

УДК 534.86

## СТЕРЖНЕВОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ КЛИНОВИДНОЙ ФОРМЫ С ПОПЕРЕЧНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ

*Б. Н. Алексеев, Д. Б. Дианов, С. П. Карузо*

Рассмотрена задача об излучении пьезопреобразователя клиновидной формы с поперечной поляризацией пьезокерамики. Получены основные формулы для двух модификаций преобразователя. Приведены результаты численных расчетов основных характеристик преобразователей и их эквивалентная схема.

При создании приемных и излучающих электроакустических устройств с неплоской рабочей поверхностью могут найти применение стержневые пьезокерамические преобразователи с переменным поперечным сечением, в частности преобразователи клиновидной формы. В работе [1] был рассмотрен стержневой преобразователь клиновидной формы, направление колебаний в котором совпадает с направлением поляризации пьезокерамики.

В настоящей работе представлены результаты расчетов основных характеристик стержневого преобразователя клиновидной формы, направление колебаний в котором перпендикулярно направлению поляризации пьезокерамики. Пусть ось рассматриваемого преобразователя и направление колебаний совпадают с осью  $x$  (фиг. 1, а, б), длина его равна  $l$ , а площадь его поперечного сечения  $S$  изменяется по закону

$$(1) \quad S(x) = S_0(1 - \beta x),$$

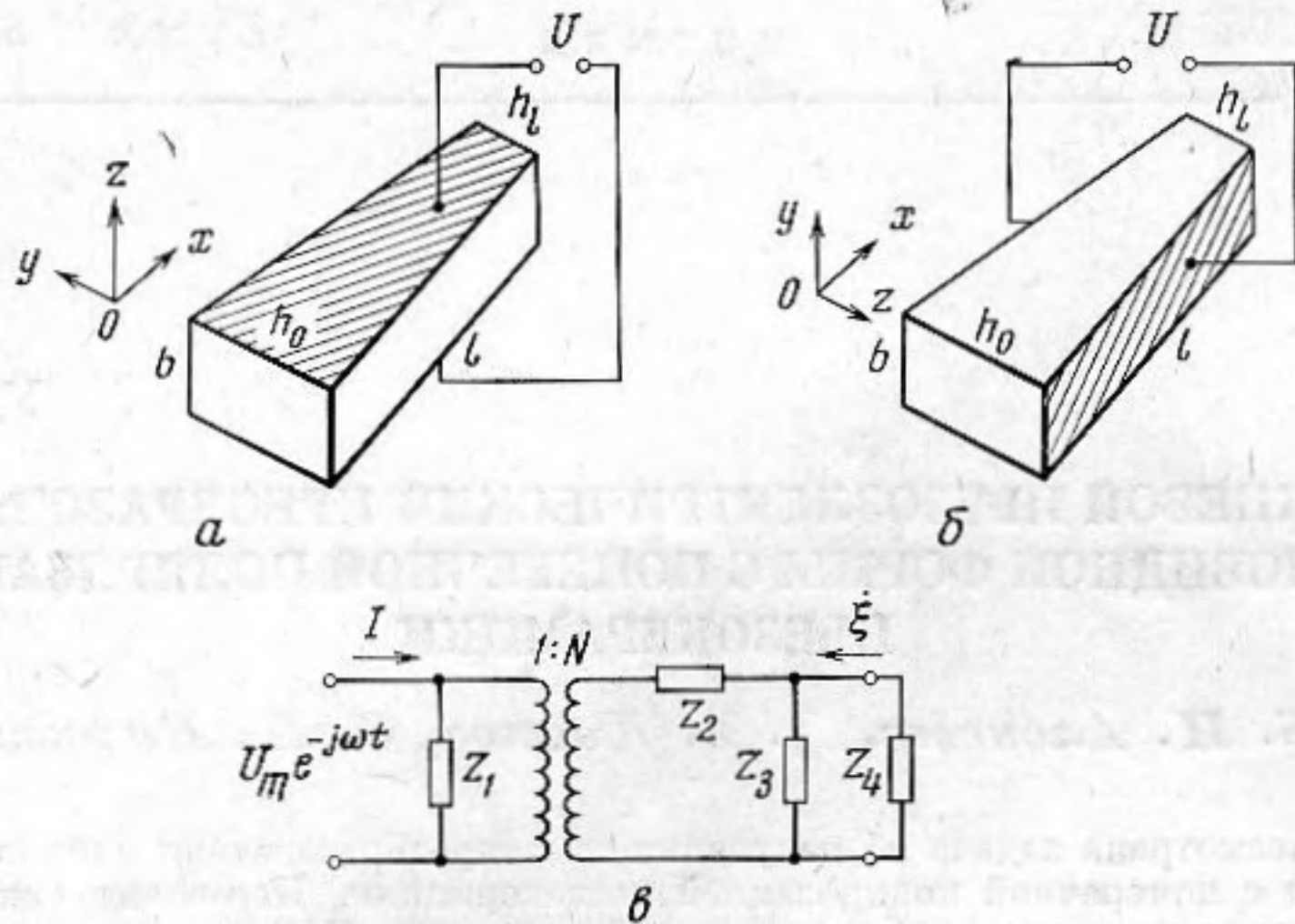
где  $S_0 = bh_0$  — площадь широкого торца стержня,  $b$  и  $h$  — его поперечные размеры, причем величина  $b$  не изменяется по длине, а  $h = h_0$  на широком и  $h = h_1$  на узком торце;  $\beta = \frac{1}{l} \left( 1 - \frac{h_1}{h_0} \right)$  — коэффициент формы.

