

УДК 534.6.08 : 534.224

ГОЛОГРАФИЧЕСКАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ БЕГУЩИХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН

В. И. Какчайшвили, Ш. Д. Какчайшвили

Рассматривается формирование оптического изображения акустического объекта при дифракции света на бегущей акустической волне в тонком слое среды.

Визуализированные мнимое и действительное изображения обладают противоположным знаком доплеровского сдвига.

Голографические методы воссоздания оптического изображения в последнее время были распространены на область акустики [1, 2]. В ряде работ (см., например, [3]) по аналогии с оптической голографией используется когерентная звуковая волна, играющая роль опорной, причем визуализирующее световое излучение дифрагирует непосредственно на граничной поверхности среды, где образована система стоячих звуковых волн. Следует отметить, что теоретические результаты по дифракции света на звуковом поле справедливы как для стоячих, так и для бегущих волн. Однако при дифракции на бегущей звуковой волне имеет место дополнительно доплеровский сдвиг частоты визуализирующего света. Рассмотрим вкратце упрощенную теорию формирования изображения в этом случае.

На фиг. 1 объект M излучает установившуюся систему бегущих звуковых волн, обуславливающих отклонение плотности среды от среднего значения. В геометро-акустическом приближении мы имеем

$$\Delta p \approx \frac{A(x_0, y_0, z_0)}{z_0} \cos[\omega t - kR(x_0, y_0, z_0, x, y, z) + \alpha(x_0, y_0, z_0)], \quad (1)$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты по объекту, R — расстояние до точки наблюдения x, y, z , $\alpha(x_0, y_0, z_0)$ — начальная фаза по объекту.

Рассмотрим дифракцию плоской, монохроматической световой волны $\psi = e^{i(\omega't - k'z)}$ на тонком слое среды вблизи сечения $z = 0$. Промодулированное слоем световое поле может быть записано в виде

$$E(x, y, t) = e^{i(\omega't + q\Delta p)}, \quad (2)$$

где q — коэффициент, связанный с оптическими свойствами среды. Разлагая $e^{iq\Delta p}$ в ряд по бесселевым функциям $I_m \left[q \frac{A(x_0, y_0, z_0)}{z_0} \right]$ и огра-

ничившись основными членами, в приближении Кирхгофа — Зоммерфельда [4] для дифрагированного поля $E'(x', y', z', t)$ мы имеем

$$E'(x', y', z', t) \approx \frac{ik'}{2\pi z'} e^{i\omega't} \int_s \left[I_0 \left(q \frac{A}{z_0} \right) e^{-ik'R'} + \right. \\ \left. + iI_1 \left(q \frac{A}{z_0} \right) e^{i(\omega t - kR - k'R' + \alpha)} + iI_1 \left(q \frac{A}{z_0} \right) e^{-i(\omega t - kR + k'R' + \alpha)} \right] ds. \quad (3)$$

Отсюда следует, что информация об объекте содержится только во втором и третьем членах разложения. Обозначая их через $E_2'(x', y', z', t)$ и $E_3'(x', y', z', t)$ и переходя к параксиальному приближению [5], при условии

