

УДК 532.528

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЛЬСИРУЮЩИХ ПУЗЫРЬКОВ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Г. Н. Кузнецов, И. Е. Щёкин

Рассмотрена задача о взаимодействии двух пульсирующих и движущихся поступательно пузырьков в вязкой жидкости. Получена система четырех дифференциальных уравнений, позволяющая определить параметры радиального и поступательного движения пузырьков с точностью до членов порядка $(a/l)^3$ и $(b/l)^3$, где a и b — радиусы пузырьков, l — расстояние между ними. Методом малого параметра в первом и втором приближениях получены аналитические выражения для скорости движения пузырьков и времени их взаимодействия. Результаты теоретического рассмотрения сопоставляются с экспериментальными значениями параметров движения пузырьков.

Скорость дегазации жидкости, ее кавитационная прочность, протекание самых различных процессов в элементарной кавитационной области в существенной мере зависят от способности микропузырьков объединяться под действием внешних возмущений, например под действием пульсаций давления [1—3].

Как частный случай представляет интерес задача о взаимодействии двух синфазно пульсирующих пузырьков одинакового размера, что аналогично взаимодействию пульсирующего пузырька с твердой стенкой. Это взаимодействие может оказать заметное влияние на энергию и форму кавитационных ударных волн и, следовательно, на интенсивность кавитационной эрозии и спектр мощности кавитационного шума.

Взаимодействие кавитационного пузырька с твердой стенкой рассматривалось в работах [4—7]. Авторы этих работ делают важный вывод о существенном влиянии параметров поступательного движения на скорость радиального движения пузырьков под действием перепада внешнего давления. Однако результаты работ [4—7] получены в нулевом приближении для потенциала скорости и не учитывают вязких сил в уравнении поступательного движения. Ниже рассматривается задача о взаимодействии пузырьков в более общей постановке. В частности, решается обратная задача: определяется влияние радиальных пульсаций на параметры поступательного движения пузырьков.

Пусть две сферы с центрами в точках A и B и радиусами a и b находящиеся на расстоянии l друг от друга, пульсируют со скоростями \dot{a} и \dot{b} и движутся поступательно навстречу друг другу со скоростями U и V в неограниченной несжимаемой маловязкой жидкости. Положение любой точки P в меридиональной плоскости будем определять полярными координатами (r, θ) с полюсом в точке A или полярными координатами (r_1, θ_1) с полюсом в точке B . Потенциал поля скоростей будем искать в виде

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (1)$$

где функции φ_1 и φ_2 во всей жидкости определяются условиями:

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad \Delta\varphi_2 = 0,$$

$$-\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right)_{r=a} = U \cos \theta + \dot{a}, \quad -\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\right)_{r=a} = 0, \quad (2)$$

$$-\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r_1}\right)_{r_1=b} = 0, \quad -\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r_1}\right)_{r_1=b} = V \cos \theta_1 + \dot{b} \quad (3)$$

и их производные по координатам обращаются в нуль на бесконечности. Удовлетворяя этим условиям, напишем потенциал течения жидкости с точностью до членов $O(l^{-3})$

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{Ua^3 \cos \theta}{2r^2} + \frac{\dot{a}a^2}{r} + \frac{Ua^3b^3 \cos \theta_1}{2l^3r_1^2} + \frac{\dot{a}a^2b^3 \cos \theta_1}{2l^2r_1^2} + \\ & + \frac{3}{2} \frac{\dot{a}a^2b^4 \cos^2 \theta_1}{l^3r_1^2} - \frac{\dot{a}a^2b^4}{2l^3r_1^2} + \frac{Vb^3 \cos \theta_1}{2r_1^2} + \frac{\dot{b}b^2}{r_1} + \\ & + \frac{Va^3b^3 \cos \theta}{2l^3r^2} + \frac{\dot{b}a^3b^2 \cos \theta}{2l^2r^2} + \frac{3}{2} \frac{\dot{b}a^4b^2 \cos \theta}{l^3r^2} - \frac{\dot{b}a^4b^2}{2l^3r^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Кинетическая энергия жидкости может быть вычислена по значениям потенциала и его производных на граничных поверхностях при сформулированных граничных условиях. В неподвижной системе координат с началом в точке O с той же точностью она имеет значение

