

УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ИДЕАЛЬНЫМИ ВЫТЯНУТЫМИ СФЕРОИДАМИ

А. А. Клещев, Л. С. Шейба

На основе известных ранее, и полученных в работе соотношений вычислены характеристики рассеяния идеальных вытянутых сфероидов в зонах Френеля и Фраунгофера для плоской волны и сферического источника.

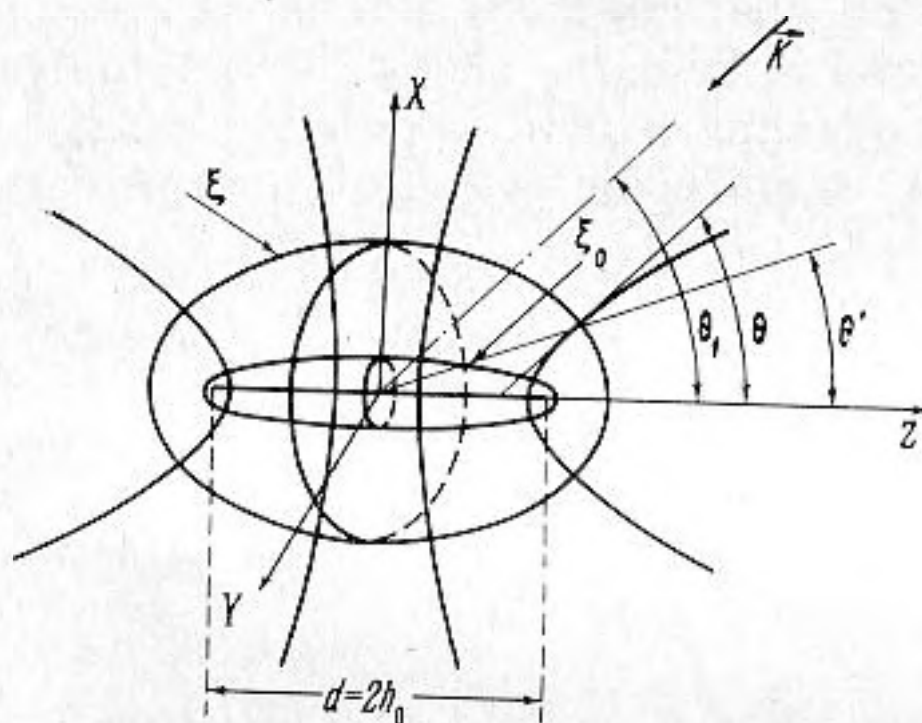
Выберем систему вытянутых сфероидальных координат ξ, η, φ (фиг. 1). Связь их с декартовыми координатами x, y, z определяется соотношениями [1]:

$$\begin{aligned} x &= h_0 \cdot (1 - \eta^2)^{1/2} \cdot (\xi^2 - 1)^{1/2} \cdot \cos \varphi, & y &= h_0 \cdot (1 - \eta^2)^{1/2} \cdot (\xi^2 - 1)^{1/2} \sin \varphi \\ z &= h_0 \cdot \eta \cdot \xi. \end{aligned} \quad (1)$$

Через h_0 обозначена здесь половина межфокусного расстояния. Сфероидальные координаты ξ, η, φ изменяются в пределах

$$-1 \leq \eta \leq 1; \quad 1 \leq \xi < \infty; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Поместим идеальный сфероид в среду, допускающую безвихревое движение. Фокусы координатной системы и сфероида предполагаются общими.



Фиг. 1

Внешнюю поверхность сфероида будем характеризовать радиальной координатой ξ_0 . Пусть из достаточно удаленного источника на сфероид падает плоская монохроматическая волна с единичной амплитудой давления p_i под произвольным полярным углом θ_1 ($\theta_1 = \arccos \eta_1$) и азимутальным углом φ_1 ; без потери общности можно положить φ_1 равным нулю. Временную зависимость в форме $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опускаем.