$$kz' - k'z_0 = 0, \quad (4)$$

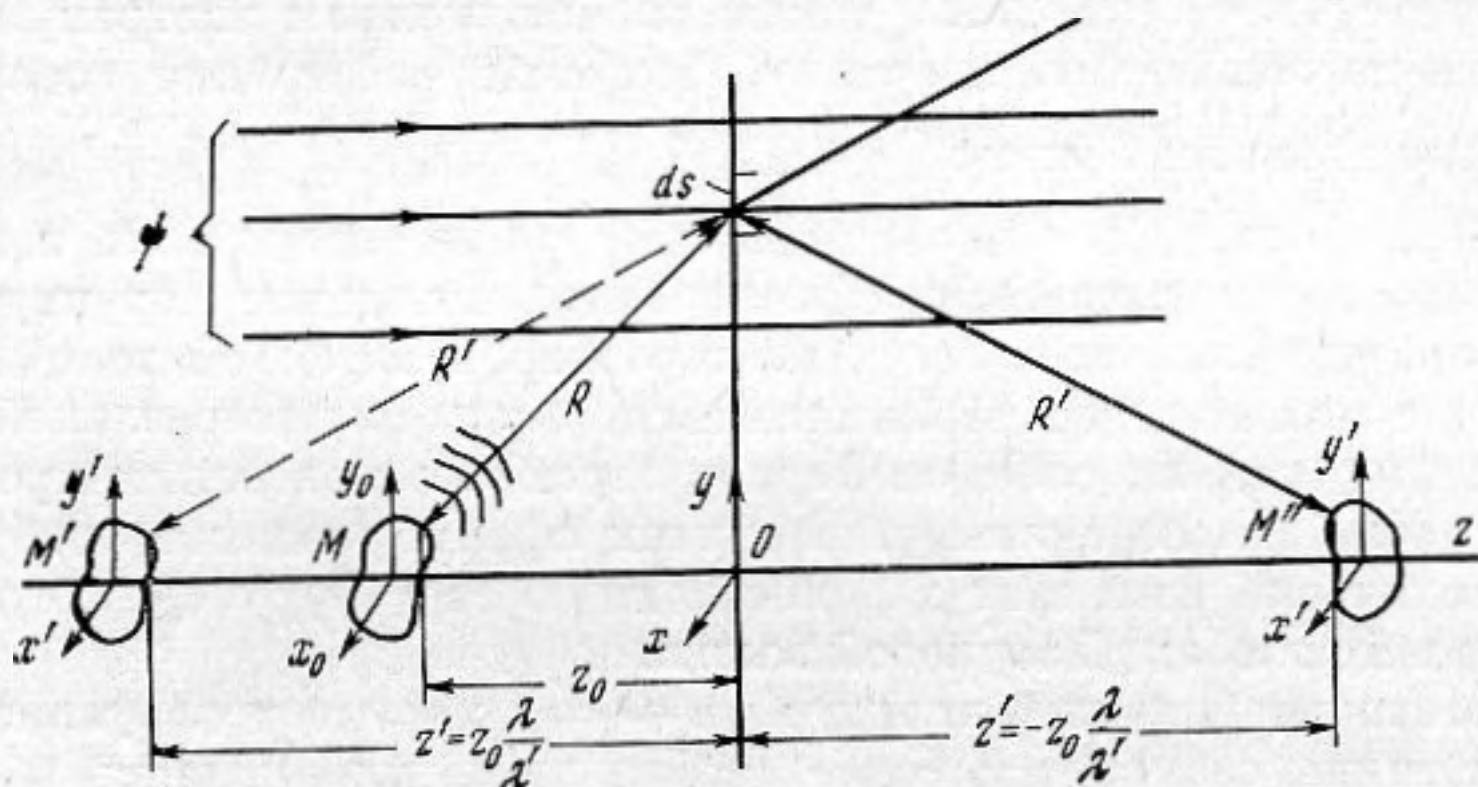
$$kz' + k'z_0 = 0, \quad (5)$$

мы получаем выражения

$$E_2' \approx -\frac{k'}{2\pi z'} I_1 \left(q \frac{k'}{k} \frac{A}{z'} \right) e^{i \left\{ (\omega' + \omega)t + \left(\frac{k^2}{k'} - k' \right) z' + \frac{k'}{2z'} [(x_0^2 - x'^2) + (y_0^2 - y'^2)] + \alpha \right\}} \times \\ \times \int e^{-i \frac{k'}{z'} [(x_0 - x')x + (y_0 - y')y]} ds, \quad (6)$$

$$E_3' \approx \frac{k'}{2\pi z'} I_1 \left(q \frac{k'}{k} \frac{A}{z'} \right) e^{i \left\{ (\omega' - \omega)t + \left(\frac{k^2}{k'} - k' \right) z' + \frac{k'}{2z'} [(x_0^2 - x'^2) + (y_0^2 - y'^2)] - \alpha \right\}} \times \\ \times \int_S e^{-i \frac{k'}{z'} [(x_0 - x')x + (y_0 - y')y]} ds. \quad (7)$$

Интегральные множители, содержащиеся в выражениях (6) и (7), при достаточной протяженности области просвечивания S приближаются к



δ -функциям. Используя известные свойства δ -функции получаем окончательно

$$E_2' \approx -\frac{2\pi z'}{k'} I_1 \left[q \frac{k'}{k} \frac{A \left(x', y', \frac{k}{k'} z' \right)}{z'} \right] \times \\ \times e^{i \left[(\omega' + \omega)t + \left(\frac{k^2}{k'} - k' \right) z' + \alpha \left(x', y', \frac{k}{k'} z' \right) \right]} \delta(x_0 - x', y_0 - y'), \quad (8)$$

$$E_3' \approx \frac{2\pi z'}{k'} I_1 \left[q \frac{k'}{k} \frac{A \left(x', y', -\frac{i}{k'} z' \right)}{z'} \right] \times \\ \times e^{i \left[(\omega' - \omega)t + \left(\frac{k^2}{k'} - k' \right) z' - \alpha \left(x', y', -\frac{k}{k'} z' \right) \right]} \delta(x_0 - x', y_0 - y'). \quad (9)$$

