

УДК 534.26

К ДИФРАКЦИИ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ШАРЕ  
С НЕКОНЦЕНТРИЧЕСКИМ ШАРОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

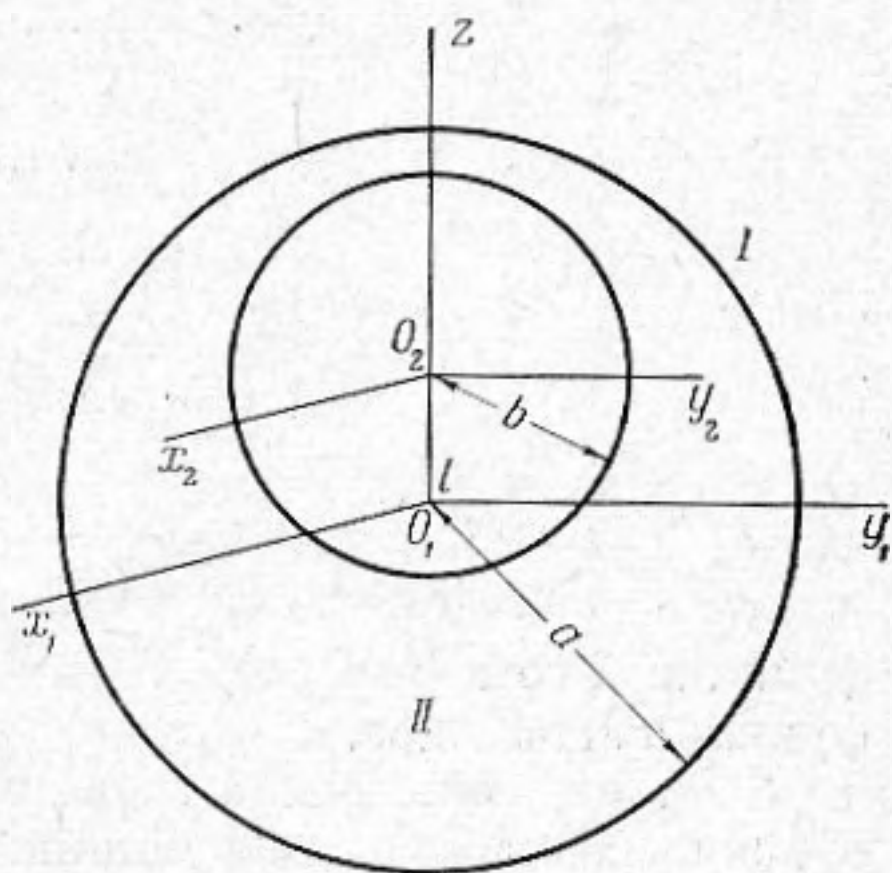
Л. А. Марневская

Методом разделения переменных решается задача о дифракции сферической или плоской звуковой волны на шаре с неконцентрическим шаровым включением. Внутренний шар предполагается либо абсолютно мягким, либо абсолютно жестким. Источник сферической звуковой волны может располагаться как вне большего шара, так и между шарами. Приводятся диаграммы направленности вторичного и полного полей в волновой зоне в зависимости от изменения сферического угла  $\theta_1$ , для различного положения источника относительно линии центров шаров и различной его удаленности от начала координат.

В работах [1, 2] нами решалась задача о дифракции плоской звуковой волны с единичной амплитудой на двух разнесенных абсолютно мягких или жестких шарах одинакового радиуса. В настоящей работе тем же методом (методом разделения переменных) решается задача о дифракции сферической или плоской звуковой волны на пронизываемом шаре с неконцентрическим шаровым включением. Внутренний шар предполагается либо абсолютно мягким, либо абсолютно жестким. Источник сферической звуковой волны может находиться как в области вне большего шара (среда I), так и между шарами (среда II). Радиус большего шара равен  $r_1 = a$ , меньшего —  $r_2 = b$ , расстояние между их центрами равно  $l$  (фиг. 1), при этом  $b \leq l$  либо  $b > l$ . Физические свойства внешней среды и среды, заключенной между шарами, характеризуются плотностью  $\rho_i$  и скоростью распространения звука  $c_i$  ( $i = 1, 2$ ) соответственно.

Задача состоит в отыскании потенциалов скоростей  $u^{(1)}$  и  $u^{(2)}$  вторичных звуковых полей, возникающих в областях I и II в результате возбуждения шаров полем источника.