Пространственное распределение давления p_s в рассеянной волне определяется, в первую очередь, физическим условием на границе сфероида:

а) на поверхности звукомягкого идеального сфероида выполняется однородное условие Дирихле:

$$p_i + p_s = 0, \quad (2)$$

б) на поверхности жесткого сфероида справедливо однородное условие Неймана:

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial n} + \frac{\partial p_s}{\partial n} \right)_{|\xi=\xi_0} = 0, \quad (3)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности тела. Давления p_i и p_s подчиняются скалярному волновому уравнению $(\Delta + k^2)p = 0$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Давление в рассеянной волне в точке наблюдения P с координатами ξ, η, φ будем искать в форме

$$p_s(P) = 2 \sum_{n \geq m} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{mn}}{N_{mn}(C)} \cdot S_{mn}(C, \eta) \cdot R_{mn}^{(3)}(C, \xi) \cos m\varphi, \quad (4)$$

где B_{mn} — неизвестные коэффициенты разложения; $S_{mn}(C, \eta)$ — угловая сфероидальная функция первого ряда; $N_{mn}(C)$ — норма угловой функции; $R_{mn}^{(3)}(C, \xi)$ — радиальная сфероидальная функция третьего рода;

$C = \frac{2\pi \cdot h_0}{\lambda}$ — волновой размер сфероида.

При граничных условиях (2) и (3) коэффициенты разложения соответственно равны [2, 3]

$$B_{mn} = -i^n \varepsilon_m \cdot S_{mn}(C, \eta_1) \cdot \frac{R_{mn}^{(1)}(C, \xi_0)}{R_{mn}^{(3)}(C, \xi_0)}, \quad (5)$$

$$B_{mn} = -i^n \cdot \varepsilon_m \cdot S_{mn}(C, \eta_1) \cdot \frac{R_{mn}^{(1)'}(C, \xi_0)}{R_{mn}^{(3)'}(C, \xi_0)}, \quad (6)$$

$R_{mn}^{(1)}(C, \xi_0)$ и $R_{mn}^{(1)'}(C, \xi_0)$ означают здесь радиальную функцию первого рода и ее производную соответственно; $\varepsilon_m = 1$ при $m = 0$ и $\varepsilon_m = 2$ при $m > 0$.

Угловые функции распределения давления в зоне Фраунгофера $\Phi_0(\eta, \varphi)$ (мягкая граница) и $\Phi'(\eta, \varphi)$ (жесткий сфероид) получаются непосредственно из формулы (4) после применения асимптотических соотношений ($\xi \gg 1$) к радиальным функциям третьего рода $R_{mn}^{(3)}(C, \xi)$.

Если идеальные сфероиды поместить в поле точечного источника, то коэффициенты разложения B_{mn} , входящие в формулу (4), будут иметь иной вид (акустическая связь источника и рассеивателя здесь не рассматривается):

а) звукомягкий сфероид:

$$B_{mn\text{сф}} = -i \cdot \varepsilon_m \cdot k \cdot S_{mn}(C, \eta_1) \cdot R_{mn}^{(3)}(C, \xi_1) \cdot \frac{R_{mn}^{(1)}(C, \xi_0)}{R_{mn}^{(3)}(C, \xi_0)}, \quad (7)$$

б) жесткий сфероид:

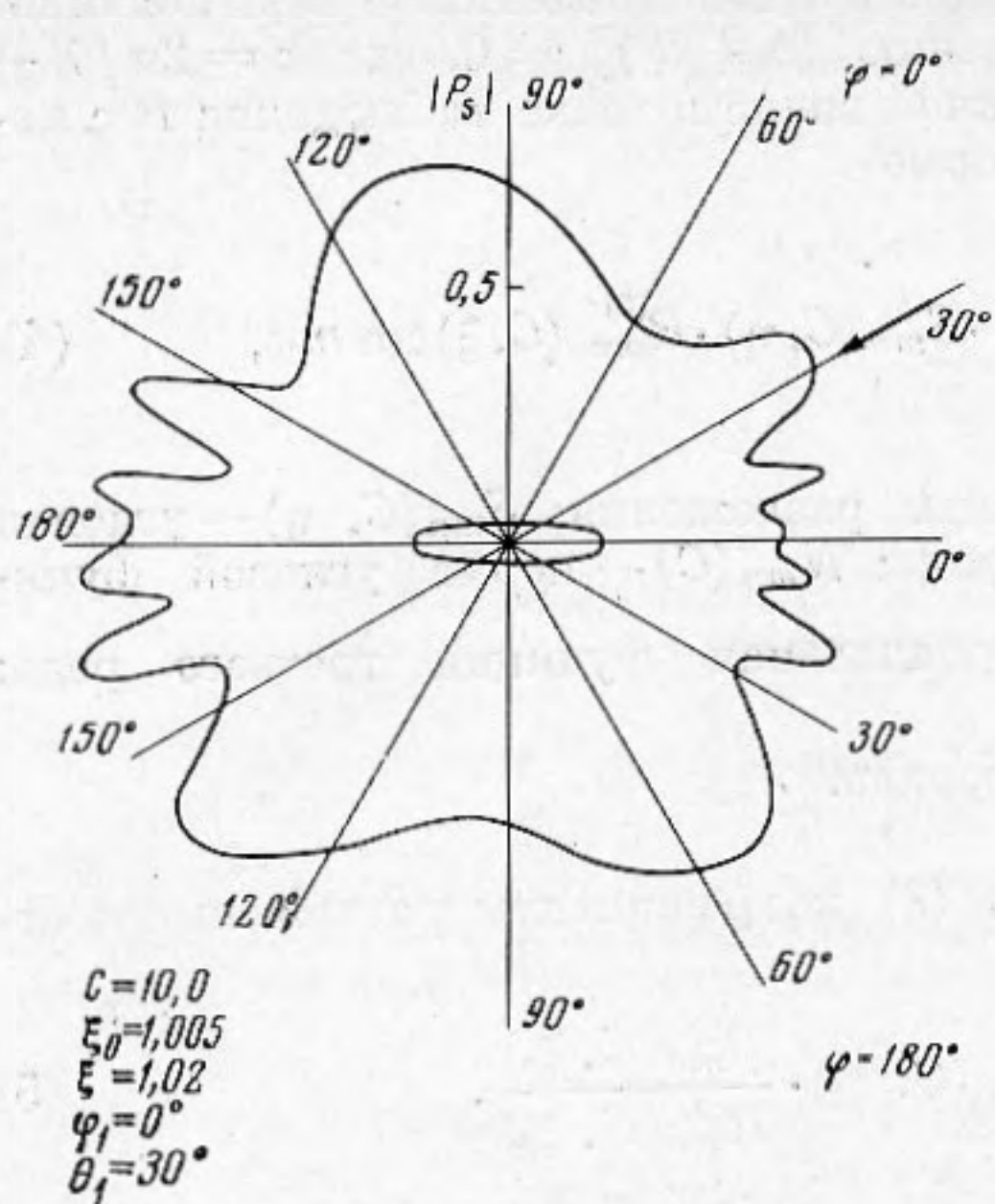
$$B_{mn\text{сф}} = -i \cdot \varepsilon_m \cdot k \cdot S_{mn}(C, \eta_1) \cdot R_{mn}^{(3)}(C, \xi_1) \cdot \frac{R_{mn}^{(1)'}(C, \xi_0)}{R_{mn}^{(3)'}(C, \xi_0)}, \quad (8)$$

где ξ_0 — координаты источника.