$$\begin{aligned} T = \pi \rho \left[\frac{1}{3} a^3 \dot{x}_1^2 + 2a^3 \dot{a}^2 - 2 \frac{a^3 b^2}{l^2} \dot{x}_1 \dot{b} - 2 \frac{a^3 b^3}{l^3} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{a^2 b^3}{l^2} \dot{a} \dot{x}_2 + 4 \frac{a^2 b^2}{l} \dot{a} \dot{b} + \frac{1}{3} b^3 \dot{x}_2^2 + 2b^3 \dot{b}^2 \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где x_1 и x_2 — расстояния центров A и B пузырьков от неподвижного начала O , лежащего на прямой, соединяющей эти точки, $l = x_2 - x_1$, ρ — плотность жидкости.

Использование значения кинетической энергии (5) позволяет получить с помощью метода обобщенных координат систему дифференциальных уравнений радиального и поступательного движения двух сферических пузырьков:

$$\begin{aligned} a\ddot{x}_1 + 3\dot{a}\dot{x}_1 - 15 \frac{b^3}{l^3} \dot{a}\dot{x}_2 - 3 \frac{ab^2}{l^3} \dot{b}\dot{x}_2 - 3 \frac{ab^3}{l^3} \ddot{x}_2 + 9 \frac{ab^3}{l^4} \dot{x}_2^2 - \\ - 15 \frac{b^2}{l^2} \dot{a}\dot{b} - 6 \frac{ab}{l^2} \dot{b}^2 - 3 \frac{ab^2}{l^2} \dot{b} = \frac{3Q_I}{2\rho\pi a^2}, \\ b\ddot{x}_2 + 3\dot{b}\dot{x}_2 - 15 \frac{a^3}{l^3} \dot{b}\dot{x}_1 - 3 \frac{a^2b}{l^3} \dot{a}\dot{x}_1 - 3 \frac{a^3b}{l^3} \ddot{x}_1 - 9 \frac{a^3b}{l^4} \dot{x}_1^2 + \\ + 15 \frac{a^2}{l^2} \dot{a}\dot{b} + 6 \frac{ab}{l^2} \dot{a}^2 + 3 \frac{ba^2}{l^2} \ddot{a} = \frac{3Q_{II}}{2\rho\pi b^2}, \\ a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 + \frac{b^2}{2l^2} \dot{b}\dot{x}_2 + \frac{b^2}{2l^2} b\ddot{x}_2 - \frac{b^3}{l^3} \dot{x}_2^2 + \frac{5}{2} \frac{b^3}{l^3} \dot{x}_1\dot{x}_2 + \\ + 2 \frac{b}{l} \dot{b}^2 + \frac{b^2}{l} \dot{b} + \frac{5}{2} \frac{b^2}{l^2} \dot{x}_1\dot{b} - \frac{1}{4} \dot{x}_1^2 = \frac{Q_{III}}{4\rho\pi a^2}, \\ \dot{b}\dot{b} + \frac{3}{2} \dot{b}^2 - \frac{a^2}{2l^2} \dot{a}\dot{x}_1 - \frac{a^2}{2l^2} a\ddot{x}_1 - \frac{a^3}{l^3} \dot{x}_1^2 + \frac{5}{2} \frac{a^3}{l^3} \dot{x}_1\dot{x}_2 + \\ + 2 \frac{a}{l} \dot{a}^2 + \frac{b^2}{l} \ddot{a} - \frac{5}{2} \frac{a^2}{l^2} \dot{a}\dot{x}_2 - \frac{1}{4} \dot{x}_2^2 = \frac{Q_{IV}}{4\rho\pi b^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем считать, что поле скоростей в идеальной жидкости совпадает с полем скоростей в маловязкой жидкости [8]. Тогда для обобщенных внешних сил Q_I и Q_{II} при поступательном движении пузырьков относительно вязкой жидкости получим следующие выражения:

$$Q_I = -C_{D_1} \frac{\rho}{2} \left(\dot{x}_1 - \frac{b^2}{l^2} \dot{b} \right) S_1, \quad Q_{II} = C_{D_2} \frac{\rho}{2} \left(\dot{x}_2 - \frac{a^2}{l^2} \dot{a} \right) S_2, \quad (7)$$