Если точечный источник первичной звуковой волны находится в среде I, а внутренний шар абсолютно мягкий, соответственная дифракционная задача в математической постановке сводится к нахождению потенциальных функций  $u^{(1)}$  и  $u^{(2)}$ , удовлетворяющих в каждой из областей однородному уравнению Гельмгольца:



Фиг. 1

$$\Delta u^{(i)} + k_i^2 u^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2 \tag{1}$$

граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_1} (u^{(1)} + u^{(0)}) &= \frac{\partial u^{(2)}}{\partial r_1} \\ \rho_1 (u^{(1)} + u^{(0)}) &= \rho_2 u^{(2)} \end{aligned} \right\}_{r_1=a} \quad (2)$$

$$u^{(2)} = 0, \quad r_2 = b.$$

Здесь  $k_i = \frac{\omega}{c_i}$  ( $i = 1, 2$ ), где  $\omega$  — круговая частота. Если же источник сферической волны находится в среде II, то функции  $u^{(1)}$  и  $u^{(2)}$  должны удовлетворять уравнению (1) и следующим граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r_1} &= \frac{\partial (u^{(2)} + u^{(0)})}{\partial r_1} \\ \rho_1 u^{(1)} &= \rho_2 (u^{(2)} + u^{(0)}) \end{aligned} \right\}_{r_1=a} \quad (3)$$

$$u^{(0)} + u^{(2)} = 0, \quad r_2 = b,$$

где  $u^{(0)}$  — потенциал скоростей падающей волны.

Когда внутренний шар является абсолютно жестким, то на границе  $r_2 = b$  вместо условий Дирихле должно выполняться однородное условие

Неймана:  $\frac{\partial u^{(2)}}{\partial r_2} \Big|_{r_2=b} = 0$  в (2) и  $\frac{\partial (u^{(0)} + u^{(2)})}{\partial r_2} \Big|_{r_2=b} = 0$  в (3).

Во всех случаях функция  $u^{(1)}$  должна удовлетворять условию излучения на бесконечности. Как и в работах [1, 2], для решения задачи введем две системы локальных сферических координат  $r_i, \theta_i, \varphi_i$  ( $i = 1, 2$ ) с началами в точках  $O_1$  и  $O_2$ , являющихся центрами шаров, и с совпадающими плоскостями  $O_i x_i z_i$  (при этом  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ).

Потенциал сферической звуковой волны в координатах с началом  $O_i$  ( $i = 1, 2$ ) представляется в виде [3]:

$$u^{(0)} = \frac{e^{ikR_i}}{R_i} = 2ik \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{N_{mn}} \times$$

$$\times P_n^m(\cos \theta_i) P_n^m(\cos \theta_{oi}) e^{im(\varphi - \varphi_0)} \times$$

$$\times \begin{cases} j_n(kr_i) h_n^{(1)}(kr_{oi}), & r_{oi} > r_i \\ j_n(kr_{oi}) h_n^{(1)}(kr_i), & r_i > r_{oi}, \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

где  $R_i = |r_i - r_{oi}|$ ;  $r_{oi}, \theta_{oi}, \varphi_0$  — сферические координаты источника в системе с началом  $O_i$  ( $i = 1, 2$ );  $j_n(kr), h_n^{(1)}(kr)$  — сферические беселевы функции I-го и 3-го рода,  $N_{mn} = \|P_n^m\|^2$  — квадрат нормы присоединенной функции Лежандра.

Если падающее поле задается плоской волной, то разложение  $u^{(0)}$  по сферическим волновым функциям имеет вид [3]:

$$u^{(0)} = e^{ik\vec{n}\vec{r}_1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^n \frac{j_n(k_1 r_1)}{N_{mn}} P_n^m(\cos \theta_1) P_n^m(\cos \alpha) e^{im(\varphi - \beta)}, \quad (5)$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор, определяющий направление распространения волны,  $\alpha$  — угол между  $\vec{n}$  и осью  $Oz$ , угол  $\beta$  образован проекцией вектора  $\vec{n}$  на плоскость  $O_1 x_1 y_1$  с положительным направлением оси  $O_1 x_1$ .

Потенциалы вторичных полей в областях I и II мы будем искать в виде

$$u^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n x_{mn}^{(1)} h_n^{(1)}(k_1 r_1) P_n^m(\cos \theta_1) e^{im\varphi}, \quad (6)$$

$$u^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [x_{mn}^{(2)} j_n(k_2 r_1) P_n^m(\cos \theta_1) + y_{mn}^{(2)} h_n^{(1)}(k_2 r_2) P_n^m(\cos \theta_2)] e^{im\varphi}.$$

С помощью теорем сложения для сферических волновых функций [3]:

$$h_q^{(1)}(kr_s) P_q^p(\cos \theta_s) = \sum_{n=0}^{\infty} R_{qn pq}^{(1)}(r_{sj}, \theta_{sj}) h_n^{(1)}(kr_j) P_n^p(\cos \theta_j); \quad r_{sj} < r_j$$

$$j_q(kr_s) P_q^p(\cos \theta_s) = \sum_{n=p}^{\infty} Q_{pn pq}^{(0)}(r_{sj}, \theta_{sj}) j_n(kr_j) P_n^p(\cos \theta_j), \quad (7)$$

для коэффициентов  $X_{mn}^{(2)}$ ,  $Y_{mn}^{(2)}$  разложений (6) из граничных условий (2), (3) получаются бесконечные системы линейных уравнений:

$$X_{mn}^{(2)} + \sum_{q=|m|}^{\infty} a_{mnq}^{(1)} Y_{mq}^{(2)} = F_{mn}^{(1)} \quad (8)$$

$$Y_{mn}^{(2)} + \sum_{q=|m|}^{\infty} a_{mnq}^{(2)} X_{mq}^{(2)} = F_{mn}^{(2)}$$