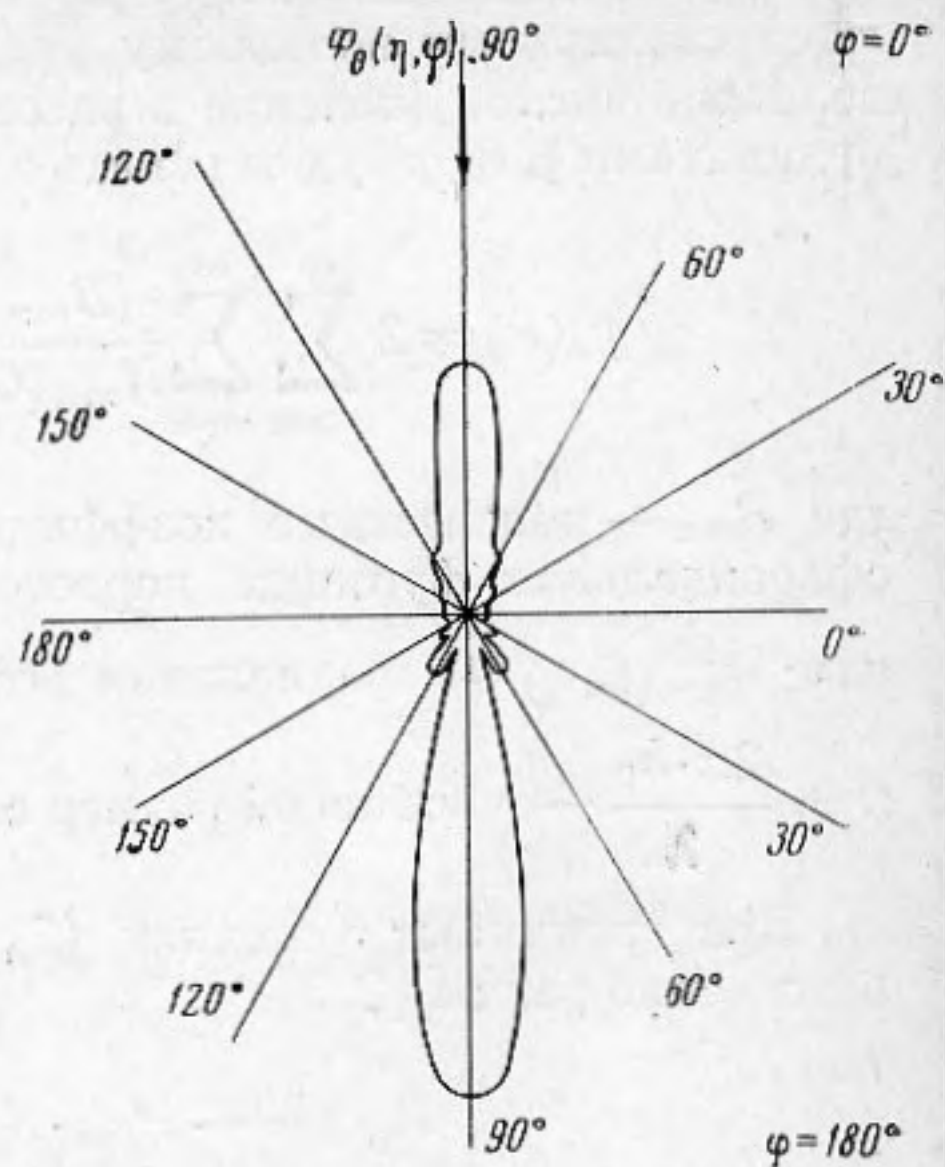
Для дифракции сферической волны характерно наличие искажений на любом расстоянии от препятствия в силу того, что давление в падающей и рассеянной волнах на заметном расстоянии от тела убывают по одному и тому же закону $1/r$ (r — дистанция от начала декартовой системы координат до точки наблюдения). Аналогичная картина возникает при рассмотрении дифракции цилиндрической волны на бесконечном цилиндре [4].

Рассеивающую способность препятствия в направлении на источник принято оценивать в теории дифракции по величине относительного сечения обратного рассеяния σ_0 . Между угловой функцией распределения $\Phi(\eta, \varphi)$ и σ_0 существует простая зависимость:

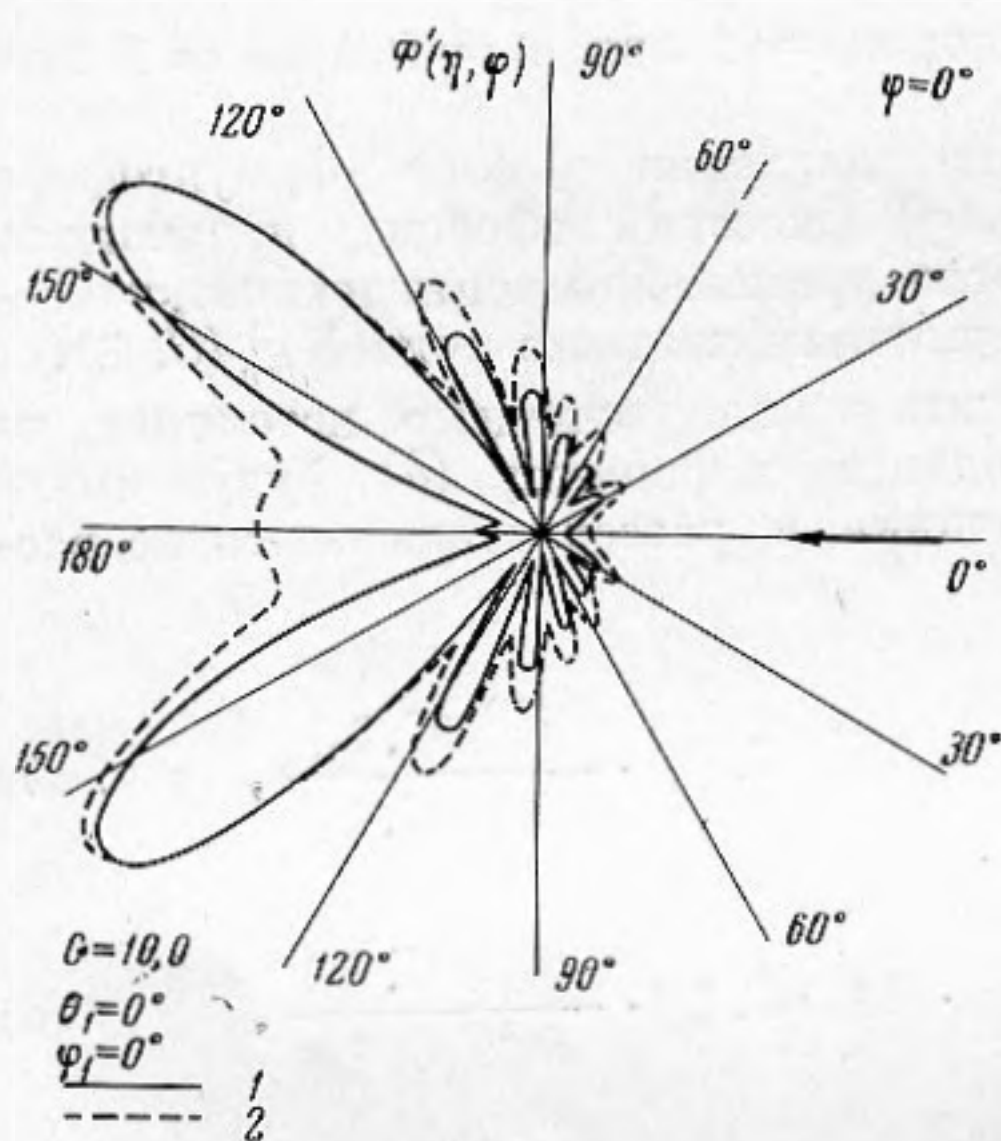
$$\sigma_0 = 4\pi \cdot |\Phi(\eta, \varphi)|^2 / A \cdot |P_i|^2,$$



