

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КОНЦЕНТРАЦИИ БОЛЬШОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПЛОСКОЙ АНТЕННЫ И СОПРОТИВЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ЕЕ ЭЛЕМЕНТА

М. Д. Смарышев

Рассматривается метод расчета сопротивления излучения элемента, работающего в большой по сравнению с длиной волны периодической плоской антенне. Приводятся графики, иллюстрирующие в частных случаях зависимости сопротивления излучения и коэффициента концентрации больших антенн при различных расстояниях между элементами и углах компенсации антенны.

Основными параметрами, характеризующими свойства акустических или электромагнитных антенн, являются характеристики направленности, сопротивление излучения отдельных элементов и антенны в целом и коэффициенты концентрации. Характеристика направленности плоской периодической антенны, согласно теореме умножения, определяется сравнительно просто, как произведение характеристики направленности элемента на характеристику направленности решетки, т. е. антенны, состоящей из ненаправленных элементов, расположенных в центрах реальных элементов. Сложнее обстоит дело с расчетом сопротивления излучения и коэффициента концентрации многоэлементных антенн. Даже в тех случаях, когда известны аналитические выражения для определения взаимных сопротивлений излучения элементов в жестком экране (например, круглые поршни [1] или прямоугольные поршни [2]), расчет сопротивления излучения одного элемента или всей антенны при большом числе составляющих ее элементов является весьма трудоемкой задачей. При необходимости исследования зависимости этих величин от геометрии антенны или угла поворота характеристики направленности расчеты становятся чрезвычайно громоздкими, даже при выполнении их с помощью ЦВМ.

С другой стороны, представляется очевидным, что при большом числе элементов различие полных сопротивлений излучения отдельных элементов антенны не должно существенно сказаться на параметрах антенны в целом. В связи с этим появились работы, в которых исследование параметров больших антенн заменяется исследованием соответствующих параметров бесконечных антенн.

Особый интерес представляет работа [3], где получены сравнительно простые выражения для определения полного (т. е. с учетом действия всех элементов антенны) активного и реактивного сопротивления излучения элемента бесконечной правильной периодической антенны. Автор этой работы воспользовался методом непосредственного суммирования взаимных сопротивлений излучения круглых поршней с помощью формулы Пуассона. При этом пришлось аппроксимировать выражение для взаимного сопротивления излучения, выведенное в работе [1], некоторой функцией, что ограничило возможность применения полученных результатов областью сравнительно малых размеров элементов. В настоящей статье рассматривается более общий метод расчета полного сопротивления излу-

чения элемента бесконечной периодической антенны, лежащей в жестком экране.

Пусть центры элементов, образующих бесконечную периодическую антенну, расположены в узлах решетки, ячейка которой представляет собой параллелограмм. Основные геометрические размеры решетки и нумерация ее элементов ясны из фиг. 1. Кроме системы координат xu введем системы координат $x'_\alpha y'_\beta$ с началом в центре элемента с номером α, β .

Пусть элементы, образующие антенну, одинаковы и одинаково ориентированы в пространстве. Колебательную скорость элемента антенны запишем в виде

$$\dot{\xi}_{\alpha, \beta} = \dot{\xi}_0 w(x'_\alpha, y'_\beta) e^{i\gamma_{\alpha, \beta}} \quad (1)$$

где $w(x'_\alpha, y'_\beta)$ — произвольная форма колебаний поверхности поршня (или амплитудное распределение по поверхности поршня), $\gamma_{\alpha, \beta}$ — фазовая задержка, обеспечивающая ориентацию главного лепестка характеристики направленности всей антенны в некотором направлении, определяемом сферическими координатами θ_0, φ_0 .

Определим мощность, излучаемую центральным элементом антенны по формуле

$$W = \frac{1}{2} \int_{S_{00}} p \dot{\xi}_{00}^* \cdot dS_{00}, \quad (2)$$

где S_{00} — площадь поверхности элемента с номером $\alpha = 0, \beta = 0$, а p — давление, создаваемое всеми элементами антенны в точке поверхности центрального элемента. В свою очередь

$$\begin{aligned} p &= \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} p_{\alpha, \beta} = \\ &= -i \frac{k \rho c \dot{\xi}_0}{2\pi} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} e^{i\gamma_{\alpha, \beta}} \int_{S_{\alpha, \beta}} w(x'_\alpha, y'_\beta) \frac{e^{ikR}}{R} dS_{\alpha, \beta} \end{aligned} \quad (3)$$

где k — волновое число, ρc — волновое сопротивление среды, R — расстояние от произвольной точки элемента α, β до произвольной точки центрального элемента.