Основываясь на одномерной теории продольных колебаний стержня переменного сечения [2] с учетом обратного пьезоэффекта [3], уравнение колебаний преобразователя можно представить в виде

$$(2) \quad \rho S_{11}^E \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} d_{31} E_3 - d_{31} \frac{\partial E_3}{\partial x},$$

где  $\xi$  — упругое смещение вдоль оси  $x$ ;  $\rho$ ,  $s_{11}^E$ ,  $d_{31}$  — плотность, постоянная гибкости и действующий пьезомодуль\* материала стержня;  $E_3$  — действующая компонента напряженности электрического поля.

Возможны две модификации клиновидного преобразователя с поперечной поляризацией, отличающиеся расположением электродов на его поверхностях. Рассмотрим вначале модификацию, в которой переменное электрическое напряжение с амплитудой  $U_m$  приложено к электродам,



Фиг. 1. Стержневой клиновидный преобразователь: а — электроды на параллельных гранях, б — электроды на скошенных гранях, в — эквивалентная схема преобразователя

расположенным на параллельных боковых гранях преобразователя (рис. 1, а). Здесь действующая компонента напряженности электрического поля  $E_3$  в рассматриваемом приближении не зависит от координаты  $x$  и равна  $U_m/b$ ; следовательно, последний член в правой части уравнения (2) равен нулю.

Подставляя (1) в (2), для гармонического режима колебаний преобразователя с круговой частотой  $\omega$  получим неоднородное дифференциальное уравнение Бесселя нулевого порядка

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{x - \frac{1}{\beta}} \frac{\partial \xi}{\partial x} + k_1^2 \xi = \frac{d_{31} E_3}{x - \frac{1}{\beta}},$$

где  $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ ;  $c_1^2 = \frac{1}{\rho s_{11}^E}$ .

Решение уравнения (3) можно записать в виде

$$(4) \quad \xi = \left[ A_1 - \frac{\pi g}{2k_1} F_1(\lambda) \right] J_0(\lambda) + \left[ A_2 + \frac{\pi g}{2k_1} F_2(\lambda) \right] N_0(\lambda),$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — произвольные постоянные, подлежащие определению из граничных условий задачи,

$$F_1(\lambda) = \int_{-\lambda_0}^{\lambda} N_0(\chi) d\chi; \quad F_2(\lambda) = \int_{-\lambda_0}^{\lambda} J_0(\chi) d\chi;$$

\* В дальнейшем предполагается  $d_{31} = \text{const}$ .