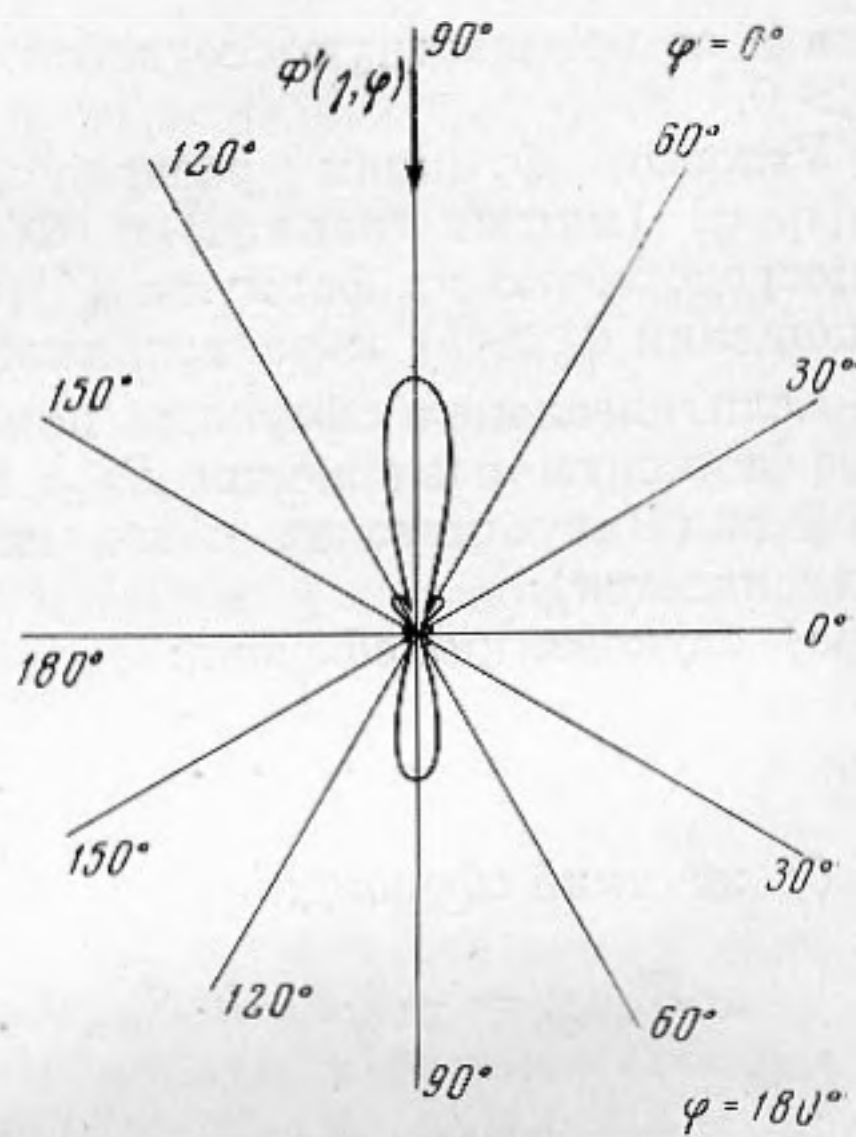
Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3