Анализ выражения (8) показывает, что оптическое поле модулировано по фазе подобно полю звуковой волны по объекту. Амплитуда при этом пропорциональна функции I_1 , которая для малых изменений аргумента может считаться линейной, чем и обеспечивается формирование неискаженного по амплитуде мнимого изображения M' . При этом в продольном направлении масштаб оптического изображения изменяется согласно условию (4). Аналогично, выражение (9) описывает действительное изображение M'' , сфокусированное симметрично мнимому. Оптические час-

тоты мнимого и действительного изображений смещены соответственно в синюю и красную стороны.

Рассмотрение, проведенное в параксиальном приближении, может быть дополнено аналогией с фазовыми зональными пластинами [6] конечной апертуры. Действительно, в случае точечного объекта расположенного на расстоянии $z_0 = -l$,

$$\Delta p = \frac{A_0}{\sqrt{l^2 + r^2}} \cos(\omega t - k\sqrt{l^2 + r^2}), \quad (10)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Определение значений r_n , соответствующих экстремальным Δp , позволяет легко провести анализ структуры слоя, отвечающего формуле (10). Выражая расстояние, пройденное фронтом звуковой волны в виде: $vt = l + K(t) \cdot \lambda$ и представив $K(t) = m + \varphi(t)$ как сумму целой части m и остатка $\varphi(t)$, заданного на интервале $(-\infty, +\infty)$ в виде пилообразной функции с областью изменения $(0, 1)$, получим

$$r_n^2 = l \cdot \lambda [n + 2\varphi(t)] + \frac{\lambda^2}{4} [n + 2\varphi(t)]^2. \quad (11)$$

Структура с $(n = 0, 1, 2, \dots)$ таким расположением экстремумов описывает фазовую зональную пластину, фокусное расстояние которой для λ' оптического диапазона равно $l' = \pm l \frac{\lambda}{\lambda'}$ [7].

Член $\varphi(t)$, являющийся периодической функцией времени, в выражении (11) описывает непрерывное поперечное смещение структуры зонной пластины, что связано с бегущим характером звуковой волны. Вследствие этого, а также из-за ограниченности апертуры вырезаемой визуализирующим пучком на слое, за период звукового колебания происходит изменение числа зон на единицу. При этом сформированное изображение точки периодически изменяет дифракционную структуру, флуктуируя по фазе с частотой колебаний звуковой волны.

Для достаточно больших апертур ($n \rightarrow \infty$) характер визуализированного изображения становится более стабильным, приближаясь к картине дифракции на стоячей звуковой волне.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. F. Metherell. Acoustical holography. Sci. Amer., 1969, 221, 4, 36—44.
2. Л. В. Бабин, С. Б. Гуревич. Акустическая голография. Акустический журнал, 1971, 17, 4, 489—512.
3. R. K. Mueller, N. K. Sheridan. Sound holograms and optical reconstruction. Appl. Phys. Lett., 1966, 9, 9, 328—329.
4. A. Sommerfeld. Optics, ed. Acad. Press, New York, 1954, p. 201.
5. E. N. Leith, J. Upatnieks. Reconstructed wavefronts and communication theory. J. Opt. Soc. Am., 1962, 52, 10, 1123—1130.
6. С. М. Райский. Зонная пластинка. УФН, 1952, 47, 515—537.
7. D. Gabor. Microscopy by reconstructed wavefronts. Proc. Roy. Soc., 1951, B64, 449—462.

Институт кибернетики
Тбилиси

Поступила в редакцию
3 октября 1970 г.

УДК 534.26

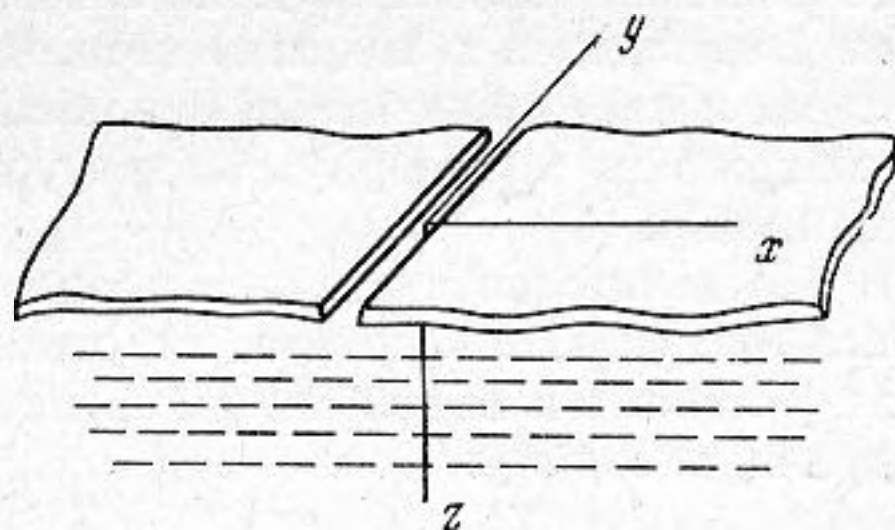
О ВОЛНАХ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ КРОМОК ПЛАСТИН