с матричными элементами

$$a_{mnq}^{(1)} = \frac{j_q(k_2 b)}{h_n^{(1)}(k_2 a)} \left[ \frac{(q-m)!}{(q+m)!} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{1/2} \frac{\Delta_n^1}{\Delta_n^2} R_{0nmq}(l, \pi) \quad (9)$$

$$a_{mnq}^{(2)} = \frac{h_q^{(1)}(k_2 a)}{h_n^{(1)}(k_2 b)} \left[ \frac{(q-m)!}{(q+m)!} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{1/2} Q_{mnmq}^{(0)}(l, 0),$$

где

$$\Delta_n^1 = \begin{vmatrix} h_n^{(1)}(k_1 a) & \frac{\rho_2}{\rho_1} h_n^{(1)}(k_2 a) \\ h_n^{(1)'}(k_1 a) & \frac{k_2}{k_1} h_n^{(1)'}(k_2 a) \end{vmatrix}; \quad \Delta_n^2 = \begin{vmatrix} h_n^{(1)}(k_1 a) & \frac{\rho_2}{\rho_1} J_n(k_2 a) \\ h_n^{(1)'}(k_1 a) & \frac{k_2}{k_1} J_n'(k_2 a) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_n^3 = \begin{vmatrix} J_n'(k_1 a) & \frac{k_2}{k_1} h_n^{(1)'}(k_2 a) \\ J_n(k_1 a) & \frac{\rho_2}{\rho_1} h_n^{(1)}(k_2 a) \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$R_{0nmq}(l, \pi) = 2i^{n-q} \sum_{\sigma=|q-n|}^{q+n} i^\sigma \frac{b_n^{(qms0)}}{N_{0\sigma}} j_\sigma(k_2 l) (-1)^\sigma,$$

$$Q_{mnmq}^{(0)}(l, 0) = \frac{2i^{n-q}}{N_{mn}} \sum_{\sigma=|q-n|}^{q+n} i^\sigma b_\sigma^{(qmnm)} j_\sigma(k_2 l),$$

и где

$$\begin{aligned}x_{mn}^{(1)} &= j_n(k_1 a) \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} X_{mn}^{(1)}, \\x_{mn}^{(2)} &= h_n^{(1)}(k_2 a) \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} X_{mn}^{(2)} \\y_{mn}^{(2)} &= j_n(k_2 b) \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} Y_{mn}^{(2)}.\end{aligned}\quad (11)$$

Коэффициенты  $b_n^{n_1 m_1 n_2 m_2}$  определяются, как и в [3].

Если источник сферической волны находится в среде I, правые части систем (8) имеют вид:

$$\begin{aligned}F_{mn}^{(1)} &= \frac{(2n+1)k_1}{(k_1 a)^2 \cdot h_n^{(1)}(k_2 a) \Delta_n^2} \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_n^m(\cos \theta_{01}) h_n^{(1)}(k_1 r_{01}) e^{-im\varphi_0} \\F_{mn}^{(2)} &= 0,\end{aligned}\quad (12)$$

а для определения  $X_{mn}^{(1)}$  получается соотношение

$$\begin{aligned}X_{mn}^{(1)} &= \frac{i}{\Delta_n^4 j_n(k_1 a)} \left\{ \frac{\rho_2 k_2 h_n^{(1)}(k_2 a)}{\rho_1 k_1 (k_2 a)^2} X_{mn}^{(2)} + \right. \\&\left. + (2n+1)k_1 \Delta_n^3 \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_n^m(\cos \theta_{01}) h_n^{(1)}(k_1 r_{01}) \right\}.\end{aligned}\quad (13)$$

Если же первичное поле задается в виде плоской волны (5), то мы имеем соответственно:

$$\begin{aligned}F_{mn}^{(1)} &= \frac{(2n+1)k_1 i^{n-1}}{(k_1 a)^2 h_n^{(1)}(k_2 a) \Delta_n^2} \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_n^m(\cos \theta_{01}) e^{-im\varphi_0}, \\F_{mn}^{(2)} &= 0,\end{aligned}\quad (14)$$