где C_{D_1}, C_{D_2} — коэффициенты вязкого сопротивления, которые мы примем равными таковым для жестких сфер, аналогично работе [9], S_1 и S_2 — площади диаметрального сечения пузырьков. Тогда

$$C_{D_{1,2}} = 0,4 + \frac{24}{Re_{1,2}}, \quad Re_1 = \frac{2a|\dot{x}_1|}{\nu}, \quad Re_2 = \frac{2b|\dot{x}_2|}{\nu},$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости. Обобщенные силы, определяющие характеристики радиального движения пузырьков, можно написать в виде [10]

$$Q_{III} = \left[-\frac{2\sigma}{a} + \left(P_0 - P_n + \frac{2\sigma}{a_0} \right) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3\gamma} - P_1(t) + P_n - 4\mu \frac{\dot{a}}{a} \right] 4\pi a^2, \quad (8)$$

$$Q_{IV} = \left[-\frac{2\sigma}{b} + \left(P_0 - P_n + \frac{2\sigma}{b_0} \right) \left(\frac{b}{b_0} \right)^{3\gamma} - P_2(t) + P_n - 4\mu \frac{\dot{b}}{b} \right] 4\pi b^2,$$

где P_0 — статическое давление, P_n — давление насыщенных паров, $P_{1,2}(t)$ — внешние давления, σ — коэффициент поверхностного натяжения, a_0 и b_0 — начальные радиуса, соответствующие состоянию статического равновесия, μ — коэффициент динамической вязкости, γ — показатель политропы.

Анализ системы уравнений (6) с учетом формул (7), (8) позволяет сделать следующие выводы.

1. Параметры радиального и поступательного движений пузырьков связаны между собой существенно нелинейно, причем их взаимное влияние тем значительнее, чем больше величины (a/l) и (b/l) .

2. Уменьшение текущих значений a и b приводит к росту \dot{x}_1 и \dot{x}_2 и наоборот. Причиной этого обстоятельства является возможность взаимного перехода кинетической энергии радиального и поступательного движений. Однако при заданных обобщенных силах наличие поступательного движения уменьшает величину кинетической энергии радиального движения.

3. Вязкостный член в уравнениях, описывающих поступательное движение уменьшает скорость этого движения и должен влиять на величины \dot{a} и \dot{b} , поэтому его следует учитывать наряду с другими диссипативными членами.

4. При больших значениях (a/l) и (b/l) члены, учитывающие различную степень приближения, становятся соизмеримыми и их следует учитывать тем полнее, чем ближе между собой расположены пузырьки.

5. В уравнениях поступательного движения имеют место квадратичные члены, определяющие стационарную направленную миграцию пульсирующих пузырьков в результате их взаимодействия под действием так называемых сил Бьеркнесса [11]. Однако более общее решение задачи, чем в работе [11], позволило уточнить величину силы взаимодействия, определяющей перемещение центров пузырьков. Эта сила с учетом более высокого приближения может быть написана в виде

$$F = 4\pi\rho \frac{a^2 b^2}{l^2} \dot{a} \dot{b} - 6\pi\rho \frac{a^3 b^3}{l^4} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + 4\pi\rho \frac{a^2 b^3}{l^3} \dot{a} \dot{x}_2 - 4\pi\rho \frac{a^3 b^2}{l^3} \dot{b} \dot{x}_1. \quad (9)$$

Первый член в этом выражении равен силе Бьеркнесса [11], второй — силе Кёнига [12] при условии, что пузырьки осциллируют вдоль соединяющей их линии. Остальные члены характеризуют нелинейное взаимодействие поступательного и радиального движения. Из выражения (9) видно, что каждая из сил является определяющей в некотором интервале значений l . Следует отметить, что учет членов порядка l^{-3} при записи потенциала скорости φ уточняет не только величину силы взаимодействия, но и значение инерционных членов в уравнениях движения.