Д. П. Коузов, В. Д. Лукьянов

Исследуется волна, бегущая вдоль кромки пластины, помещенной в акустическую среду. Указывается случай, когда распространение не сопровождается излучением во внешнюю среду. Дисперсионное уравнение для волнового числа исследуемой волны получается на основании гранично-контактных условий на кромке пластины.

Как известно [1], вблизи края пластины, находящейся в вакууме, может сформироваться волна типа релеевской. Эта волна распространяется в направлении кромки пластины и экспоненциально убывает при удалении от края пластины.

В реальных ситуациях (например, вода-металл, вода-лед) обычно приходится учитывать влияние внешней среды на движение пластины. Наличие контакта с внешней средой может привести к качественным изменениям в волновых процессах в пластине; так, волны, распространение которых сопровождается излучением во внешнюю среду, оказываются затухающими. Ниже проводится исследование волны, распространяющейся вдоль кромки пластины, для случая наличия контакта пластины с внешней средой.



Исследование проведено на следующей простейшей модели: на поверхности идеальной сжимаемой жидкости лежит пластина, разделенная на две части бесконечно тонкой, прямолинейной трещиной. В силу симметрии модели, вдоль кромки пластины могут распространяться волны двух типов: в одной из них колебания противоположащих кромок пластин происходит синфазно (симметричная волна), а в другой — в противофазе (антисимметричная волна).

Пусть сжимаемая жидкость заполняет нижнее полупространство ($-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 < z < \infty$). На поверхности жидкости ($z = 0$) расположена пластина ($-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$), в которой при $x = 0$ имеется бесконечно тонкая, прямолинейная трещина (фиг. 1).

Поле давлений $P(x, y, z)$ в системе определяется однородным уравнением Гельмгольца:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P + k^2 P = 0$$

$$-\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty; 0 < z < \infty$$

при граничном условии:

$$LP(x, y, 0) = \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 - \kappa^4 \right] \frac{\partial}{\partial z} + \nu \right\} P(x, y, 0) = 0 \quad (1)$$

и при гранично-контактных условиях:

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right] P(x, y, 0) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] P(x, y, 0) = 0 \quad (3)$$

На трещине ($x = 0$) мы потребуем непрерывности P .

Здесь $\kappa^4 = m\omega^2/D$ — волновое число пластины, $\nu = \rho\omega^2/D$, m — поверхностная плотность пластины, D — цилиндрическая жесткость пластины, ω — круговая частота (множитель $e^{-i\omega t}$, задающий зависимость процессов от времени, всюду опущен), ρ — плотность жидкости, σ — модуль Пуассона.

Уравнение (1) представляет уравнение изгибных колебаний пластины с учетом контакта с жидкостью, выраженное в терминах давления.

Формулы (2), (3) выражают условия отсутствия на кромке пластины соответственно сосредоточенной силы и сосредоточенного момента.

Мы будем исследовать однородную задачу. Как показано в работе [2], условие непрерывности давления на трещине, не нарушая однородности задачи, автоматически учитывается, если уравнение (1) заменить на

$$LP(x, y, 0) = - \sum_{s=0}^3 B_s(y) \delta^{(s)}(x)$$

где $\delta(x)$, $\delta_{(x)}^s$ — дельта-функция Дирака и ее производные. Это эквивалентно замене механического дефекта (трещины) неким нитевидным источником, находящимся на прямой $x = 0$. Однородность задачи при этом не нарушается вследствие того, что коэффициенты B_s считаются неизвестными и определяются на основании однородных условий (2), (3). Мы рассматриваем трехмерную задачу, поэтому B_s считаем зависящими от переменной y .