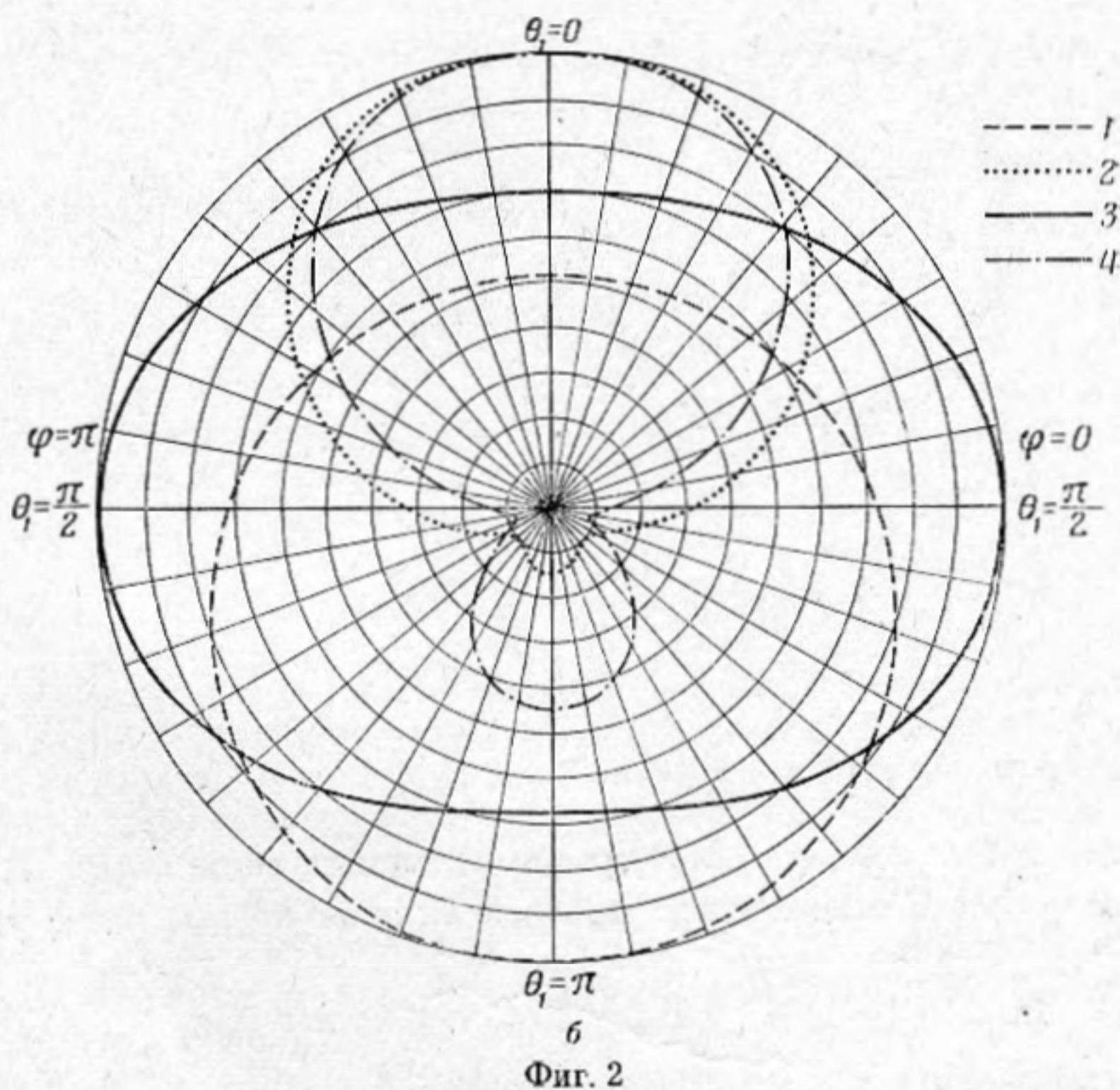
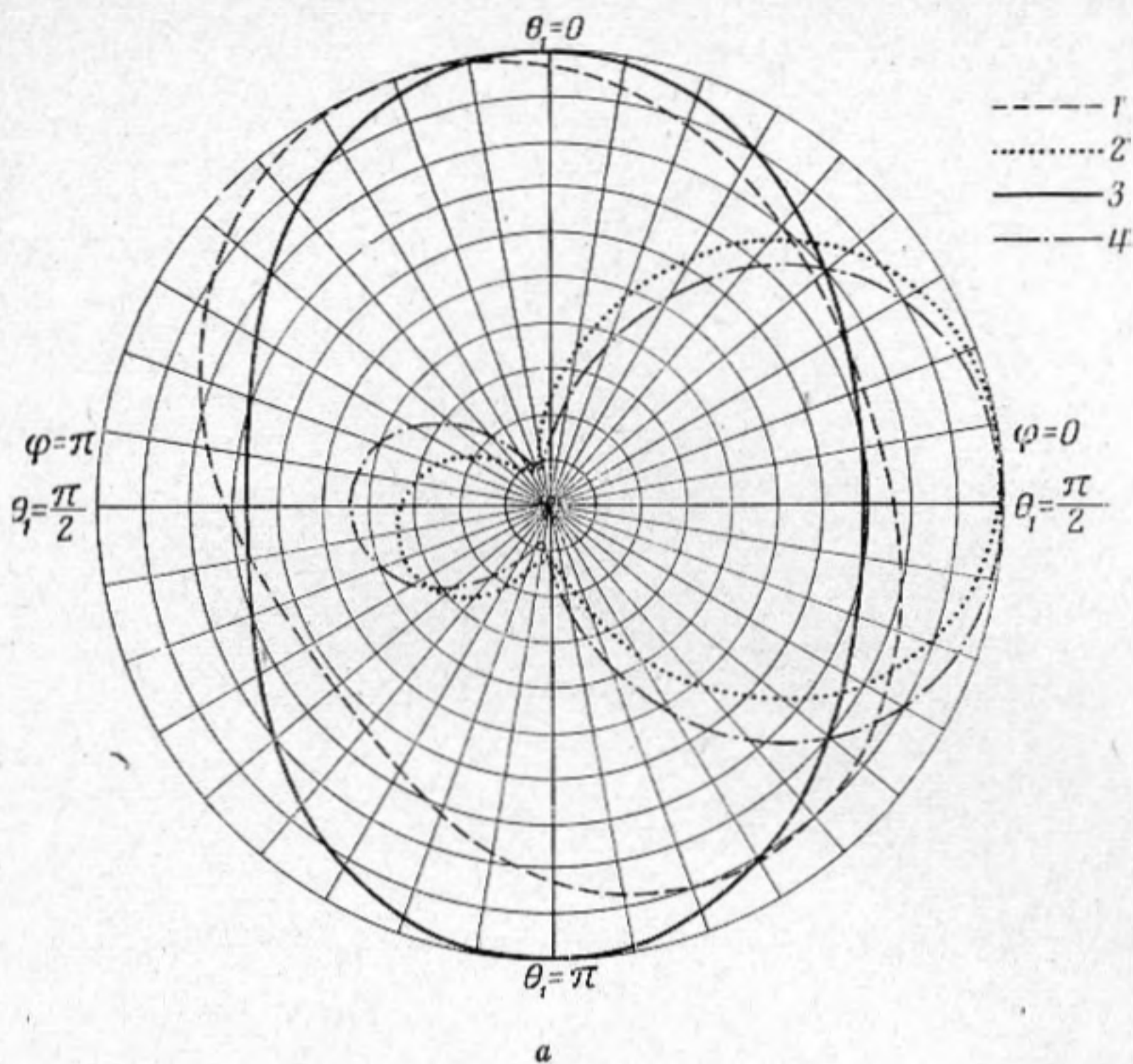
$$\begin{aligned}X_{mn}^{(1)} &= \frac{i}{\Delta_n^4 j_n(k_1 a)} \left\{ \frac{\rho_2 k_2 h_n^{(1)}(k_2 a)}{\rho_1 k_1 (k_2 a)^2} X_{mn}^{(2)} + \right. \\&\left. + (2n+1)k_1 \Delta_n^3 \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} i^{n-1} P_n^m(\cos \theta_{01}) \right\}.\end{aligned}$$