Воспользуемся известным разложением сферической волны по плоским, учитывая, что в нашем случае точка излучения и точка наблюдения лежат в одной плоскости xOy .

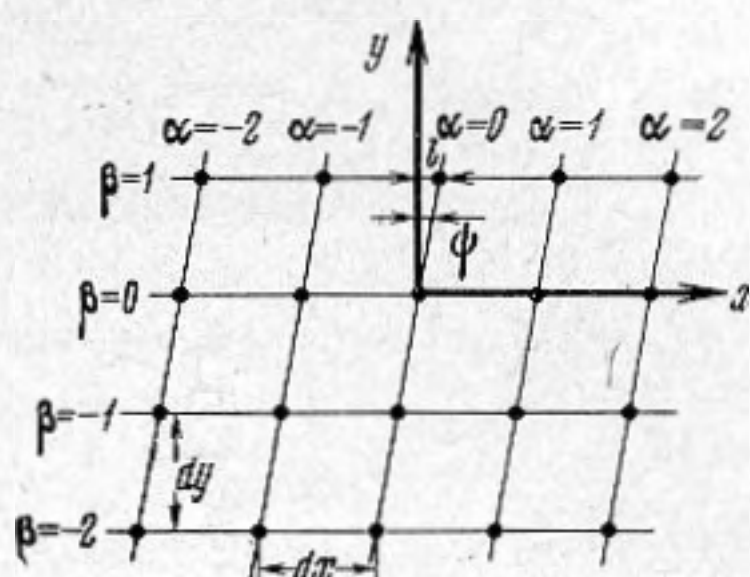
$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} e^{ik(R_x \sin \theta \cos \varphi + R_y \sin \theta \sin \varphi)} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (4)$$

Символами R_x и R_y обозначены проекции R на оси x и y соответственно. Как видно из фиг. 1,

$$R_x = -\alpha d_x - \beta l - x'_\alpha + x'_0, \quad R_y = -\beta d_y - y'_\beta + y'_0. \quad (5)$$

Подставляя выражения (5), (4), (3) и (1) в формулу (2), получим

$$\begin{aligned} W &= \frac{k^2 \rho c \dot{\xi}_0^2}{8\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} B \int_{S_{0,0}} \int_{S_{\alpha, \beta}} w(x_0, y_0) w(x_\alpha, y_\beta) \times \\ &\times e^{-ik(x'_\alpha - x'_0) \sin \theta \cos \varphi + (y'_\beta - y'_0) \sin \theta \sin \varphi} dS_{00} dS_{\alpha, \beta} \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (6)$$



Фиг. 1

С учетом того, что $\gamma_{\alpha, \beta}$ в выражении (1) при компенсации антенны в направлении φ_0 , θ_0 имеет вид $\gamma_{\alpha, \beta} = ik[(\alpha d_x + \beta l) \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \beta d_y \sin \theta_0 \sin \varphi_0]$, можно написать для величины B следующее выражение:

$$B = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} e^{-ik(\alpha d_x + \beta l)(\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0 \cos \varphi_0)} \times \\ \times e^{-ik\beta d_y(\sin \theta \sin \varphi - \sin \theta_0 \sin \varphi_0)} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-ik\alpha d_x(\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0 \cos \varphi_0)} \times \\ \times \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} e^{-ik\beta \sqrt{d_y^2 + l^2} [\sin \theta \sin(\varphi + \psi) - \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 + \psi)]}. \quad (7)$$

Ряды по α и β представляют собой [4] суммы δ -функций, поэтому

$$B = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left\{ \frac{d_x}{\lambda} (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0 \cos \varphi_0) - n; \right. \\ \left. \frac{\sqrt{d_y^2 + l^2}}{\lambda} [\sin \theta \sin(\varphi + \psi) - \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 + \psi)] - m \right\}. \quad (8)$$