$J_0, J_1$  и  $N_0, N_1$  — функции Бесселя и Неймана;

$$\lambda = x_1 \left( m - \frac{1}{\mu} \right); \quad \lambda_0 = \lambda|_{x=0}; \quad g = d_{31} E_3; \quad x_1 = k_1 l; \quad \mu = \beta l; \quad m = \frac{x}{l}.$$

Рассмотрим режим одностороннего излучения, когда широкий торец преобразователя нагружен на удельный импеданс  $z_n$ , а узкий — свободен. Используя указанные граничные условия, соотношение (4) и закон обратного пьезоэффекта, можно составить систему из двух алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных  $A_1$  и  $A_2$ . Подставляя найденные значения  $A_1$  и  $A_2$  в формулу (4), получим следующее выражение для упругого смещения в стержне:

$$(5) \quad \xi = \frac{d_{31} U_m}{\omega z_1 s_{11}^E b} \frac{\Phi_{21} + j\gamma \Phi_{22}}{\Phi_1 + j\gamma \Phi_3}.$$

Здесь

$$\Phi_1 = J_1(\vartheta_l) N_1(\vartheta_0) - J_1(\vartheta_0) N_1(\vartheta_l); \quad \Phi_2 = J_1(\vartheta_0) N_0(\vartheta_l) - J_0(\vartheta_l) N_1(\vartheta_0);$$

$$\Phi_3 = J_1(\vartheta_l) N_0(\vartheta_0) - J_0(\vartheta_0) N_1(\vartheta_l); \quad \Phi_4 = J_0(\vartheta_l) N_0(\vartheta_0) - J_0(\vartheta_0) N_0(\vartheta_l);$$

$$\Phi_{21} = \left( 1 + \frac{\pi}{2} \Phi_5 \right) F_{12} + F_{13} + \frac{\pi}{2} \Phi_1 F_{11};$$

$$\Phi_{22} = \left( 1 + \frac{\pi}{2} \Phi_5 \right) F_{14} + \frac{\pi}{2} \Phi_3 F_{11};$$

$$F_{12} = N_1(\vartheta_0) J_0(\vartheta) - J_1(\vartheta_0) N_0(\vartheta); \quad F_{13} = J_1(\vartheta_l) N_0(\vartheta) - J_0(\vartheta) N_1(\vartheta_l);$$

$$F_{14} = N_0(\vartheta_0) J_0(\vartheta) - J_0(\vartheta_0) N_0(\vartheta); \quad F_{11} = J_0(\vartheta) F_1(\vartheta) - N_0(\vartheta) F_2(\vartheta);$$

$$\Phi_5 = J_1(\vartheta_l) F_1(\vartheta_l) - N_1(\vartheta_l) F_2(\vartheta_l); \quad F_1(\vartheta) = \int_{\vartheta}^{\vartheta_0} N_0(\chi) d\chi;$$

$$F_2(\vartheta) = \int_{\vartheta}^{\vartheta_0} J_0(\chi) d\chi; \quad F_{1,2}(\vartheta_l) = F_{1,2}(\vartheta) |_{\vartheta=\vartheta_l}; \quad \vartheta = -\lambda; \quad \gamma = \frac{z_n}{z_1};$$

$z_1 = \rho c_1$  — волновое сопротивление пьезокерамики;  $U_m$  — амплитуда электрического напряжения на электродах преобразователя.

