{k_m^2 - k^2}} \right. \\ & \left. + \frac{2k_m}{\pi a(k_m^2 - k^2)} + \frac{1}{\sqrt{2ka}} \Phi_i(u_1, u_2) \right\}_{\substack{(k > k_m) \\ (k < k_m)}}, \quad (23) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_i(u_1, u_2) = \left\{ \frac{1 - S(u_1) - C(u_1)}{u_1} \left(1 + \frac{k_m a}{2u_1^2}\right) - \right.$$

$$\left. \frac{S(u_1) - C(u_1)}{u_1} \left(1 - \frac{k_m a}{2u_1^2}\right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1 - S(u_2) - C(u_2)}{u_2} \left(1 - \frac{k_m a}{2u_2^2}\right) - k_m a \left[\frac{C(u_1) - S(u_1)}{u_1} + \frac{C(u_2) - S(u_2)}{u_2} \right] - \\
& - \frac{1 - S(u_2) - C(u_2)}{u_2} \left(1 - \frac{k_m a}{2u_2^2}\right) - k_m a \left[\frac{S(u_1) + C(u_1) - 1}{u_1} + \frac{C(u_2) - S(u_2)}{u_2} \right] + \\
& - \frac{(-1)^m k_m a}{2u_1^2} (\cos ka + \sin ka) - \frac{(-1)^m k_m a}{2u_2^2} (\cos ka + \sin ka) \left. \begin{array}{l} (k > k_m) \\ (k < k_m) \end{array} \right\} \\
& + \frac{(-1)^m k_m a}{2u_1^2} (\cos ka - \sin ka)
\end{aligned}$$

Очевидно, $\lim_{ka \rightarrow \infty} \Phi_R = \lim_{ka \rightarrow \infty} \Phi_i = 0$, поэтому для больших пластин можно ограничиться приближенным выражением для импеданца, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned}
Z_{III} \simeq \frac{k}{k_m} 2\rho c a \left\{ \left[\frac{k_m (k^2 - k_m^2)^{-1/2}}{(2k_m^2 - k^2)(k_m^2 - k^2)^{-3/2} a} \right] - \right. \\
- i \left[\frac{-2(2k_m^2 - k^2)}{\pi a (k^2 - k_m^2)^{3/2}} \cdot \arcsin \frac{k_m}{k} \right. \\
\left. \frac{2(2k_m^2 - k^2)}{\pi a (k_m^2 - k^2)^{3/2}} \ln \left[\frac{k_m}{k} - \left(\frac{k_m^2}{k^2} - 1 \right)^{1/2} \right] - \frac{k_m}{(k_m^2 - k^2)^{1/2}} \right. \\
\left. \left. + \frac{2k_m}{\pi a (k_m^2 - k^2)} \right] \right\} \left. \begin{array}{l} (k > k_m) \\ (k < k_m) \end{array} \right\} \quad (24)
\end{aligned}$$

Приведем результаты аналогичных вычислений для некоторых других типов краевых условий. Если

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0, \quad (25)$$

то формы колебаний имеют вид

$$u = \cos k_m x, \quad (26)$$

т. е. на краях пластины располагаются пучности колебательной скорости. При этом импеданц Z_{0n} выражается так:

$$\begin{aligned}
Z_{0n} \simeq \frac{k 2\rho c a}{k_m} \left\{ \frac{k_m}{\sqrt{k^2 - k_m^2}} - \frac{k^2}{a (k_m^2 - k^2)^{3/2}} \right. \\
- i \left[\frac{-2k^2}{\pi a (k^2 - k_m^2)^{3/2}} \cdot \arcsin \frac{k_m}{k} - \frac{2k_m}{\pi a (k^2 - k_m^2)} \right. \\
\left. \frac{2k^2 \ln \left[\frac{k_m}{k} - \left(\frac{k_m^2}{k^2} - 1 \right)^{1/2} \right]}{\pi a (k_m^2 - k^2)^{3/2}} - \frac{k_m}{\sqrt{k_m^2 - k^2}} + \frac{2k_m}{\pi a (k_m^2 - k^2)} \right] \right\} \left. \begin{array}{l} (k > k_m) \\ (k < k_m) \end{array} \right\} \quad (27)
\end{aligned}$$

Заметим, что выражения для действительной составляющей импеданца в формулах (24) и (27) совпадают с полученными в работе [1].

