АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVI 1970 Вып. 2

УДК 534.83

РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПАНЕЛИ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ ВЫХЛОПНОЙ СТРУИ

К. Г. Валеев, В. Е. Квитка

Указан приближенный способ расчета вероятностных характеристик напряжений при колебании плоских панелей в акустическом поле выхлопной струи реактивного двигателя. Спектральная плотность акустической нагрузки определялась экспериментально по частотным спектрам акустического давления. Результаты расчета проверены экспериментально.

Рассмотрим малые колебания плоской пластинки, лежащей в координатной плоскости xoy, описываемые дифференциальным уравнением [1]

$$D_0\Delta^2 w + 2\rho h\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, y, t) \tag{1}$$

с некоторыми однородными граничными условиями на контуре закрепления, предполагая, что панель жестко защемлена по контуру. Тогда

$$w|_\Gamma = \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

В выражениях (1), (2) и далее D_0 — цилиндрическая жесткость, h — толщина, ρ — плотность материала пластинки, ε — коэффициент затухания, Γ — контур закрепления пластинки, ν — внутренняя нормаль к контуру. Предполагается, что функция $F(x, y, t)$, характеризующая нагрузку, является случайным нормальным стационарным процессом со спектральной плотностью $S(\omega)$.

Пусть размеры панели малы по сравнению с радиусом пространственной корреляции внешних сил. В этом случае нагрузку $F(x, y, t)$ можно заменить равномерно распределенной силой.

Необходимо вычислить изгибные напряжения в пластине. Для этого можно воспользоваться формулами, связывающими перемещения w пластины с напряжениями в пластине, которые будем характеризовать некоторой функцией $\tau(x, y, t)$. Эти формулы хорошо известны [1].

Обозначим через $H(x, y, \omega)$ передаточную функцию для искомой величины $\tau(x, y, t)$. Предположим, что нагрузка равномерно распределена и представляет собой регулярный гармонический процесс, т. е. временная зависимость имеет вид $e^{i\omega t}$. Обозначая через $\omega_1, \ldots, \omega_n$ собственные частоты колебаний пластины, получим приближенную формулу для передаточной функции:

$$H(x, y, \omega) \simeq \sum_{m=1}^{n} \frac{2i\delta\omega_m{}^2 H(x, y, \omega_m)}{\omega_m{}^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega_m\omega} = \sum_{m=1}^{n} S(\omega_m) H(x, y, \omega_m). \tag{3}$$

Величину $H(x, y, \omega)$ можно найти расчетным путем с помощью метода Галеркина [2] или экспериментально.

Рассмотрим теперь случай равномерно распределенной гармонической нагрузки резонансного вида, когда $F(x, y, t) = \alpha_m \sin \omega_m t$. Пользуясь формулой (1), найдем амплитуду колебаний пластины β_m в заданной точке, а передаточную функцию получим в виде соотношения

$$|H(x, y, \omega_m)| = \beta_m / \alpha_m. \tag{4}$$

Обозначая через $D(x, y)$ дисперсию искомой функции $\tau(x, y, t)$, получим в общем случае, когда $F(x, y, t)$ представляет собой случайную стационарную функцию,

$$D(x, y) \simeq 2\pi\delta \sum_{m=1}^{n} |H(x, y, \omega_m)|^2 S(\omega_m)\, \omega_m. \tag{5}$$

Зная дисперсию $D(x, y)$, можно найти необходимые характеристики случайного процесса, считая его нормальным. Это предположение подтверждается в работе [3], где экспериментально показано, что распределение амплитуды a функции перемещения $\tau(x, y, t)$ можно аппроксимировать с помощью рэлеевского распределения:

$$\tau(x, y) = -\frac{a}{D(x, y)} \exp\left\{-\frac{a^2}{2D(x, y)}\right\}. \tag{6}$$

Это же следует из приближенной теории узкополосных нормальных случайных процессов.

Пусть $\sigma(x, y)$ — среднеквадратичное отклонение $\tau(x, y, t)$ от нуля, $S(x, y)$ — статистическое среднее значение амплитуд $\tau(x, y, t)$, $q(x, y)$ — среднеквадратичное значение амплитуд, $\sigma_a(x, y)$ — среднеквадратичное отклонение амплитуд от среднего значения $S(x, y)$.

Зная одну из этих величин, остальные можно определить по известным формулам математической статистики с учетом выражения (6). В данном конкретном случае

$$\begin{gathered} \sigma^2(x, y) = D(x, y), \quad S(x, y) = \sqrt{0{,}5\pi}\, \sigma(x, y), \\ q(x, y) = \sqrt{2}\sigma(x, y), \quad \sigma_a(x, y) = \sqrt{2 - 0{,}5\pi}\sigma(x, y). \end{gathered} \tag{7}$$

Значения максимальных амплитуд величины $\tau(x, y, t)$ с вероятностью 0,997 можно определить из условия

$$|\tau(x, y, t)| < 3\sigma(x, y). \tag{8}$$

Перейдем к конкретному расчету напряжений в панели, находящейся в поле реактивной струи, принимая в качестве случайных величин τ напряжения на поверхности панели. Оказалось, что суммарная деформация панели в акустическом поле является результатом сложения нескольких узкополосных случайных процессов, каждый из которых близок к колебаниям с собственной частотой ω_m. Экспериментальные исследования показали, что для прямоугольных панелей колебания интенсивно возбуждаются в сравнительно узкой полосе частот с 1—3 определяющими частотами. Отметим, что формулы (5) — (7) дают наилучшее согласование для случайных процессов с одним максимумом спектральной плотности.