Поскольку формы колебаний всех элементов антенны одинаковы, а также одинаковы и конфигурации самих элементов, то двойной интеграл по поверхностям элементов 00 и α, β принимает вид

$$A = \left| \int_{S_{00}} w(x_0 y_0) e^{-ik(x_0 \sin \theta \cos \varphi + y_0 \sin \theta \sin \varphi)} dS_{00} \right|^2.$$

Легко видеть, что характеристика направленности элемента $R(\theta, \varphi)$ связана с A соотношением $|R(\theta, \varphi)|^2 \cdot S_0^2 = A$, где $S_0 = \int_{S_{00}} w(x_0, y_0) dS_{00}$ — эффективная площадь элемента. Учитывая, что $z = 2W / \xi_0^2$ и подставляя полученные соотношения в формулу (6), имеем

$$z = \frac{k^2 \rho c S_0^2}{4\pi^2} \int_0^{\pi/2 - i\infty} \int_0^{2\pi} |R(\theta, \varphi)|^2 \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left\{ \frac{d_x}{\lambda} (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0 \cos \varphi_0) - n; \right. \\ \left. \frac{\sqrt{d_y^2 + l^2}}{\lambda} [\sin \theta \sin(\varphi + \psi) - \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 + \psi)] - m \right\} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (9)$$

Произведем замену переменных

$$\sin \theta \cos \varphi = u; \quad \sin \theta \sin(\varphi + \psi) = v \quad (10)$$

и опуская громоздкие вычисления, связанные с определением якобиана преобразования, получим

$$z = \frac{k^2 \rho c S_0^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |R(u, v)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left\{ \frac{d_x}{\lambda} (u - \bar{u}) - n; \right. \\ \left. \frac{\sqrt{d_y^2 + l^2}}{\lambda} (v - \bar{v}) - m \right\} \frac{du dv}{\cos \psi \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{d_y^2 + l^2}}{d} v - \frac{l}{d} u \right)^2 - u^2}}. \quad (11)$$

Здесь $\bar{u} = \sin \theta_0 \cos \varphi_0$; $\bar{v} = \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 + \psi)$. Наконец, вычисляя интегралы по u и v , получим окончательно

$$z = \frac{\rho c S_3^2}{d_x d_y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R^2(u_n, v_m)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{d_y^2 + l^2}}{d_y} v_m - \frac{l}{d_y} u_n \right)^2 - u_n^2}}, \quad (12)$$

где

$$u_n = n \frac{\lambda}{d_x} + \bar{u}; \quad v_m = m \frac{\lambda}{\sqrt{d_y^2 + l^2}} + \bar{v}; \quad d_y = \cos \psi \sqrt{d_y^2 + l^2}. \quad (13)$$

Поскольку характеристика направленности элемента является функцией θ и φ , приведем полученные из (10) формулы для связи θ и φ с u и v .

$$\sin \theta = \sqrt{u^2 + \left(\frac{\sqrt{d_y^2 + l^2}}{d_y} v - \frac{l}{d_y} u \right)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{u} \cdot \frac{1}{\cos \psi} - \operatorname{tg} \psi. \quad (14)$$

Заметим, что слагаемые в формуле (12) при n и m , удовлетворяющих условию

$$1 > u_n^2 + \left(\frac{\sqrt{d_y^2 + l^2}}{d_y} v_m - \frac{l}{d_y} u_n \right)^2, \quad (15)$$

вещественны и их сумма определяет активное сопротивление излучения элемента антенны, остальные же слагаемые мнимые и их сумма определяет реактивное сопротивление излучения. Физический смысл формулы (12), во всяком случае для активного сопротивления излучения, весьма прост. Очень большая — в пределе бесконечная — периодическая антенна излучает только в направлениях, соответствующих направлению главного и равных ему добавочных максимумов характеристики направленности ее решетки. Легко видеть, что положение δ -функций в пространстве θ, φ (см. формулу (9)) соответствует направлениям максимумов, равных основному. Двойная сумма по n и m определяет излучение энергии в этих направлениях. Числитель выражения под знаком суммирования учитывает характеристику направленности отдельного элемента в направлениях излучения. Знаменатель же представляет собой просто косинус угла наклона максимума излучения и определяет расширение максимума характеристики направленности антенной решетки при удалении его от нормали к антенне.