В более общем виде волновые процессы у краев пластины, совершающей изгибные колебания, можно представить в виде суперпозиции падающей и отраженной изгибных волн и отраженной неоднородной волны

(см. работу [8])

$$u(x) = [e^{ik_m x} + R e^{-ik_m x} + R' e^{-k_m x}], \quad (28)$$

где R и R' — соответственно коэффициенты отражения бегущей и неоднородной изгибных волн. В такой записи конкретные граничные условия входят лишь в R и R' , поэтому, подставляя формулу (28) в (9) и проводя интегрирование по пластине, можно получить в интегральной форме общее выражение для импеданца при произвольных граничных условиях.

В частности, для случаев заземленных и свободных краев пластины формы колебаний имеют вид

$$u(x) = \frac{2}{1+i} (\cos k_m x - \sin k_m x \mp e^{-k_m x}), \quad (29)$$

причем знак минус соответствует заземленным краям. При этом волновое число k_m может быть определено из граничных условий. Однако, если рассматривать не слишком низкие формы колебаний $k_m a \gg 1$, то для волнового числа можно воспользоваться асимптотической оценкой Куранта — Вейля [9]:

$$k_m a = m\pi + 0(1). \quad (30)$$

Таким образом, для форм колебаний достаточно высоких номеров импеданцы заземленной по краям и свободной пластин можно представить в виде

$$Z \simeq \frac{2k_0 c}{\pi k_m \sqrt{k_m^2 + k^2}} \left[\pi + i \operatorname{arcth} \left(1 + \frac{k^2}{k_m^2} \right)^{1/2} \right] + \frac{Z_{\text{ш}} + Z_{0n}}{2} \mp \frac{Z_{0n} - Z_{\text{ш}}}{2}. \quad (31)$$

При выводе формулы (31) мы пренебрегли членами вида $2e^{-k_m a} \cos \gamma a$ и $e^{-2k_m a}$ по сравнению с единицей.

Остановимся теперь на поведении комплексного импеданца излучения ограниченной пластины на пространственно-частотных резонансах $k = k_m$. Можно показать, что в отличие от бесконечной пластины импеданс ограниченной пластины остается при этом конечным независимо от условий закрепления. Для доказательства исследуем на сходимость соответствующие интегралы.

Известно [7], что существует следующий признак сходимости интегралов от разрывных функций: если подынтегральная функция $f(x)$ положительна во всем промежутке интегрирования (a, b) , то интеграл от $f(x)$ сходится, если существует такое число $\alpha < 1$, что при x достаточно близких к точке разрыва b $f(x) (b-x)^\alpha < \infty$.

В рассмотренных нами случаях интегралы отвечают этому признаку. В частности, для шарнирно-опертой пластины

$$\int_0^k \frac{1 + (-1)^{m+1} \cos \gamma a}{(k^2 - \gamma^2)^{5/2}} d\gamma,$$