Амплитуда упругого смещения нагруженного торца преобразователя определяется из (5) при  $x=0$  ( $\vartheta=\vartheta_0$ ) и равна

$$(6) \quad \xi_0 = \frac{d_{31} U_m}{\omega z_1 s_{11}^E b} \frac{\Phi_3 - \frac{1}{\vartheta_0} \Phi_5 - \frac{2}{\pi \vartheta_0}}{\Phi_1 + j\gamma \Phi_3}.$$

С помощью формул (5) и (6) и с учетом прямого и обратного пьезоэффекта можно рассчитать следующие характеристики преобразователя:

удельную мощность излучения  $P = \frac{1}{2} \omega^2 |\xi_0|^2 \operatorname{Re}(z_n)$ , распределение упру-

гих смещений  $\xi(x)$  и распределение упругих напряжений  $\sigma_{xx}(x)$  вдоль стержня; электрический ток, протекающий через преобразователь, и его входную электрическую проводимость.

Распределение упругих напряжений в преобразователе описывается формулой

$$(7) \quad \sigma_{xx} = \frac{d_{31} U_m}{s_{11}^E b} \frac{\Phi_{31} + j\gamma \Phi_{32}}{\Phi_1 + j\gamma \Phi_3},$$

где  $\Phi_{31} = \left( 1 + \frac{\pi}{2} \Phi_5 \right) (-F_{12}') - F_{13}' + \Phi_1 \left( \frac{\pi}{2} F_{22} - 1 \right);$

$$\Phi_{32} = \left( 1 + \frac{\pi}{2} \Phi_5 \right) (-F_{14}') + \Phi_3 \left( \frac{\pi}{2} F_{22} - 1 \right);$$

$$F_{22} = J_1(\vartheta) F_1(\vartheta) - N_1(\vartheta) F_2(\vartheta);$$

$F_{12}'$ ,  $F_{13}'$  и  $F_{14}'$  — производные по  $\vartheta$  от соответствующих функций.

Электрический ток, протекающий через преобразователь, определяется соотношением

$$J_m = -j\omega h_0 \int_0^l D_3(x) (1 - \beta x) dx,$$

где  $D_3(x)$  — действующая компонента электрической индукции.

Подставляя в последнее выражение  $D_3(x)$  с учетом (5), получим

$$(8) \quad J_m = -j\omega U_m C_1 - j \frac{\epsilon_{33}^u h_0 c_1}{b} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} U_m \frac{L_1 + j\gamma L_2}{\Phi_1 + j\gamma \Phi_3}.$$

$$\text{Здесь} \quad C_1 = C_{01} \left( 1 - \frac{1}{2} \mu \right); \quad C_{01} = \frac{\epsilon_{33}^u h_0 l}{b}; \quad \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^u};$$

$\epsilon_{33}^u$  — диэлектрическая проницаемость пьезокерамического стержня при постоянной деформации вдоль оси  $z$ ,

$$L_1 = \frac{4}{\pi \vartheta_0} \Phi_3 - (1 - \mu) \Phi_2 -$$

$$- \frac{1}{\vartheta_0} \left[ \left( 2 + \frac{\pi}{2} \Phi_5 \right) \Phi_6 - 2\Phi_5 + \frac{\pi}{2} \Phi_1 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} F_{11} d\vartheta \right];$$

$$L_2 = (1 - \mu) \Phi_4 - \frac{1}{\vartheta_0} \left[ \left( 2 + \frac{\pi}{2} \Phi_5 \right) \Phi_7 + \frac{\pi}{2} \Phi_3 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} F_{11} d\vartheta \right];$$

$$\Phi_6 = J_1(\vartheta_0) F_1(\vartheta_1) - N_1(\vartheta_0) F_2(\vartheta_1),$$

$$\Phi_7 = J_0(\vartheta_0) F_1(\vartheta_1) - N_0(\vartheta_0) F_2(\vartheta_1).$$