Если предположить, что сопротивление излучения каждого элемента большой, но конечной, антенны равно сопротивлению излучения элемента соответственной бесконечной антенны, то коэффициент концентрации конечной антенны можно представить в виде

$$K = \frac{4\pi}{\rho c} \frac{|p_a r / \xi|^2}{\operatorname{Re} z_a}, \quad (16)$$

где p_a — давление, развиваемое антенной на расстоянии r в направлении компенсации, $\operatorname{Re} z_a$ — активное сопротивление излучения всей антенны.

$$p_a = N p_0 = -j \frac{k \rho c \xi S_0}{2 \tilde{n} r} R(\theta_0 \varphi_0) N e^{jkr} \quad (17)$$

$$\operatorname{Re} z_a = N \operatorname{Re} z,$$

где N — число элементов в антенне. Подставляя выражения (17) и (12) в формулу (16) и учитывая, что положение главного максимума характеристики направленности антенны на плоскости u, v определяется координатами u_0, v_0 , т. е. соответствует (см. формулу (13)) $n = 0, m = 0$, по-

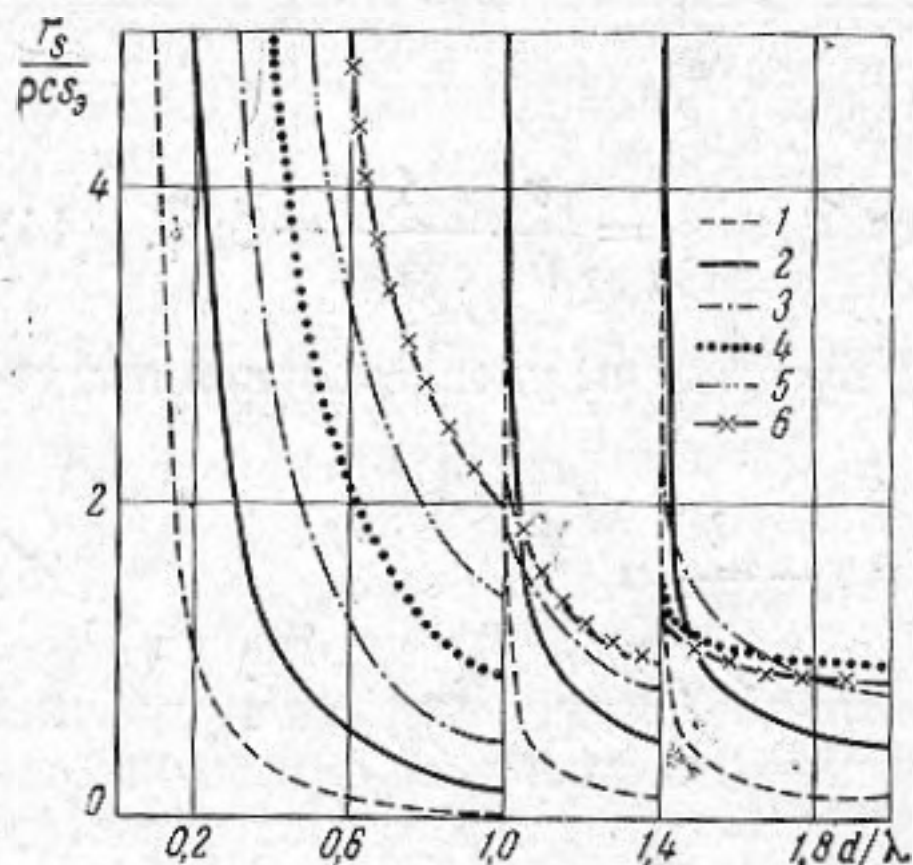
лучим

$$K = \frac{4\pi N d_x d_y}{\lambda^2} \frac{R^2(u_0, v_0)}{\operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R^2(u_n, v_m)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{d_y^2 + l^2}}{d_y} v_m - \frac{l}{d_y} u_n \right)^2 - u_n^2}}}. \quad (18)$$