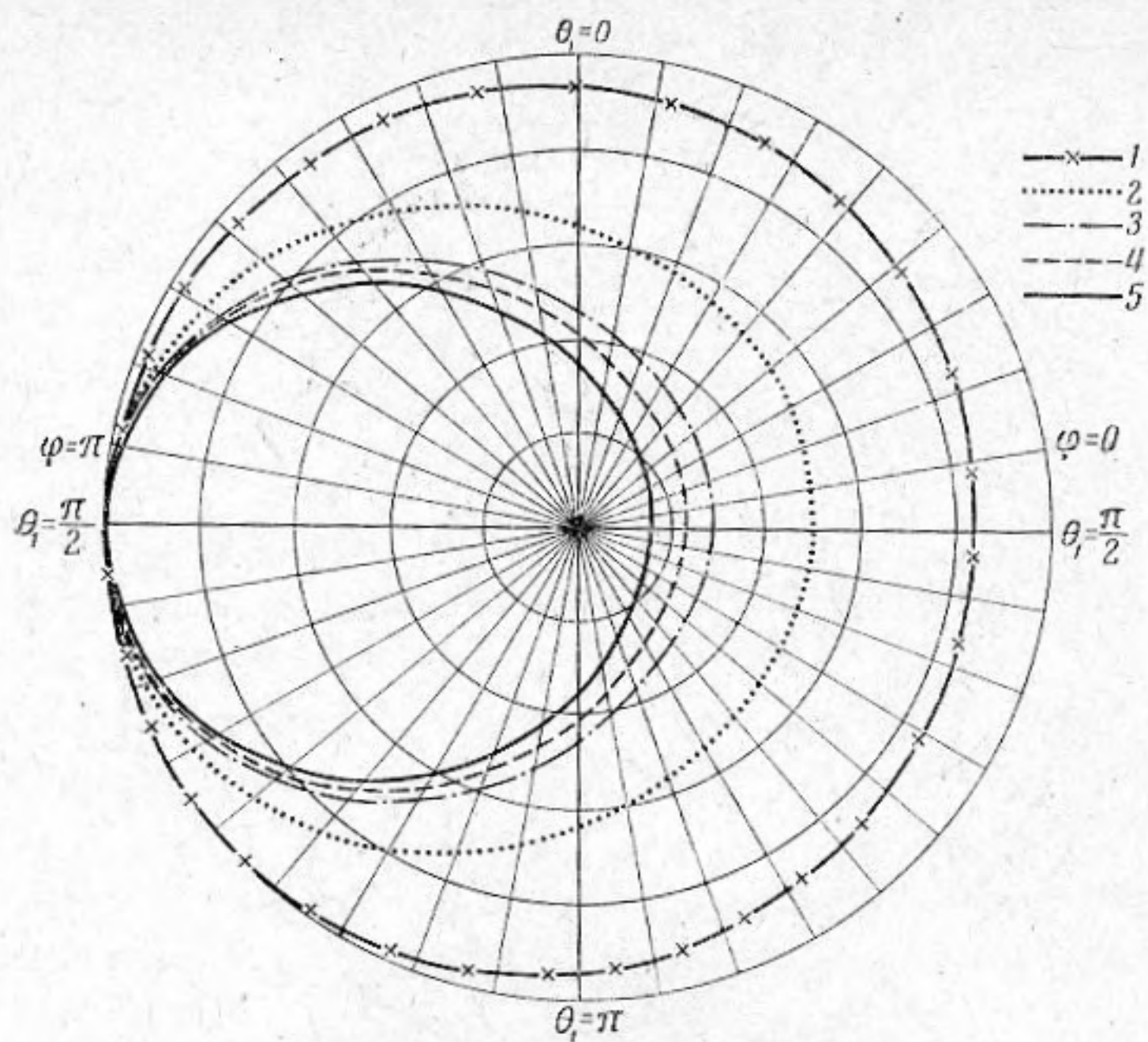
Если источник сферической волны (4) находится в среде II, то матричные элементы систем (8) имеют вид (9), а правые части  $F_{mn}^{(i)}$  ( $i=1, 2$ ) и коэффициенты  $X_{mn}^{(1)}$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}F_{mn}^{(1)} &= -\frac{(2n+1)ik_2 \Delta_n^1}{h_n^{(1)}(k_2 a) \Delta_n^2} \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} j_n(k_2 r_{01}) P_n^m(\cos \theta_{01}) e^{-im\varphi_0}, \\F_{mn}^{(2)} &= -\frac{(2n+1)ik_2}{h_n^{(1)}(k_2 b)} \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_n^m(\cos \theta_{02}) h_n^{(1)}(k_2 r_{02}) e^{-im\varphi_0},\end{aligned}\quad (15)$$