6. Уравнения (6) при $l \rightarrow \infty$ переходят в уравнения, определяющие параметры независимым образом пульсирующих и движущихся поступательно пузырьков в вязкой несжимаемой жидкости при наличии возмущений. Решение этой системы будет учитывать поступательное движение пузырьков при условии, что их начальные скорости \dot{x}_{10} и \dot{x}_{20} при $t = 0$ не равны нулю. В случае $l \rightarrow \infty$ и $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$ система (6) вырождается в известные уравнения Нолтинга — Непайерса [10]. Полученная система уравнений позволяет определить параметры радиального и поступательного движения пузырьков, в том числе при соизмеримых величинах a , b и l . При $\dot{a} = \dot{b}$ и $a_0 = b_0$ система уравнений описывает движение пузыря в поле давления вблизи твердой стенки. При $a_0 = b_0$, $\dot{a} = -\frac{b^2}{a^2}\dot{b}$

система уравнений определяет движение пузырька у мягкой стенки при условии, что деформацией поверхности раздела мы пренебрегаем.

Как частный случай применения системы уравнений (6), рассмотрим задачу о взаимодействии двух пульсирующих по изотермическому закону пузырьков радиуса a , находящихся на расстоянии $2h$ друг от друга в пучности давления стоячей волны или, что почти то же самое, — в фокальном пятне акустического концентратора. В этом случае радиальное движение пузырьков определяется уравнением

$$\left(P_0 + P_m \sin 2\pi ft + \frac{2\sigma}{a}\right)a^3 = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{a_0}\right)a_0^3, \quad (10)$$

где P_m — амплитуда звукового давления, $f = 1/T$ — частота, T — период пульсации давления. Тогда уравнения движения пузырьков с точностью до членов $O(h^{-2})$ в безразмерных переменных можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \eta\ddot{\beta} + 3\dot{\eta}\dot{\beta} + \frac{3}{4}\frac{\eta^3}{\beta^2}\ddot{\eta} + \frac{21}{4}\dot{\eta}^2 = -0,3\beta^2 + 0,15\dot{\eta}\dot{\beta}\frac{\eta^2}{\beta^2} - \\ - 9\frac{M\dot{\beta}}{\eta} + \frac{9}{4}M\frac{\dot{\eta}}{\beta}\eta, \quad \eta^3 = \frac{1+E}{1+\varepsilon \sin 2\pi\tau + \frac{E}{\eta}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\eta = a/a_0$, $\beta = h/a_0$ — безразмерный радиус пузырька и, соответственно, половина безразмерного расстояния между пузырьками, т. е. безразмерное расстояние до плоскости симметрии; $M = \mu/\rho a_0 U$ — безразмерная вязкость жидкости, $E = 2\sigma/a_0 P_0$ — безразмерный коэффициент поверхностного натяжения, $U = a_0/T$ — характерная скорость, T — период колебания, $\tau = t/T$ — безразмерное время; $\varepsilon = P_m/P_0$.

При небольших амплитудах давления величину ε можно считать малым параметром. В этом случае расстояние до плоскости симметрии между пузырьками можно представить как

$$\beta = \beta_0 + \beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2. \quad (12)$$

Тогда в нулевом приближении

$$\beta_0 = \text{const.} \quad (13)$$

В первом приближении пузырька мы получаем для скорости поступательного движения выражение:

$$\dot{\beta}_1 = A_1(\cos 2\pi\tau - e^{-9M\tau}) + A_2 \sin 2\pi\tau, \quad (14)$$

где

$$A_1 = \frac{\pi(81M^2 - 12\pi^2)}{2\beta^2(3 + 2E)(81M^2 + 4\pi^2)}, \quad A_2 = \frac{36\pi^2 M}{\beta^2(3 + 2E)(81M^2 + 4\pi^2)}$$

Из формулы (14) видно, что первое приближение дает среднее за период продвижение лишь на начальном участке, пока $e^{-9M\tau} \neq 0$.