Спектральную плотность $S(\omega)$ можно определить по частотному спектру акустического давления в соответствующей зоне звукового поля выхлопной струи данного или подобного двигателя с учетом поправки из условий газодинамического и геометрического подобия.

На практике спектры акустического давления измерялись обычно с помощью третьоктавных или октавных фильтров [4]. Для третьоктавного фильтра получим

$$S(f)=\frac{1}{\Delta f T}\int_0^T p_{\Delta f}^2(t)\,dt. \quad (9)$$

Здесь T — время осреднения, $p_{\Delta f}(t)$ — сигнал, измеренный на выходе фильтра с эффективной шириной полосы пропускания $\Delta f = 0{,}231\ f_{ср}$, где $f_{ср}$ — средняя частота полосы в герцах. Для октавного фильтра $\Delta f = 0{,}708\ f_{ср}$.

Обозначим через $p_{ср}$ среднеквадратичное значение измеренного давления на выходе данного фильтра, определяемое по формуле

$$p_{ср}=\left[\frac{1}{T}\int_0^T p_{\Delta f}^2(t)\,dt\right]^{1/2}. \quad (10)$$

Для третьоктавного фильтра найдем

$$[f_{ср}S(f_{ср})]^{1/2}=2{,}08\ p_{ср}. \quad (11)$$

Величина $p_{ср}$ соответствует среднеквадратичному значению акустического давления, измеренному в третьоктавной полосе со значением $f_{ср}$, соответствующим собственной частоте колебаний панели.

В качестве примера определим значения параметров напряженности для прямоугольной плоской панели обшивки при нагружении их акустическим давлением от выхлопной струи реактивных двигателей. Примем модуль Юнга $E = 7{,}2\cdot 10^5$ *кг/см²*, произведение ускорения силы тяжести на плотность $g\rho = 0{,}0028$ *кг/см³*, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$ и коэффициент потерь $\delta = 0{,}015$—$0{,}025$. Размеры панели обозначим через 2а, 2б, h. Панель будем считать жестко защемленной по контуру.

Среднеквадратичное значение давления $p_{ср}$ определим на основе спектрального анализа p в третьоктавной полосе с помощью аппаратуры Брюль и Кьер вблизи панели в акустических полях выхлопных струй реактивных

Двигатель. Размеры панели, *см*	Режим работы двигателя	$p_{ср}$, *кг/м²*	$f_{ср}$, *гц*	Расчет			Эксперимент		
				f_1, *гц*	S, *кг/мм²*	q, *кг/мм²*	$f_{рез}$, *гц*	S, *кг/мм²*	q, *кг/мм²*
№ 1 30 × 12 × 0,08	1	14,4	320	300	1,649	1,866	312	1,676	1,765
	2	10,0	320	300	1,145	1,296	÷323	0,981	1,045
№ 2 30 × 15 × 0,12	1	12,8	250	270	1,741	1,971	220÷	1,827	1,937
	2	9,1	250	270	1,238	1,401	÷260	1,172	1,273

двигателей двух типов. В таблице приведены данные для двух панелей, значения нагрузки $p_{ср}$, частоты $f_{ср}$, расчетных и измеренных основных резонансных частот колебаний и статистических параметров напряженности σ_x в центре поверхности панели вдоль большей стороны 2а.

Расчет проведем для одной основной частоты колебаний. Полагая в методе Галеркина, что форма колебаний имеет вид

$$\varphi(x,y)=\left(1+\cos\frac{\pi x}{a}\right)\left(1+\cos\frac{\pi y}{b}\right),$$

находим при гармоническом возмущении в формуле (1)

$$F(x,y,t)=e^{i\omega t},\qquad w=u(x,y,\omega)\,e^{i\omega t},$$

$$\sigma_x=H(x,y,\omega)\,e^{i\omega t},\quad H=-\frac{Fh}{2(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Выбирая начало координат в центре панели, получим

$$H(0,0,\omega)\simeq\frac{4\pi^2E(0{,}39+\mu)}{9b^2\rho(1-\mu^2)(-\omega^2+\omega_1{}^2+2i\delta\omega\omega_1)}.$$

Из формулы (5) найдем среднеквадратичное отклонение

$$\sigma=\sqrt{D}=\frac{50b^2(0{,}39+\mu)}{\pi^2h\alpha}[2\pi/\delta]^{1/2}p_{\text{ср}}\,[\text{кг}/\text{см}^2].$$

Примем

$$[\omega_1S(\omega_1)]^{1/2}=2{,}06p_{\text{ср}},\quad \omega_1{}^2=\frac{\pi^4\alpha^2Eh^2}{108\rho(1-\mu^2)b^4},$$

$$f_1=\frac{\omega_1}{2\pi},\qquad \alpha=3+2b^2/a^2+3b^4/a^4.$$

Среднее статистическое значение амплитуды напряжения S и среднеквадратичное значение амплитуды q рассчитаем по формулам (7). Результаты расчета и эксперимента приведены в таблице.

Сопоставление расчетных и экспериментальных данных для рассматриваемых конкретных панелей показывает их удовлетворительное согласование.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки. М., ГТТИ, 1956, 35—39.
2. С. Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. М., ГТТИ, 1957.
3. S. H. Smith. Fatigue crack crowth under axial narrow and broad band random loadinys acoustical fatigue in aerospace structures. Pros. Sec. Int. Conf., Dayton. Ohio, April, 29 — May 1, 1965, 331—360.
4. Случайные колебания. Сб. под ред. С. Крендел л. М., «Мир», 1967, 40—44.

Государственный н.-и. институт
гражданской авиации
Москва

Поступила в редакцию
20 декабря 1968 г.