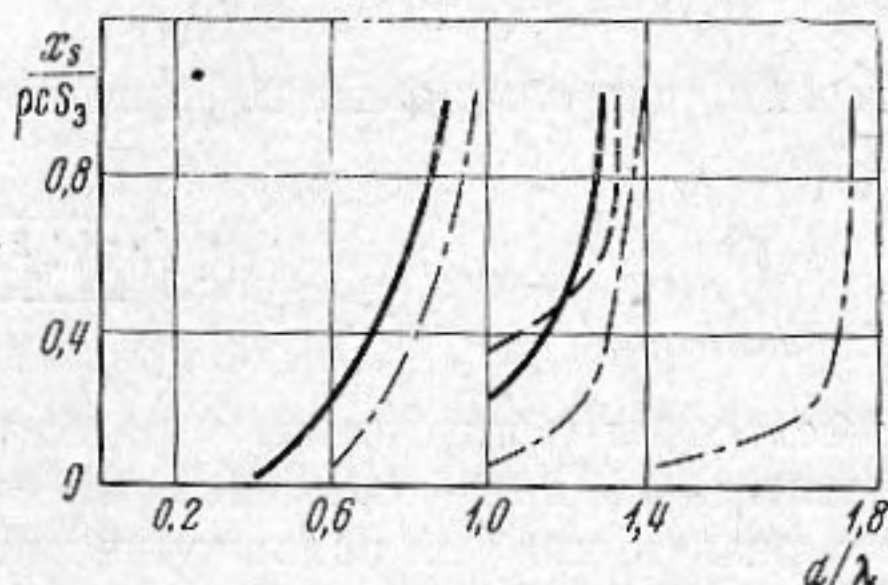
Пусть расстояния между центрами элементов антенны таковы, что условие (15) выполняется только для $n = 0, m = 0$ при любых $\theta_0 \leq \pi/2$. Тогда из формулы (12) и (18) с учетом формулы (14)

$$\operatorname{Re} z = \frac{\rho c S_a^2}{d_x d_y} \frac{R^2(u_0, v_0)}{\cos \theta_0}, \quad (19)$$

$$K = \frac{4\pi S_a}{\lambda^2} \cos \theta_0 = K_{nn} \cos \theta, \quad (20)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

где S_a — площадь антенны (так как число элементов велико, $S_a = N d_x d_y$), K_{nn} — коэффициент концентрации поршня, равновеликого антенне при $\theta_0 = 0$. Выражение для реактивного сопротивления излучения совпадает с формулой (12), если только исключить из двойной суммы слагаемое $n = 0, m = 0$.

Таким образом, если только в характеристике направленности решетки отсутствуют добавочные максимумы, равные основному, можно сделать следующие выводы:

1. В случае $\theta_0 = 0$ активное сопротивление излучения элемента антенны обратно пропорционально площади элементарной ячейки и не зависит от характеристики направленности элемента; коэффициент концентрации антенны также не зависит от $R(\theta, \varphi)$ и равен коэффициенту концентрации равновеликого плоского поршня (возможные зазоры между элементами при этом не снижают величины коэффициента концентрации).

2. При сравнительно небольшой направленности элемента антенны его активное сопротивление излучения растет с ростом угла компенсации, причем рост этот тем больше, чем меньше направленность элемента, а при существенной направленности элемента — может и падать.

3. Реактивное сопротивление излучения элемента растет с увеличением угла компенсации, причем тем больше, чем острее характеристика направленности элемента.