Выделим собственный процесс, соответствующий волнам, распространяющимся вдоль кромки пластины: $P(x, y, z) = v(x, z) e^{i\mu y}$. Волновое число μ является неизвестным и ищется в дальнейшем. Для v мы имеем следующую задачу:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v + (k^2 - \mu^2) v = 0$$

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 < z < \infty$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu^2 \right)^2 - \kappa^4 \right] \frac{\partial}{\partial z} + \nu \right\} v(x, 0) = - \sum_{s=0}^3 i^{-s} b_s \delta^{(s)}(x) \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} - (2 - \sigma) \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \right] v(x, 0) = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sigma \mu^2 \right] v(x, 0) = 0 \quad (6)$$

Здесь $B_s(y) = i^{-s} b_s e^{i\mu y}$. Для v выполняется условие излучения.

Будем искать $v(x, z)$ в виде разложения по плоским волнам

$$v(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda) e^{i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - k^2} z} d\lambda$$

Выбор основного листа для $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - k^2}$ традиционный [3]. $p(\lambda)$ найдем, пользуясь граничным (4) и гранично-контактными условиями (5), (6). Из уравнения (4) получаем

$$p(\lambda) = \frac{\sum_{s=0}^3 b_s \lambda^s}{[(\lambda^2 + \mu^2)^2 - \kappa^4] \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - k^2} - \nu}$$

Подставив ν в гранично-контактные условия, получим систему для нахождения b_s .

$$\begin{cases} b_0[P_3 + (2 - \sigma)P_1\mu^2] + b_2[P_5 + (2 - \sigma)P_3\mu^2] = 0 \\ b_0[P_2 + \sigma P_0\mu^2] + b_2[P_4 + \sigma P_2\mu^2] = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} b_1[P_4 + (2 - \sigma)P_2\mu^2] + b_3[P_6 + (2 - \sigma)P_4\mu^2] = 0 \\ b_1[P_3 + \sigma P_1\mu^2] + b_3[P_5 + \sigma P_3\mu^2] = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^n \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - k^2} e^{i0\lambda} d\lambda}{[(\lambda^2 + \mu^2)^2 - \kappa^4] \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - k^2} - \nu}.$$

Здесь использовано обозначение

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{\pm i0\lambda} d\lambda.$$

При получении систем (7), (8) принято во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{-i0\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(-\lambda) e^{i0\lambda} d\lambda.$$

Из формул (7) и (8) видно, что b_s с четными s и нечетными определяются независимо друг от друга. Физически это соответствует тому, что вдоль трещины могут независимо друг от друга распространяться два типа волн: симметричная (P_+) и антисимметричная (P_-) (по отношению к переменной x).

$$P_+ = \frac{e^{i\mu_+ y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b_0 + b_2 \lambda^2) e^{i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 + \mu_+^2 - k^2} z} d\lambda}{[(\lambda^2 + \mu_+^2)^2 - \kappa^4] \sqrt{\lambda^2 + \mu_+^2 - k^2} - \nu},$$

$$P_- = \frac{e^{i\mu_- y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b_1 \lambda + b_3 \lambda^3) e^{i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 + \mu_-^2 - k^2} z} d\lambda}{[(\lambda^2 + \mu_-^2)^2 - \kappa^4] \sqrt{\lambda^2 + \mu_-^2 - k^2} - \nu}.$$

Здесь μ_{\pm} — волновые числа симметричной (μ_+) и антисимметричной (μ_-) волн. Они определяются из условия разрешимости однородных систем (7), (8), т. е. равенства нулю их определителей Δ_+ и Δ_- .

После вычисления интегралов типа P_{2n+1} (см. ниже) уравнения $\Delta_{\pm} = 0$ приобретают вид:

$$\Delta_+ = \pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda^2 + \sigma \mu_+^2)^2 \sqrt{\lambda^2 + \mu_+^2 - k^2} e^{i0\lambda} d\lambda}{[(\lambda^2 + \mu_+^2)^2 - \kappa^4] \sqrt{\lambda^2 + \mu_+^2 - k^2} - \nu} = 0, \quad (9)$$

$$\Delta_- = \pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 [\lambda^2 + (2 - \sigma) \mu_-^2]^2 \sqrt{\lambda^2 + \mu_-^2 - k^2} e^{i0\lambda} d\lambda}{[(\lambda^2 + \mu_-^2)^2 - \kappa^4] \sqrt{\lambda^2 + \mu_-^2 - k^2} - \nu} = 0. \quad (10)$$