Во втором приближении при $e^{-9M\tau} \rightarrow 0$ (т. е. на установившемся участке) средняя скорость за период будет

$$\dot{\beta}_2 = \frac{\pi^2 Q}{18M\beta^2(3 + 2E)^2}, \quad (15)$$

где

$$Q = \frac{81(M/\pi)^2[1,95 + 2,4\beta_0 - 47\beta_0^3] + 1,8 - 12\beta_0^3}{\beta_0^3[81(M/\pi)^2 + 4]} - 12 - \frac{388,8(M/\pi)^2 + 0,075[81(M/\pi)^2 - 12]^2}{\beta_0^2[81(M/\pi)^2 + 4]^2}.$$

Величина $\bar{v} = \varepsilon^2 \dot{\beta}_2$ является средней скоростью сближения пузырьков. Следует заметить, что как при $M \ll \pi$, так и при $M \gg \pi$ $\bar{v} \sim M^{-1}$.

$$\bar{v} = \frac{\varepsilon^2 \pi^2 Q}{18M\beta^2(3 + 2E)^2}. \quad (16)$$

Соотношение (16) в размерном виде может быть представлено как

$$v = \frac{\pi^2 \rho P_m^2 a_0^5 f^2 Q}{162\mu h^2 \left(P_0 + \frac{4\sigma}{3a_0}\right)^2}. \quad (17)$$

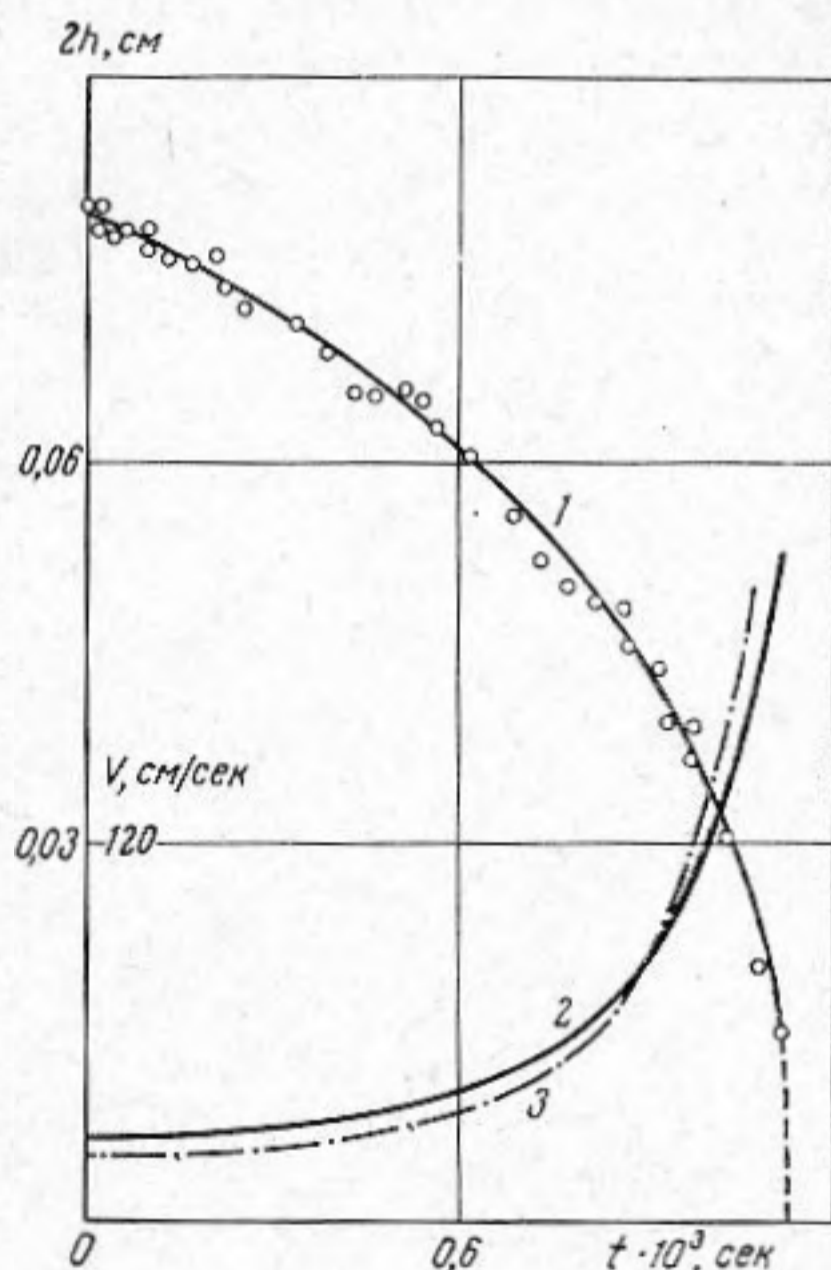
Для очень маленьких пузырьков, когда силы поверхностного натяжения существенно превосходят статическое давление, $P_0 \ll 2\sigma/a_0$ и скорость v будет пропорциональна σ^{-2} , a_0^7 , P_m^2 , f^2 , h^{-2} , μ^{-1} . Зависимость расстояния до плоскости симметрии между пузырьками от времени мы находим из уравнения $d\beta/d\tau = \bar{v}$, откуда