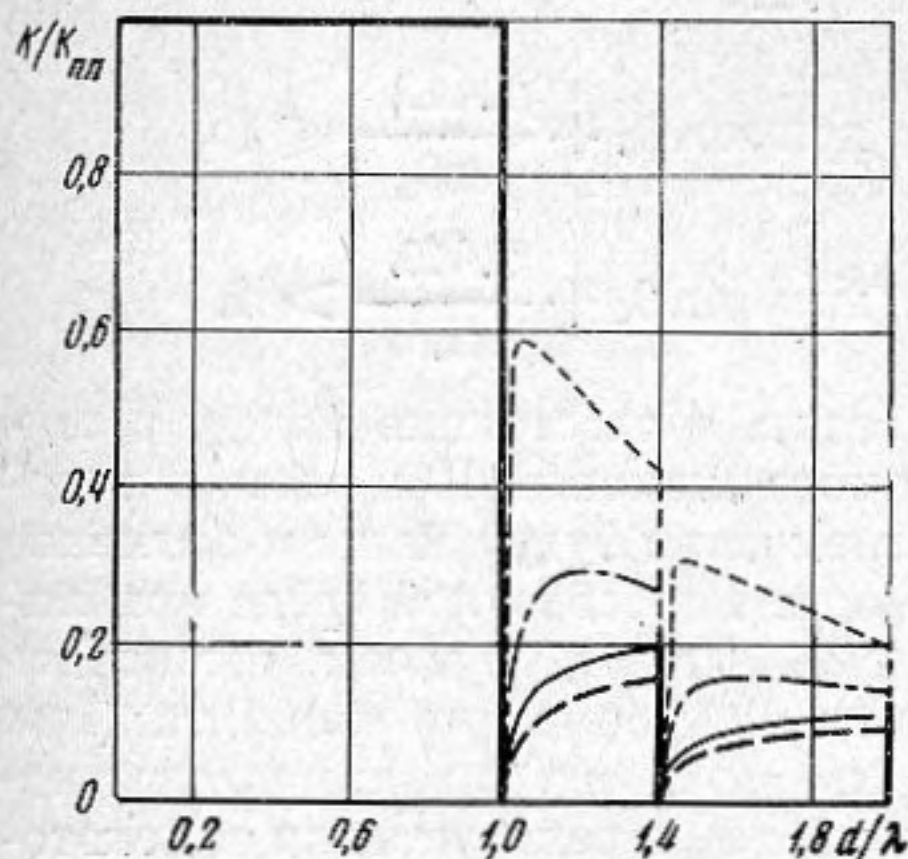
4. При увеличении угла компенсации коэффициент концентрации антенны падает пропорционально $\cos \theta_0$.

В частном случае непрерывной антенны (получаемом при $R(\theta) = 1$ и d_x и d_y , стремящихся к нулю) последний вывод был известен и ранее. Разными способами он был получен в работах [5, 6].

На графиках фиг. 2 — 6 * представлены некоторые результаты расче-

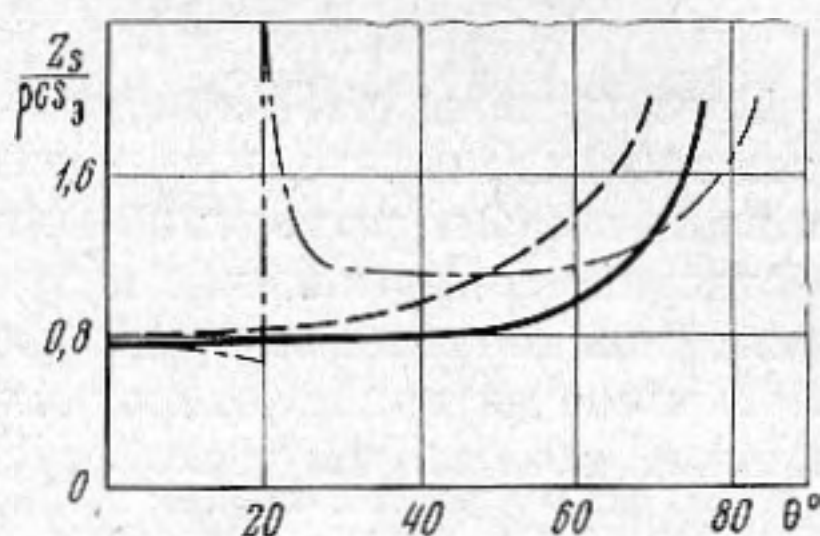
* На всех фигурах обозначено: 1 — $d_0/\lambda = 0,25$, 2 — $d_0/\lambda = 0,5$, 3 — $d_0/\lambda = 0,75$, 4 — $d_0/\lambda = 1,0$, 5 — $d_0/\lambda = 1,25$, 6 — $d_0/\lambda = 1,5$.