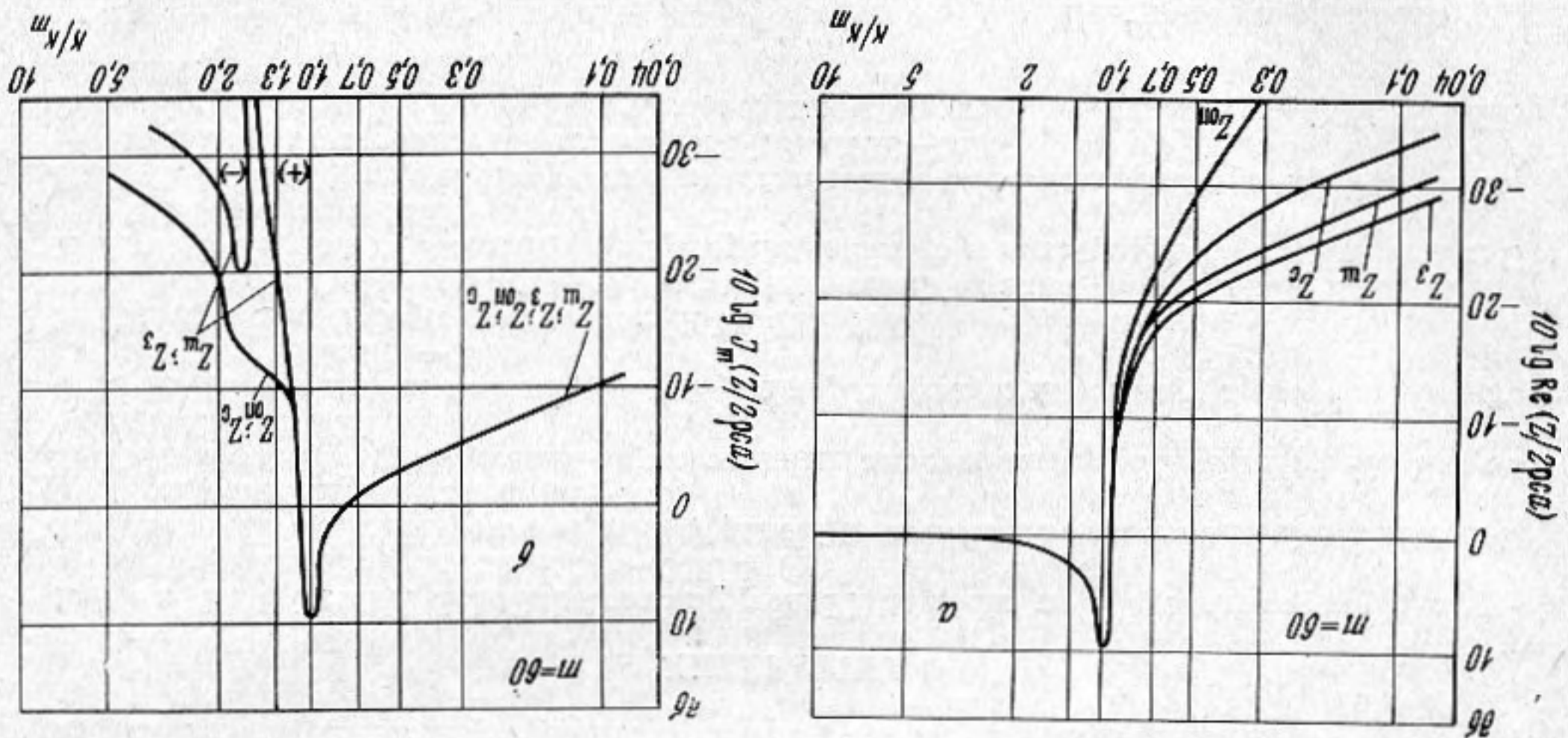
$$\lim_{\gamma \rightarrow k} \frac{1 + (-1)^{m+1} \cos \gamma a}{(k + \gamma)^{5/2} (k - \gamma)^{5/2 - \alpha}} = \frac{(-1)^m a^2}{2(2k)^{5/2}} < \infty$$

при $\alpha = \frac{1}{2} < 1,$

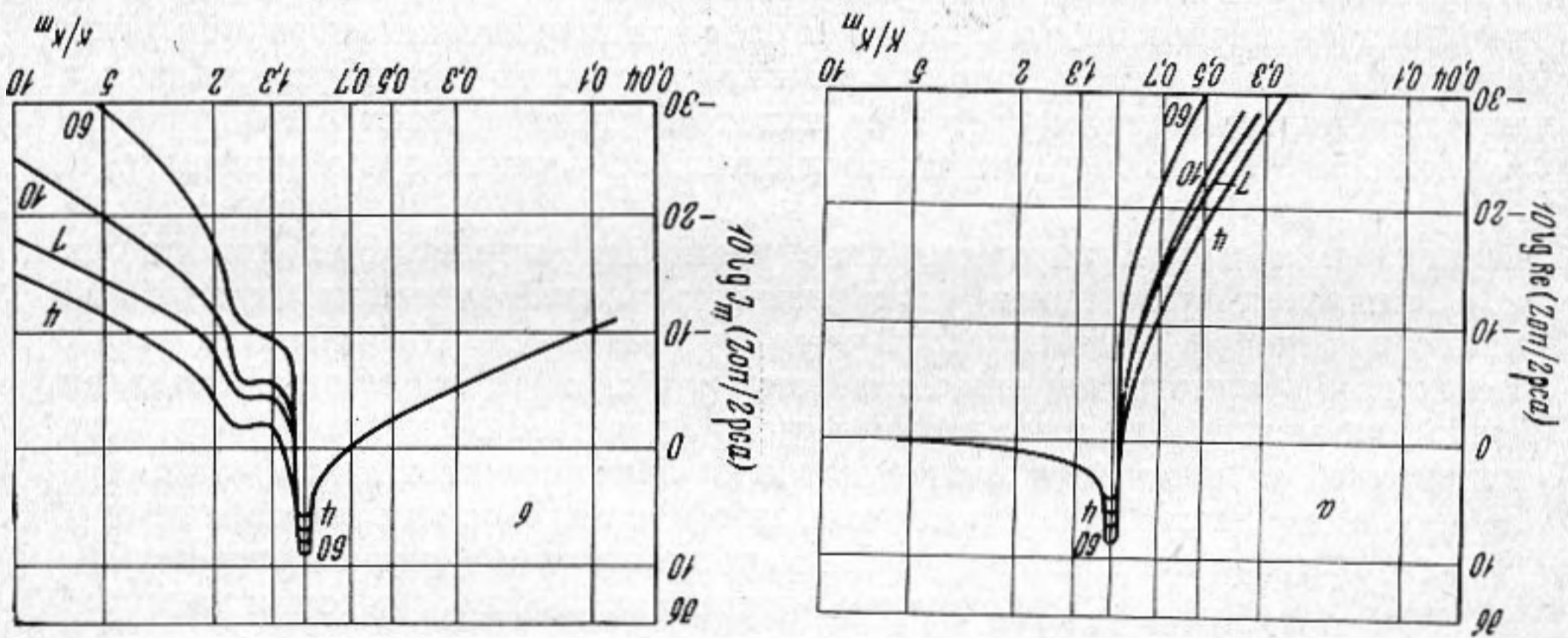
т. е. исследуемый интеграл сходится.