Приводя полученные интегралы к интегралам, сходящимся в обычном смысле, имеем:

$$\Delta_+ = \pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\kappa^4 - 2\lambda^2\mu_+^2(1-\sigma) - \mu_+^4(1-\sigma^2)]\sqrt{\lambda^2 + \mu_+^2 + \nu}}{[(\lambda^2 + \lambda_+^2 - \kappa^4)\sqrt{\lambda^2 + \mu_+^2 - k^2 - \nu}]d\lambda = 0 \quad (11)$$

$$\Delta_- = \pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{\lambda^2[\kappa^4 - \mu_-^4(1-\sigma^2)] + 2(1-\sigma)\mu_-^2[x^4 - \mu_-^4]\}\sqrt{\lambda^2 + \mu_-^2 - k^2}}{[(\lambda^2 + \mu_-^2)^2 - \kappa^4]\sqrt{\lambda^2 + \mu_-^2 - k^2 - \nu}} \times \\ \times d\lambda + \nu\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\lambda^2 + 2\mu_-^2(1-\sigma)]d\lambda}{[(\lambda^2 + \mu_-^2)^2 - \kappa^4]\sqrt{\lambda^2 + \mu_-^2 - k^2 - \nu}} = 0. \quad (12)$$

Уравнения (9), (10) или, что то же самое, (11), (12) являются точными дисперсионными уравнениями для нахождения волновых чисел μ_{\pm} .

Интегралы, стоящие в левой части дисперсионных уравнений, могут быть вычислены процедурой, описанной в работе [4], и таким образом корни уравнений определяются точно. Выражения при этом получаются громоздкими, и мы их приводить не будем.

Рассмотрим возможность приближенного нахождения μ_{\pm} . Считая плотность жидкости ρ малой по сравнению с плотностью материала пластины, найдем приближенные значения корней уравнений (9), (10), ограничившись начальными членами степенного разложения.

Функции $\mu_{\pm} = \mu_{\pm}(\nu)$ задаются неявно уравнениями $\Delta_{\pm}(\mu, \nu) = 0$. Мы имеем

$$\mu_{\pm} = \mu_{\pm}^0 + \nu\mu_{\pm}^1 \quad (13)$$

Нулевые члены μ_{\pm}^0 ряда Тейлора определяются из уравнений

$$\Delta_{\pm}(\mu, 0) = 0. \quad (14)$$

Уравнения (14) имеют по одному вещественному корню, которые соответствуют волновым числам волн, распространяющимся вдоль кромки пластины и экспоненциально убывающими при удалении от кромки пластины. Легко убедиться, что μ_+^0 и μ_-^0 равны между собой и совпадают с волновым числом μ_0 волны, распространяющейся вдоль кромки пластины, помещенной в вакуум [1]:

$$\mu_0 = \mu_+^0 = \mu_-^0 = \frac{\kappa}{\sqrt[4]{(1-\sigma)[3\sigma - 1 + 2\sqrt{1-2\sigma+2\sigma^2}]}}$$

Членами первого порядка будут

$$\mu_+^1 = \frac{d\mu_+}{d\nu} \Big|_{\nu=0} = \frac{(\mu_0^4 - \kappa^4)^{5/4}}{\pi\mu_0[\mu_0^4(1-\sigma)(3+\sigma) - \kappa^4(3-4\sigma)]} \times \\ \times [\Phi_4 + 2\sigma\mu_0^2\Phi_2 + \sigma^2\mu_0^4\Phi_0] \\ \mu_-^1 = \frac{d\mu_-}{d\nu} \Big|_{\nu=0} = \frac{(\mu_0^4 - \kappa^4)^{5/4}[\kappa^4 - (1-\sigma)\mu_0^4]}{2\pi\mu_0^3(1-\sigma)^2[(1-\sigma)(3-\sigma)\mu_0^4 - \kappa^4]} \times \\ \times [\Phi_6 + 2\mu_0^2(2-\sigma)\Phi_4 + (2-\sigma)^2\mu_0^4\Phi_2],$$

где

$$\Phi_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^{2n} d\lambda}{[(\lambda^2 + \mu_0^2)^2 - \kappa^4]^2 \sqrt{\lambda^2 + \mu_0^2 - k^2}}$$

При $\mu_0 > k$ (условие $\mu_0 > \kappa$ выполняется всегда) $\Phi_{2n} > 0$ и волны, распространяющиеся вдоль трещины, остаются незатухающими вдоль кромки пластины, как и в случае пластины в вакууме. При $\mu_0 < k$, $\Phi_{2n} = \Phi_{2n}' + i\Phi_{2n}''$, где

$$\Phi_{2n}' = 2 \int_{\sqrt{k^2 - \mu_0^2}}^{\infty} \frac{\lambda^{2n} d\lambda}{[(\lambda^2 + \mu_0^2)^2 - \kappa^4] \sqrt{\lambda^2 + \mu_0^2 - k^2}},$$

$$\Phi_{2n}'' = 2 \int_0^{\sqrt{k^2 - \mu_0^2}} \frac{\lambda^{2n} d\lambda}{[(\lambda^2 + \mu_0^2)^2 - \kappa^4] \sqrt{\lambda^2 + \mu_0^2 - k^2}}.$$