тов, подтверждающие сделанные выводы и показывающие поведение рассматриваемых параметров при появлении в области действительных углов добавочных максимумов характеристики направленности решетки, равных основному. Расчет производился для антенны с квадратной ячейкой ($d_x = d_y = d, l = 0$) и элементами в виде круглых дисков с равномерно распределенной по поверхности колебательной скоростью. Компенсация производилась в



Фиг. 4

плоскости xOz ($\varphi_0 = 0$). В этом случае формула (12) существенно упрощается.

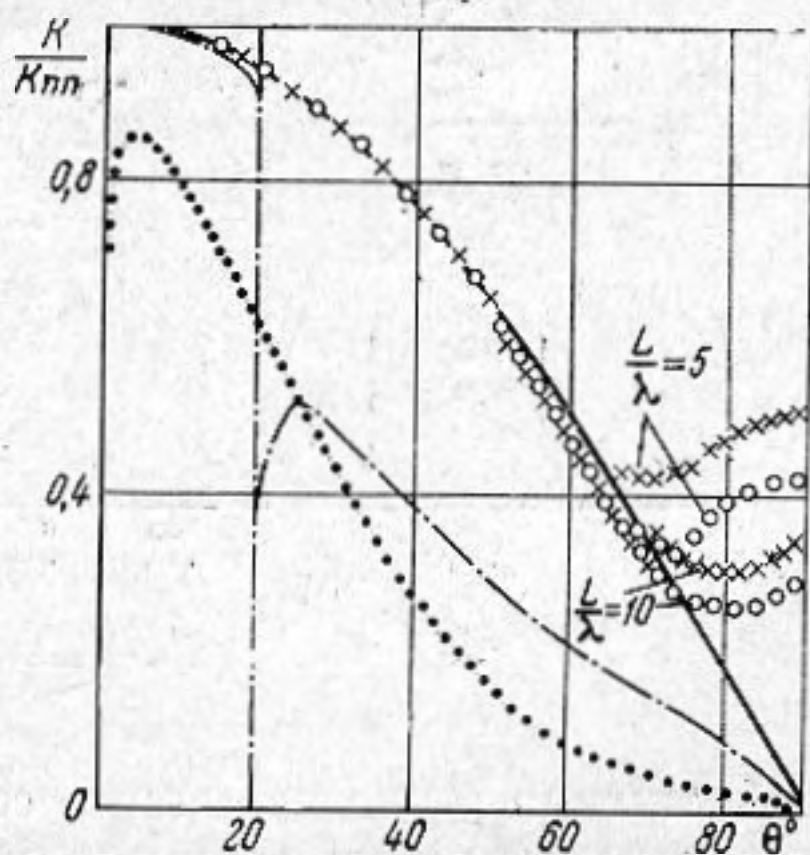


Фиг. 5

плоскости xOz ($\varphi_0 = 0$). В этом случае формула (12) существенно упрощается.

$$z = \frac{\rho c S_0^2}{d_x d_y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{2J_1(ka\sqrt{u_n^2 + u_m^2})}{ka\sqrt{u_n^2 + v_m^2}} \right)^2}{\sqrt{1 - u_n^2 - v_m^2}}, \quad (21)$$

где $u_n = n \frac{\lambda}{d} + \sin \theta_0$; $v_m = m \frac{\lambda}{d}$, a — радиус элемента. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что при d/λ , равном 1 и 1,41, а также при угле компенсации, равном 90° , т. е. в тех случаях, когда максимум решетки, равный единице, совпадает с плоскостью антенны, z обращается в бесконечность, а K стремится к нулю. Это объясняется тем, что для бесконечной антенны максимум, лежащий в плоскости антенны, в бесконечное число раз шире, чем максимум, перпендикулярный к ней. Таким образом, применение полученных результатов к конечной антенне в случае, когда $u_n^2 + v_m^2 = 1$ (это и есть условие совпадения максимума, равного единице с плоскостью антенны), может привести к существенной ошибке. На графике фиг. 6 крестиками показано отношение K/K_{nn} для $d/\lambda = 0,25$; $L/\lambda = 5$ и $L/\lambda = 10$ для квадратной антенны, состоящей из точечных элементов и имеющей размер $L \times L$. Видно, что существенное отличие от кривой для бесконечной антенны имеет место при θ_0 , приближающемся к 90° . Можно существенно уменьшить ошибку (кружки на фиг. 6), если в формулу, определяющую сопротивление излучения, под знаком суммы вместо знаменателя, учитывающего относительное расширение максимума, равного основному для бесконечной антенны, поставить аналогичное выражение для антенны конечных размеров. В случае, представленном на фиг. 6, это выражение имеет вид