На фиг. 1 и 2 приведены кривые, полученные в результате расчета по формулам (24) и (27) для форм различных номеров $m = 4; 7; 10; 60$. На фиг. 3 представлены графики импеданцев для формы колебаний $m =$

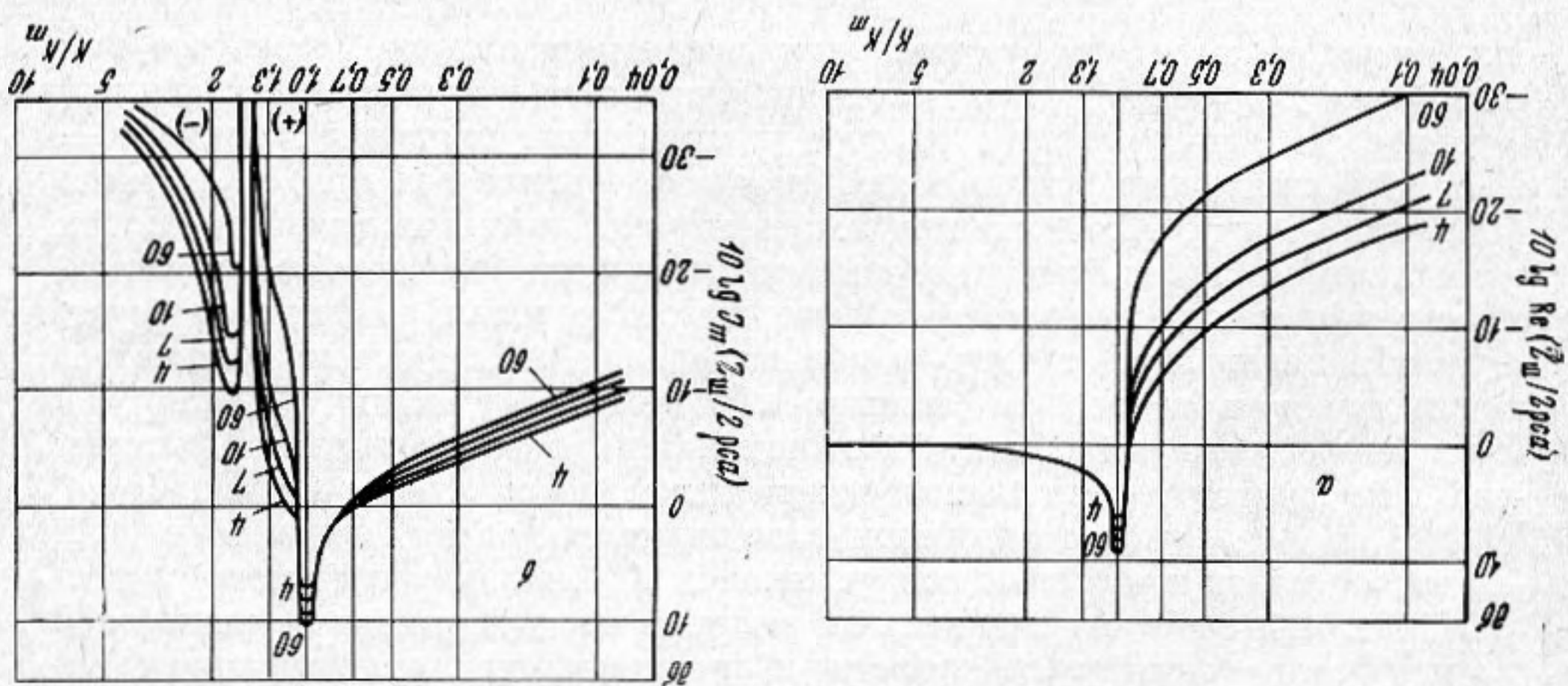
Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 1