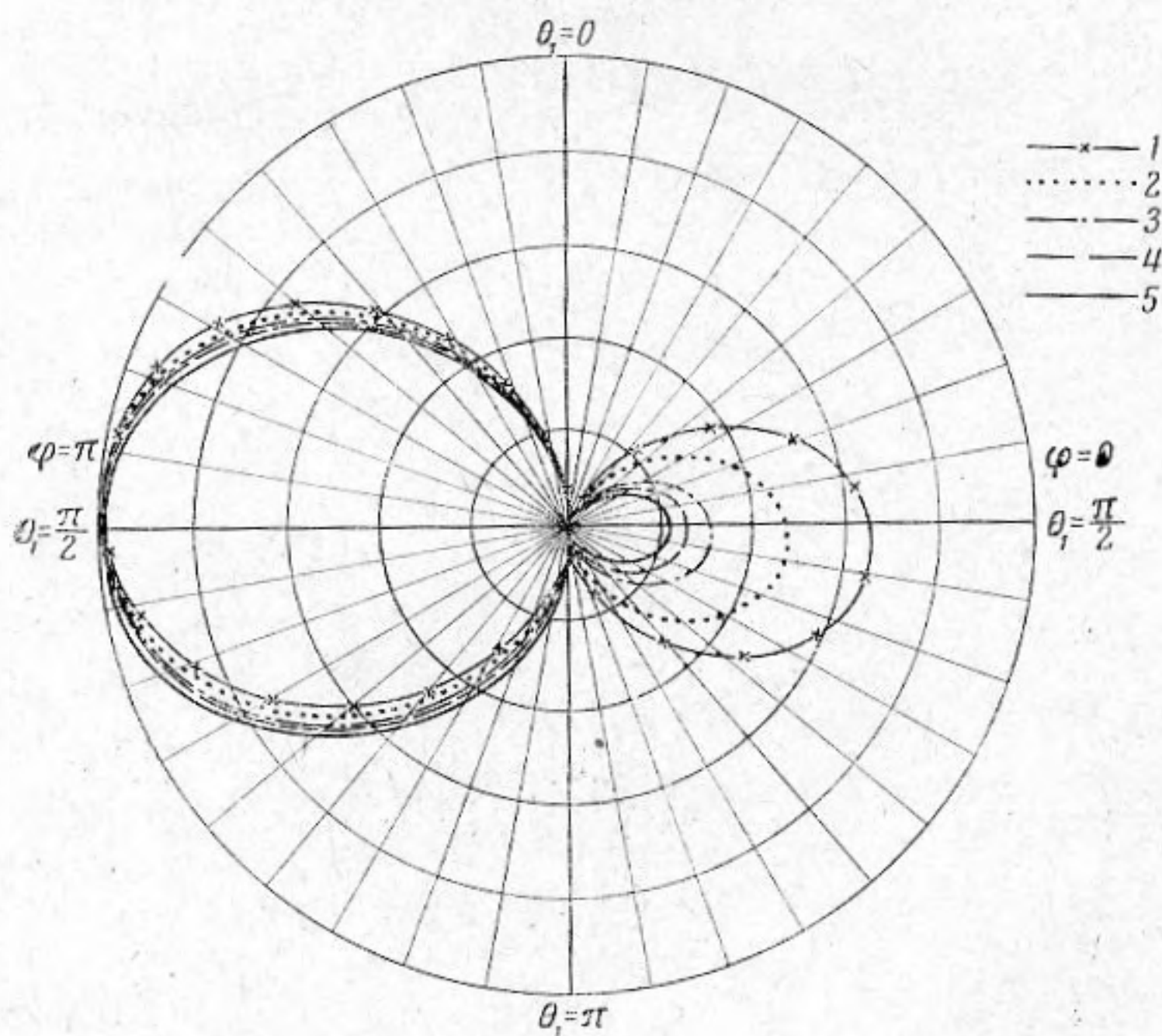
$$X_{mn}^{(1)} = \frac{i\rho_2 k_2 h_n^{(1)}(k_2 a)}{\rho_1 k_1 (k_2 a)^2 \Delta_n^4 j_n(k_1 a)} X_{mn}^{(2)}.$$