В этом случае Φ_{2n} имеет в рассматриваемом приближении как вещественную, так и мнимую составляющую, т. е. волна, распространяющаяся вдоль трещины, — затухающая вдоль направления распространения.

Если выбрать в качестве μ корни дисперсионных уравнений (9), (10), то уравнения систем (7), (8) становятся линейно зависимыми и допускают решения, отличные от нулевого. В результате мы приходим к следующим точным выражениям для полей

$$P_+ = \frac{e^{i\mu_+ y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda^2 + \sigma\mu_+^2) e^{i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 + \mu_+^2 - k^2} z}}{[(\lambda^2 + \mu_+^2)^2 - \kappa^4] \sqrt{\lambda^2 + \mu_+^2 - k^2 - \nu}} d\lambda, \quad (15)$$

$$P_- = \frac{e^{i\mu_- y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda[\lambda^2 + (2 - \sigma)\mu_-^2] e^{i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 + \mu_-^2 - k^2} z}}{[(\lambda^2 + \mu_-^2)^2 - \kappa^4] \sqrt{\lambda^2 + \mu_-^2 - k^2 - \nu}} d\lambda. \quad (16)$$

При нахождении поля давления вдали от трещины, воспользуемся методом стационарной фазы и получим

$$P_+ = \sqrt{\frac{\pi}{2r \sqrt{\mu_+^2 - k^2}}} \times$$

$$\times \frac{[(k^2 - \mu_+^2)^2 \sin^2 \varphi + \sigma\mu_+^2] \sqrt{k^2 - \mu_+^2} \cos \varphi \cdot e^{\frac{\pi i}{4}} \times e^{i\mu_+ y - \sqrt{\mu_+^2 - k^2} r}}{\{[(k^2 - \mu_+^2) \cdot \sin^2 \varphi + \mu_+^2]^2 - \kappa^4\} \sqrt{\mu_+^2 - k^2} \cdot \cos \varphi - \nu} \quad (17)$$

$$P_- = \sqrt{\frac{\pi}{2r \sqrt{\mu_-^2 - k^2}}} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{k^2 - \mu_-^2} \cdot \sin \varphi [(k^2 - \mu_-^2) \cdot \sin^2 \varphi + (2 - \sigma)\mu_-^2] e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot e^{i\mu_- y - \sqrt{\mu_-^2 - k^2} r}}{\{[(k^2 - \mu_-^2) \cdot \sin^2 \varphi + \mu_-^2]^2 - \kappa^4\} \cos \varphi \sqrt{\mu_-^2 - k^2} - \nu}, \quad (18)$$

где r и φ связаны с x и z соотношениями: $x = r \sin \varphi$, $z = r \cdot \cos \varphi$, φ — угол, отсчитываемый от положительного направления оси z , r — расстояние от трещины до точки наблюдения. Из формул (17) и (18) видно, что волны, распространяющиеся вдоль кромок пластин, не излучают в жидкость в случае $\mu_{\pm} > k$.

Поверхностные волны на пластинке получаются взятием вычетов подынтегральной функции в (15) и (16) в точках, где

$$[(\lambda^2 + \mu_{\pm}^2)^2 - \kappa^4] \sqrt{\lambda^2 + \mu_{\pm}^2 - k^2} - \nu = 0. \quad (19)$$

Считая плотность жидкости малой по сравнению с плотностью материала пластины, корни уравнений (19) можно вычислить по формуле:

$$\lambda_{1,2} = i \left[\sqrt{\mu_{\pm}^2 \pm \kappa^2} - \frac{\nu}{4\kappa^2 \sqrt{(\mu_{\pm}^2 \pm \kappa^2)(\kappa^2 - k^2)}} \right],$$

где $\mu = \mu_{\pm}$.

При $\nu = 0$ мы имеем волны, экспоненциально убывающие при удалении от кромки пластины. В общей ситуации ($\nu \neq 0$) характер волны качественно не изменяется.