$= 60$ при различных граничных условиях. По осям ординат на графиках отложены значения действительной и мнимой частей импеданцев (a и b), отнесенные к величине $2\rho sa$. Кривые построены в логарифмическом масштабе. Знаки плюс и минус у кривых вблизи некоторых точек соответствуют перемене в этих точках знака исходного выражения.

Сравнивая между собой комплексные импедансы пластины при различных условиях закрепления, можно сформулировать следующие выводы. Для ограниченной пластины, в отличие от бесконечной, активная составляющая импеданса излучения при $k < k_m$ и реактивная при $k > k_m$ отличны от нуля. С ростом номера формы колебания при любых условиях закрепления комплексный импеданс излучения ограниченной пластины асимптотически приближается к импедансу бесконечной пластины, при этом резонансное значение обеих частей импеданса (при $k = k_m$) неограниченно возрастает. В области частот $k > k_m$ действительная часть импеданса ограниченной пластины, а в области $k < k_m$ — мнимая его часть уже для начальных мод весьма близки к таковым для бесконечной пластины.

Наибольшим активным сопротивлением в области частот $k < k_m$ обладает из рассмотренных пластина с заземленными краями, а наименьшим — пластина с пучностями колебательной скорости на краях. Для реактивных частей импеданса в области $k > k_m$ при этих граничных условиях имеет место противоположное соотношение.

Для заземленной или шарнирно-опертой пластины в области $k > k_m$ уже для сравнительно низких форм колебаний определяющим вдали от резонанса становится активное сопротивление излучения, а реактивная часть быстро падает с ростом k/k_m . В области же $k < k_m$ даже для сравнительно высоких мод ($m \approx 100$) мнимая часть импеданса превосходит действительную не более чем на 20 дБ. С ростом номера формы колебания эта разница медленно растет. Мнимая часть импеданса пластины при шарнирном закреплении изменяет знак, переходя через нуль вблизи $k/k_m \approx 1,5$.

Наиболее существенное различие импеданцев конечной и бесконечной пластин имеет место вблизи резонанса $k \simeq k_m$. Это различие выражается в конечности резонансного значения импеданса ограниченной пластины для форм колебаний любых номеров и связано с существенно различным характером спектров собственных колебаний ограниченной пластины (дискретный спектр) и бесконечной пластины (сплошной спектр).

Автор выражает благодарность В. И. Клячкину за ценные указания, а также В. В. Яковлеву и Г. И. Усоскину за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Von K. Gösele. Schallabstrahlung von Platten, die zu Biegeschwingungen ange-regt sind. *Acustica*, 1953, 3, 4, 243—248.
2. G. Maidanik. Response of ribbed panels to reverberant acoustics fields. *J. Acoust. Soc. America*, 1962, 34, 6, 809—826.
3. Л. И. Лямшев. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками. М., Изд-во АН СССР, 1955.
4. Е. Л. Шендеров. Прохождение звука через тонкую пластинку с опорами. *Акуст. ж.*, 1964, 10, 2, 229—233.
5. Е. Скучик. Основы акустики, т. 1. М., ИЛ, 1959.
6. Ф. Морси и Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. 1, М., ИЛ, 1960.
7. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1. М., Физматгиз, 1963.
8. А. С. Никифоров. Излучение пластины конечных размеров при произвольных граничных условиях. *Акуст. ж.*, 1964, 10, 2, 218—223.
9. Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, т. 1. М., ГТТИ, 1951.

Ленинград

Поступила в редакцию
13 июня 1966 г.