Фиг. 5

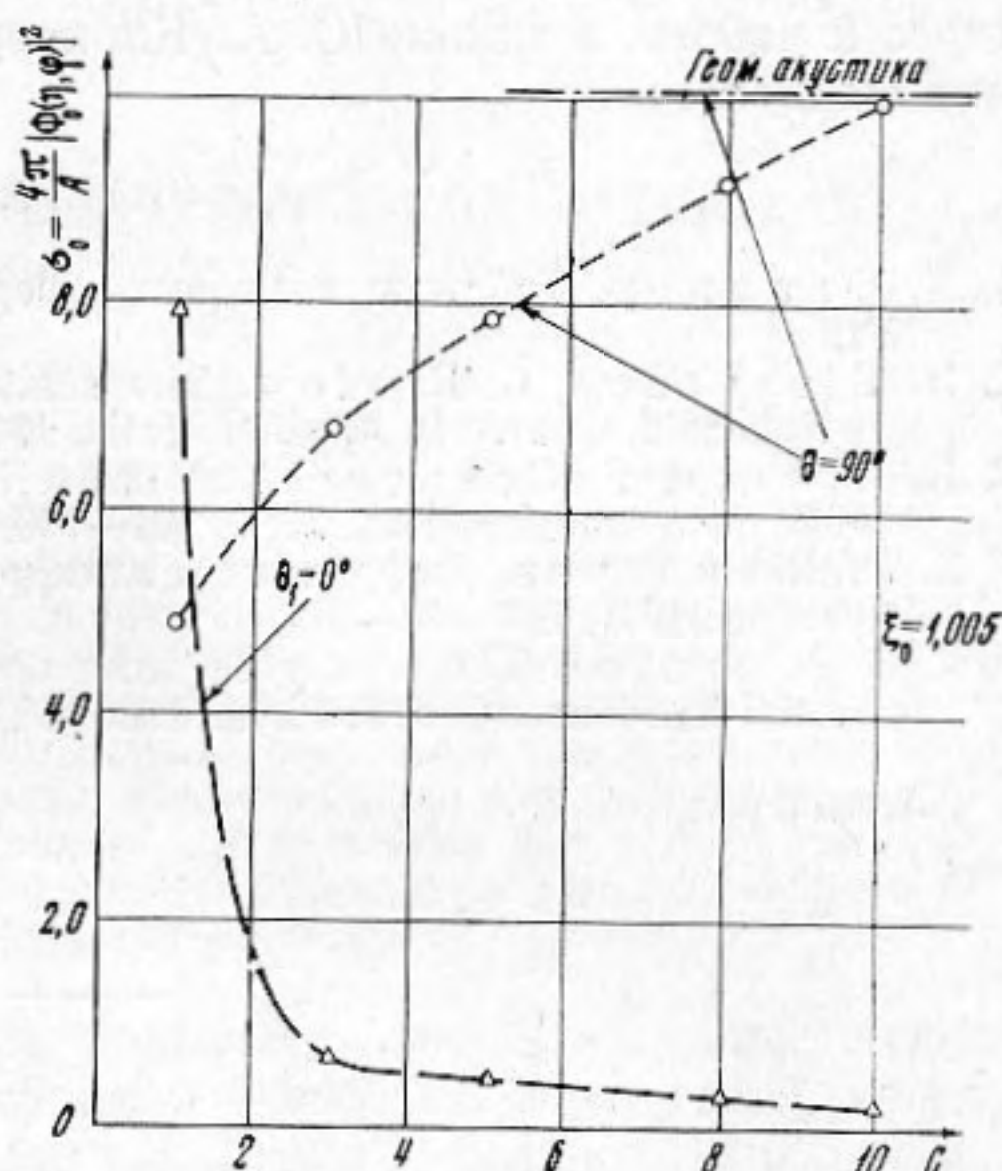
под A подразумевается площадь геометрической тени тела. В конечном виде разложение σ_0 по сферическим функциям (угловым и радиальным) можно записать таким образом:

$$\sigma_0 = \frac{16 \cdot \pi}{k^2 \cdot A} \left| \sum_{n \geq m} \sum_{m=0}^{\infty} i^{-n} \frac{B_{mn}}{N_{mn}(C)} \cdot S_{mn}(C, \eta) \cdot \cos m\varphi \right|^2.$$

Полученные соотношения для характеристик рассеянной волны легли в основу их расчета на ЦВМ. Амплитуда и фаза давления в зоне Френеля

вычислялись вдоль аналитических кривых $\xi = 1,013$ и $\xi = 1,02$ в плоскости $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 180^\circ$ с шагом по θ в 5° . Координата внешней поверхности сфероида принимала два значения: $\xi_0 = 1,005$ и $\xi_0 = 1,0069$. Было выбрано пять волновых размеров: $C = 1,0; 3,0; 5,0; 8,0; 10,0$ и четыре направления падения плоской волны: $\theta_1 = 0^\circ; 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$. При тех же значениях волнового размера C и координаты граничной поверхности ξ_0 было рассчитано сечение обратного рассеяния σ_0 , а также угловые функции $\Phi_0(\eta, \varphi)$ и $\Phi'(\eta, \varphi)$ для плоской и сферической волн (радиальная координата ξ_1 точечного источника была принята равной 2,4; угловая координата $\theta_1 = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$).