Входная электрическая проводимость преобразователя определяется из (8) при помощи равенства

$$(9) \quad Y_{эл} = \frac{J_m}{U_m} = -j\omega C_1 - jB_{эл} + G_{эл},$$

$$\text{где} \quad B_{эл} = \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{\epsilon_{33}^u h_0 c_1}{b} \frac{\Phi_1 L_1 + \gamma^2 \Phi_3 L_2}{\Phi_1^2 + \gamma^2 \Phi_3^2};$$

$$G_{эл} = \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{\epsilon_{33}^u h_0 c_1}{b} \frac{\gamma \left[ \Phi_3 - \frac{1}{\vartheta_0} \Phi_5 - \frac{2}{\pi \vartheta_0} \right]^2}{\Phi_1^2 + \gamma^2 \Phi_3^2}$$

Во второй модификации клиновидного стержневого преобразователя с поперечной поляризацией пьезокерамики электроды нанесены на скошенные боковые грани (фиг. 1, б). В этом случае действующая компонента  $E_z$  электрического поля в рассматриваемом приближении изменяется по длине преобразователя по закону

$$E_z = U_m / h_0 (1 - \beta x).$$

Подставляя (1) и (2) с учетом последнего выражения для  $E_z$ , получим уравнение колебаний в виде однородного уравнения Бесселя нулевого порядка, левая часть которого совпадает с (3). Его решение записывается в формуле

$$(10) \quad \xi = A_3 J_0(\vartheta) + A_4 N_0(\vartheta),$$

где  $A_3$  и  $A_4$  — произвольные постоянные.

Из решения граничной задачи, аналогичной предыдущей, с учетом (10) можно определить распределение амплитуд упругих смещений в преобразователе и смещение его нагруженного торца при  $x=0$ . Они равны

$$(11) \quad \xi = \frac{d_{31} U_m}{\omega s_{11}^E h_0 z_1 (1-\mu)} \frac{\Delta_1 + j\gamma \Delta_2}{\Phi_1 + j\gamma \Phi_3},$$

$$(12) \quad \xi_0 = \frac{d_{31} U_m}{\omega s_{11}^E h_0 z_1 (1-\mu)} \frac{(1-\mu) \Phi_3 - \frac{2}{\pi \vartheta_0}}{\Phi_1 + j\gamma \Phi_3}.$$

В выражении (11)  $\Delta_1 = [N_1(\vartheta_0) - (1-\mu)N_1(\vartheta_l)]J_0(\vartheta) - [J_1(\vartheta_0) - (1-\mu)J_1(\vartheta_l)]N_0(\vartheta)$ ;

$$\Delta_2 = N_0(\vartheta_0)J_0(\vartheta) - J_0(\vartheta_0)N_0(\vartheta).$$

Формулы для распределения амплитуд механических напряжений вдоль преобразователя, тока, протекающего через него, и входной электрической проводимости с учетом закона изменения напряженности электрического поля, соотношений (10) и (11) имеют следующий вид:

$$(13) \quad \sigma_{xx} = \frac{d_{31} U_m}{s_{11}^E h_0 (1-\mu m)} \frac{\frac{1-\mu m}{1-\mu} (-\Delta_1') - \Phi_1 + j\gamma \left( -\frac{1-\mu m}{1-\mu} \Delta_2' - \Phi_3 \right)}{\Phi_1 + j\gamma \Phi_3},$$

$$(14) \quad J_m = -j\omega b \int_0^l D_3(x) dx = -j\omega C_2 U_m - j \frac{\epsilon_{33}^u b c_1}{h_0 (1-\mu)} \frac{k_{31}^2}{1-k_{31}^2} U_m \frac{\Delta_3 + j\gamma \Phi_4}{\Phi_1 + j\gamma \Phi_3},$$

$$(15) \quad Y_{эл} = -j\omega C_2 - jB_{эл} + G_{эл}.$$

В этих формулах использованы следующие обозначения:

$$B_{эл} = \frac{\epsilon_{33}^u b c_1}{h_0 (1-\mu)} \frac{k_{31}^2}{1-k_{31}^2} \frac{\Delta_3 \Phi_1 + \gamma^2 \Phi_3 \Phi_4}{\Phi_1^2 + \gamma^2 \Phi_3^2};$$

$$G_{эл} = \frac{\epsilon_{33}^u b c_1}{h_0 (1-\mu)^2} \frac{k_{31}^2}{1-k_{31}^2} \frac{\gamma \left[ (1-\mu) \Phi_3 - \frac{2}{\pi \vartheta_0} \right]^2}{\Phi_1^2 + \gamma^2 \Phi_3^2};$$