$$\beta^3 = A\varepsilon + \beta_0^3, \quad (18)$$

где

$$A = \frac{\varepsilon^2 \pi^2 Q}{6M(3 + 2E)^2}.$$

Кривые 1, 2 фигуры представляют собой зависимости расстояния между пузырьками и скорости их сближения от времени, рассчитанные по формулам (18), (17). На фигуре приведены также аналогичные зависимости, полученные экспериментально в работе [13], обозначенные кружочками и кривой 3. Сравнение проводилось для пузырьков радиуса $a_0 =$



$= 0,00747$ см, находящихся на начальном расстоянии друг от друга $2h = 0,079$ см при частоте звукового поля $f = 10$ кгц, амплитуде давления $P_m = 0,5$ атм и вязкости $\mu = 0,01$ г/см · сек. Экспериментальные результаты хорошо совпадают с теоретическими зависимостями для $2h(t)$ и $v(t)$. Расчетные зависимости для $2h(t)$ и $v(t)$ также хорошо согласуются с результатами эксперимента [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Ильичев. О влиянии коагуляции зародышей на кавитационную прочность. Акуст. ж., 1967, 13, 2, 300—301.
2. В. П. Елистратов, В. И. Ильичев, В. Л. Корец. Некоторые особенности динамики кавитационной области. Тр. Акуст. ин-та АН СССР, 1968, 7, 20—26.
3. О. А. Капустина. Газовый пузырек в звуковом поле малой амплитуды. Акуст. ж., 1969, 15, 4, 489—504.
4. Р. Коул. Подводные взрывы. М., ИЛ, 1950.
5. Г. А. Хорошев. О влиянии стенки на процесс захлопывания кавитационных полостей. Инж.-физ. ж., 1963, 1, 59—65.
6. А. Н. Коровкин, Ю. Л. Левковский. Исследование замыкания кавитационной каверны вблизи твердой стенки. Инж.-физ. ж., 1967, 12, 2, 246—253.
7. Ю. Л. Левковский, Г. Г. Судакова. Влияние твердой стенки на замыкание сферической кавитационной каверны. Инж.-физ. ж., 1968, 15, 2, 241—247.
8. А. М. Головин, В. Г. Левич, В. В. Толмачев. Гидродинамика системы пузырей в жидкости малой вязкости. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1966, 2, 63—71.
9. Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло. Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
10. А. Д. Перник. Проблемы кавитации. Л., Судостроение, 1966.
11. С. А. Вьеркнес. Hidrodynamische Fernkräfte, Leipzig, 1915.
12. F. König. Hidrodynamische-akustische Untersuchungen. Ann. Phys., 1891, 42, 3, 353—370.
13. В. Ф. Казанцев. Движение газовых пузырьков в жидкости под действием сил Бьеркнеса, возникающих в акустическом поле. Докл. АН СССР, 1959, 129, 1, 64—67.

Акустический институт
АН СССР,
Москва

Поступила в редакцию
14 декабря 1970 г.