Давление p_s можно представить как $p_s = |p_s| \cdot \exp(i\varphi_s)$ и в нужной точке зоны Френеля отдельно вычислять $|p_s|$ и φ_s . На фиг. 2 дано распределение $|p_s|$ вдоль кривой $\xi = 1,02$ при рассеянии от мягкого сфероида с координатой внешней поверхности $\xi_0 = 1,005$, волновой размер его $C = 10,0$. Величины модуля давления откладывались по направлениям (θ') лучей, проведенных из начала декартовой системы координат в расчетные точки кривой (фиг. 1) $\text{tg } \theta' = \text{tg } \theta \cdot$



Фиг. 6

$\cdot (\xi^2 - 1)^{1/2} / \xi$, полагая $\theta = \arccos \eta$. При тех же значениях параметров C, ξ, ξ_0, θ_1 поле вблизи мягкого сфероида оказывается заметно однороднее по амплитуде по сравнению с полем жесткого сфероида. Угловые функции рассеяния в зоне Фраунгофера плоской и сферической волн на жестком сфероиде при $\xi_0 = 1,0069$ и $C = 10,0$ изображены на фиг. 3 (1 — плоская волна, 2 — точечный источник). За исключением узкой зоны вблизи угла рассеяния вперед ($\theta = 180^\circ$) распределения оказались похожими, несмотря на столь разный характер возмущения. На фиг. 4 и 5 представлены угловые характеристики рассеяния мягкого и жесткого сфероидов при $C = 10,0$ и $\xi_0 = 1,005$ для угла облучения $\theta_1 = 90^\circ$. В первом случае зеркальный лепесток оказался заметно меньше дифракционного, во втором случае (жесткий сфероид) — зависимость обратная. Как видно из графиков, угловые характеристики рассеяния при $\theta_1 = 90^\circ$ хорошо согласуются с представлениями лучевой теории, чего нельзя сказать об угловых характеристиках при $\theta_1 = 0^\circ$, даже для $C = 10,0$. Фиг. 6 дает представление об изменении сечения обратного рассеяния σ_0 мягкого сфероида в диапазоне волновых размеров $C = 1,0 \div 10,0$ при углах облучения $\theta_1 = 0^\circ$ и 90° . Если при $\theta_1 = 0^\circ$ функциональная зависимость $\sigma_0(C)$ такого же вида, как для мягкой сферы и мягкого цилиндра (когда ось цилиндра параллельна волновому фронту падающей волны), то поведение σ_0 как функции волнового размера C при $\theta_1 = 90^\circ$ прямо противоположное: с ростом C значение σ_0 возрастает. Для углов облучения $\theta_1 = 30^\circ$ и 60° величина сечения обратного рассеяния звукомягкого сфероида уменьшается с ростом волнового размера, асимптотически приближаясь к значению, даваемому геометрической акустикой. Результаты расчетов σ_0 при $\theta_1 = 0^\circ$ вполне удовлетворительно совпадают с данными работы [5].

Особенностью расчетов характеристик рассеяния на ЦВМ явилось использование нормированных угловых функций $\bar{S}_{mn}(C, \eta)$, определяемых

следующим образом: $\bar{S}_{mn}(C, \eta) = S_{mn}(C, \eta) / N_{mn}^{1/2}(C)$.

Употребление обычных угловых функций первого рода $S_{mn}(C, \eta)$ весьма затруднительно, ввиду быстрого возрастания присоединенных полиномов Лежандра $P_k^m(\eta)$, по которым они раскладываются, с увеличением индексов суммирования m и k .

Авторы выражают благодарность И. И. Клюкину за внимание и интерес к работе, а также Ю. А. Клокову и Е. Седоле за помощь в проведении вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Фламмер. Таблицы волновых сфероидальных функций. М., ВЦ АН СССР, 1962.
2. N. Einspruch, C. Barlow. The scattering of a compressional wave by a prolate Spheroid. Quarterly Applied Math., 1961, 19, 3, 253—258.
3. R. Spence, S. Granger. The scattering of sound from a prolate spheroid. J. Acoust. Soc. America, 1951, 23, 6, 701—706.
4. Е. Л. Шендеров. Дифракция цилиндрической звуковой волны на цилиндре. Акуст. ж., 1961, 7, 3, 370—374.
5. T. B. A. Senior. The scattering from acoustically hard and soft prolate spheroids for axial incidence. Can. J. Phys., 1966, 44, 3, 655—667.

Ленинград

Поступила в редакцию
18 ноября 1968 г.