В случае абсолютно жесткого внутреннего шара, функции  $j_n(k_2 b)$  и  $h_n^{(1)}(k_2 b)$ , входящие в формулу (II), а также в выражения матричных элементов и правых частей системы (8), должны быть заменены на  $j_n'(k_2 b)$ .





a



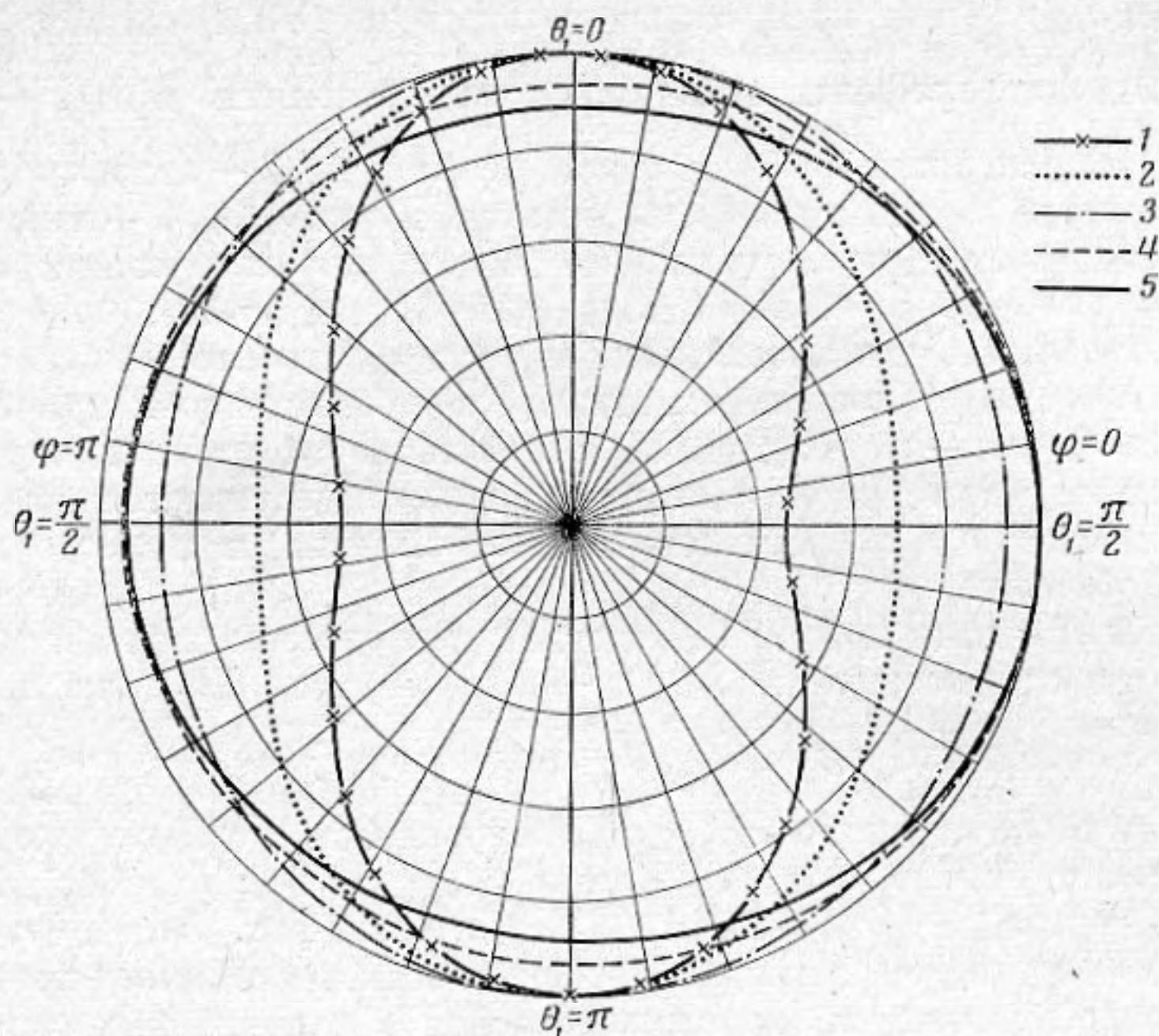
б

Фиг. 3

и  $h_n^{(1)'}(k_2 b)$  соответственно. Матричные элементы систем (8) обладают свойством четности относительно индекса  $m$ , а их правые части удовлетворяют соотношению:

$$F_{-m n} = (-1)^m e^{i2m\varphi_0} F_{m n}, \quad (0 \leq m \leq n; n = 0, 1, \dots) \quad (16)$$

которое справедливо и для коэффициентов  $X_{mn}^{(2)}$ ,  $Y_{mn}^{(2)}$ ,  $X_{mn}^{(1)}$ . Система (8) единственным образом разрешима методом усечений [3].