Для поля вблизи трещины мы имеем выражение

$$P_+ = \frac{e^{i\mu_+ \nu}}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda^2 + \sigma\mu_+^2) d\lambda}{[(\lambda^2 + \mu_+^2)^2 - \kappa^4] \sqrt{\lambda^2 + \mu_+^2 - k^2 - \nu}} + \right. \\ \left. + 2ir \cos \varphi [P_2(\mu_+) + \sigma\mu_+^2 P_0(\mu_+)] \right\},$$

Формулы (13), (17), (18) показывают, что и в случае контакта с внешней средой вдоль кромки пластины может распространяться волна без затухания вдоль направления распространения. Обычная поверхностная волна, бегущая по пластине, затухает как $R^{1/2}$ (R — расстояние от точки возбуждения до точки наблюдения). Поэтому вдали от точки возбуждения поверхностных волн у кромки пластины можно указать зону, где волна, распространяющаяся вдоль края пластины, будет преобладать в общем поле поверхностных волн.

Исследуем, наконец, интегралы типа P_n

$$P_n = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^n \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - k^2} e^{ix\lambda} d\lambda}{[(\lambda^2 + \mu^2)^2 - \kappa^4] \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - k^2 - \nu}}; \\ 0 \leq n \leq 6, \quad (20)$$

при $n \geq 3$ они являются расходящимися. Величина такого интеграла определяется как величина сходящегося интеграла, который получается из данного деформацией концов контура интегрирования в верхнюю полуплоскость переменной λ . Предполагается, что при такой деформации не пересекаются особые точки подынтегрального выражения.

Укажем некоторые способы сведения интегралов такого типа к сходящимся в обычном смысле и приведем вычисление P_n для случая нечетных n .

Избавимся в подынтегральном выражении от иррациональности в знаменателе. Иррациональная часть полученного при этом интеграла представляет собой ($n \leq 6$) интеграл, сходящийся в обычном смысле; рациональную мы вычисляем согласно теореме о вычетах:

$$P_n(\mu) = 2\pi i \sum_{\text{Im } \lambda_s > 0} \text{Res} \frac{(\lambda_s^2 + \mu^2 - k^2) [(\lambda_s^2 + \mu^2)^2 - \kappa^4]}{[(\lambda_s^2 + \mu^2)^2 - \kappa^4]^2 (\lambda_s^2 + \mu^2 - k^2) - \nu^2} + \\ + \nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^n \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - k^2} d\lambda}{[(\lambda^2 + \mu^2)^2 - \kappa^4]^2 (\lambda^2 + \mu^2 - k^2) - \nu^2}. \quad (21)$$

Здесь суммирование производится по корням уравнения (19), расположенным в верхней полуплоскости.

Рассмотрим P_n при нечетных n ; тогда интеграл в формуле (21) в силу нечетности подынтегральной функции равен 0. Сделав в сумме вычетов замену $\lambda_s^2 + \mu^2 = \lambda_i^2$, получаем

$$P_1(\mu) = P_1(0); \quad P_3(\mu) = P_3(0) - \mu^2 P_1(0), \\ P_5(\mu) = P_5(0) - 2\mu^2 P_3(0) + \mu^4 P_1(0).$$

В силу симметричного расположения корней λ_i [3] относительно вещественной оси, имеем

$$P_{2m+1} = -\pi i \operatorname{Res}_{\infty} \frac{\lambda^{2m+1} [\lambda^4 - \kappa^4] (\lambda^2 - k^2)}{(\lambda^4 - \kappa^4)^2 (\lambda^2 - k^2) - \nu^2}.$$

В результате мы получаем $P_1(\mu) = 0$; $P_3(\mu) = \pi i$; $P_5(\mu) = -2\mu^2 \pi i$. При n четном интегралы P_n удобно приводить к сходящимся следующим путем: заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2n} e^{i0\lambda} d\lambda = 0. \quad (22)$$

Выделяя у подынтегрального выражения в формуле (20) главную часть и воспользовавшись формулой (22), мы приводим интегралы P_n к сходящимся. Этим способом из формул (9), (10) получены выражения (11), (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. К. Коненков. Об изгибной волне релеевского типа. Акуст. ж., 1960, 6, 2.
2. Д. П. Коузов. О явлении резонанса при дифракции гидроакустической волны на системе трещин в упругой пластине ПММ, 28, 3, 1964.
3. Д. П. Коузов. Дифракция цилиндрической волны на стыке двух полубесконечных пластин. ПММ, 1969, 33, 2.
4. Д. П. Коузов. Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине. ПММ, 1963, 27, 6.

Математический ин-т
им. В. А. Стеклова
Ленинградское отделение

Поступила в редакцию
1 июня 1971 г.