Фиг. 6

$$\frac{2 \arcsin \frac{1.41\lambda}{\pi L}}{\gamma - \arcsin \left(\sin \theta_0 - \frac{1.41\lambda}{\pi L} \right)}, \quad (22)$$

где

$$\gamma = \begin{cases} \arcsin \left(\sin \theta_0 + \frac{1.41\lambda}{\pi L} \right) & \text{при } \sin \theta_0 + \frac{1.41\lambda}{\pi L} \leq 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } \sin \theta_0 + \frac{1.41\lambda}{\pi L} > 1. \end{cases}$$

Предположим, что элемент антенны велик, а расстояние между соседними элементами не меньше величины самого элемента. При этом, очевидно, взаимные сопротивления излучения элементов будут малы и активное собственное сопротивление излучения элемента в свободной среде приближенно можно определить по формуле (12). Таким образом, вычислять собственное активное сопротивление излучения большого элемента (или антенны) можно не через интеграл от квадрата его характеристики направленности, а как сумму значений квадрата характеристики в некоторых фиксированных направлениях, что в ряде случаев существенно упрощает расчет. Очевидно, к этому же выводу можно прийти с помощью теоремы Котельникова, имея в виду, что импульс и его спектр связаны так же, как распределение колебательной скорости на поверхности антенны с ее характеристикой направленности. По формуле (12) рассчитывалось собственное сопротивление излучения круглого поршня $D/\lambda = 5,5$ в свободной среде, причем ошибка по сравнению с точным расчетом оказалась меньшей 0,5%. Выше рассматривалась антенна с одинаковым возбуждением элементов; однако если предположить, что антенна настолько велика, а возбуждение изменяется настолько плавно, что на сопротивление излучения отдельного элемента оказывают влияние только такие близкие к нему элементы, то можно получить выражения:

$$Z_s = \frac{\rho c S_0^2 \sum_{i=1}^N a_i^2}{d_x d_y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R^2(u_n, v_m)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{d_y^2 + l^2}}{d_y} v_m - \frac{l}{d_y} u_n \right)^2 - u_n^2}}$$

$$K = \frac{4\pi d_x d_y}{\lambda^2} \frac{\left| \sum_{i=1}^N a_i \right|^2}{\sum_{i=1}^N a_i^2} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R^2(u_n, v_m)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{d_y^2 + l^2}}{d_y} v_m - \frac{l}{d_y} u_n \right)^2 - u_n^2}},$$

приближенно определяющие сопротивление излучения и коэффициент концентрации антенны при наличии амплитудного распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. L. Pritchard. Mutual acoustic impedance between radiators in an infinite rigid plane. J. Acoust. Soc. America, 1960, 32, 6, 730—737.
2. E. Arase. Mutual radiation impedance of square and rectangular pistons in a rigid infinite baffle. J. Acoust. Soc. America, 1964, 36, 8, 1521—1525.
3. V. Mangulis. Infinite array of circular pistons on a rigid plane baffle. J. Acoust. Soc. America, 1962, 34, 10, 1558—1563.
4. Б. ван дер Поль, Х. Бреммер. Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа. М., ИЛ, 1952.
5. M. I. King, R. K. Thomas. Gain of large scanned arrays. IRE Trans AP-8, 1960, 6, 635.
6. М. Д. Смаришев. О приближенном вычислении коэффициента концентрации непрерывных компенсированных систем. Акуст. ж., 1963, 9, 2, 246—247.

Ленинград

Поступила в редакцию
15 января 1967 г.