Фиг. 3

Давление и радиальная скорость, создаваемые вторичной волной в точке  $(r_1, \theta_1, \varphi)$  среды I, определяются выражениями:

$$p = i\rho_1\omega u^{(1)}; \quad v_{r_1} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r_1}. \quad (17)$$

Используя асимптотическое выражение

$$h_n^{(1)}(u) \underset{u \rightarrow \infty}{\approx} (-i)^{n+1} \frac{e^{iu}}{u}, \quad (18)$$

получим представление рассеянного поля в дальней зоне

$$u^{(1)} \approx \frac{e^{ik_1 r_1}}{k_1 r_1} A(\theta_1, \varphi), \quad (19)$$

где

$$A(\theta_1, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m}) (-i)^{n+1} e^{im\varphi_0} \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \times \\ \times j_n(k_1 a) X_{mn}^{(1)} P_n^m(\cos \theta_1) \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (20)$$

Интенсивность рассеяния вторичного поля в волновой зоне определяется как  $|A(\theta_1, \varphi)|^2$ . В случае плоской первичной волны можно вычислить поперечное сечение рассеяния, равное отношению усредненного по времени полного потока энергии излучения, рассеянного телом, к потоку энергии, падающему на тело, по формуле [4]:

$$Q = 4\pi \operatorname{Im} A(\alpha, \beta),$$

где  $A(\alpha, \beta)$  — амплитуда вторичного поля в дальней зоне, наблюдаемая за препятствием в направлении распространения первичной волны ( $\theta_1 = \alpha$ ,  $\varphi = \varphi_0 = \beta$ ).

В качестве иллюстрации приведем нормированные графики интенсивности рассеяния вторичного  $u^{(1)}$  и полного  $u^{(1)} + u^{(0)}$  звуковых полей в

волновой зоне (расчеты производились нами на ЭВМ «Минск-22»). На фиг. 2, а, б даны графики интенсивности рассеяния при  $\alpha - \theta_{01} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta - \theta_{01} = 0$ , в плоскостях  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  ( $\varphi_0 = 0$ ); 1, 2 — вторичного и полного полей, когда меньший шар абсолютно мягкий, 3, 4 — вторичного и полного полей в отсутствие меньшего шара, для следующих значений параметров:  $k_1 a = 1$ ;  $b = 0,9l = 0,45a$ ;  $\rho_1 = 8\rho_2$ ;  $k_2 = 2k_1$ ;  $r_{01} = 1,5a$ . Из этих графиков видно, что интенсивность рассеянного вторичного поля при наличии мягкого шара достигает максимума в области геометрической тени, а полного поля — в облученной области. В отсутствие внутреннего шара максимум интенсивности вторичного поля достигается на границе облученной области и области геометрической тени, а полного поля — в облученной области.

На фиг. 3а, б, в даны графики интенсивности рассеяния вторичного поля в зависимости от расстояния  $r_{01}$ , (а — если внутренний шар абсолютно мягкий, б — абсолютно жесткий, в — отсутствует) при  $\theta_{02} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = 0$ , т. е. источник лежит на положительной полуоси  $Ox_1$ , и при следующих значениях параметров:  $k_1 a = 1$ ;  $b = 0,7a = 2,8l$ ;  $\rho_1 = 8\rho_2$ ;  $k_2 = 2k_1$ ; 1 —  $r_{01} = a$ , 2 —  $r_{01} = 1,5a$ , 3 —  $r_{01} = 3a$ , 4 —  $r_{01} = 5a$  (на фиг. 3в, 4 —  $r_{01} = 10a$ ). Для сравнения приведен график 5 интенсивности рассеянного поля, создаваемого плоской волной, распространяющейся в направлении отрицательной оси  $x$ -ов ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = \pi$ ), при тех же значениях параметров. При наличии шарового включения интенсивность рассеяния в дальней зоне уже при  $r_{01} = 5a$  достаточно хорошо приближается к интенсивности рассеяния, создаваемого плоской волной, а при отсутствии этого включения — только при  $r_{01} = 10a$ . При наличии включения максимум лежит в области тени, а без включения — в облученной области.

В заключение можно отметить, что подобным же образом может быть решена более общая задача, когда внутренний шар также является пронцаемым.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Марневская. К дифракции плоской скалярной волны на двух сферах. Акуст. ж., 1968, 14, 3, 427—434.
2. Л. А. Марневская. О рассеянии плоской волны на двух акустически жестких сферах. Акуст. ж., 1969, 15, 4, 579—583.
3. Е. А. Иванов. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск, «Наука и техника», 1968.
4. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.

Институт математики  
Минск

Поступила в редакцию  
25 января 1971 г.