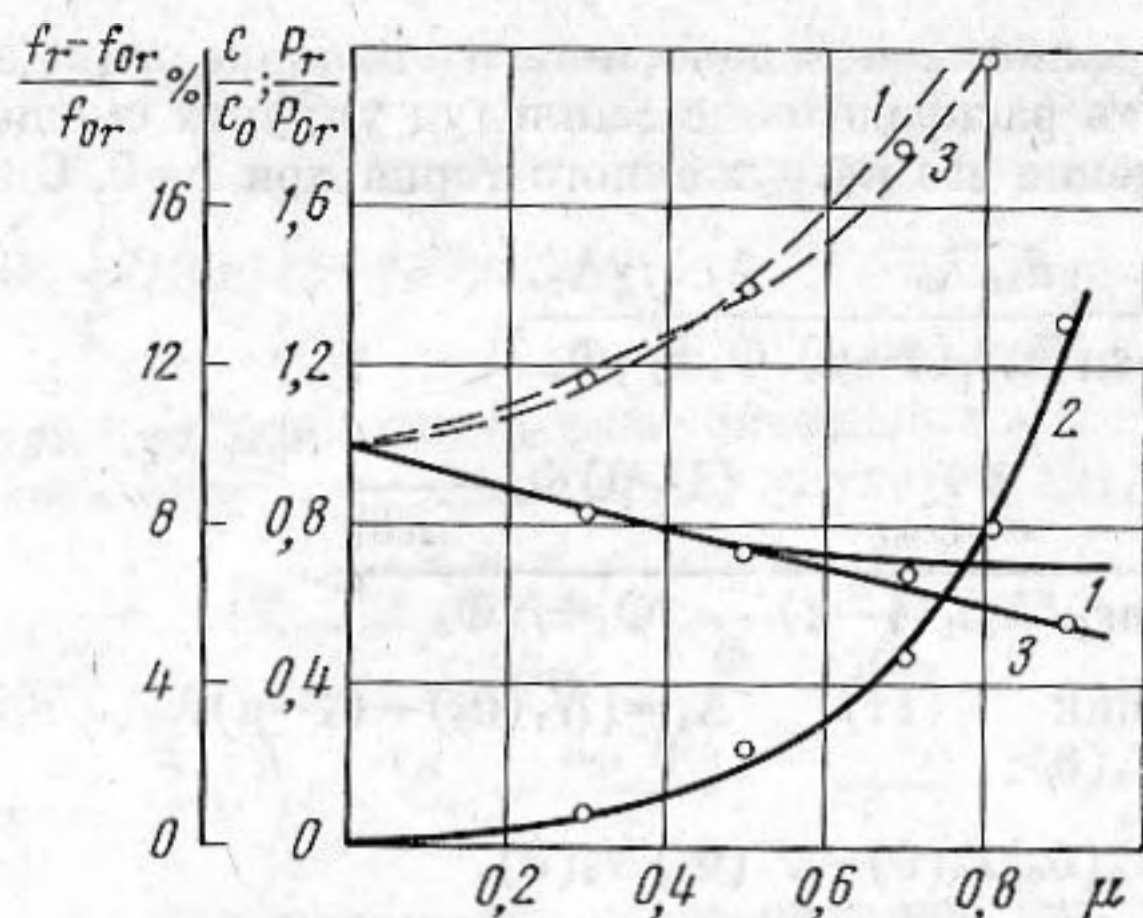
$$C_2 = \frac{C_{02}}{\mu} \ln \frac{1}{1-\mu}; \quad C_{02} = \frac{\epsilon_{33}^u b l}{h_0}; \quad \Delta_3 = \frac{4}{\pi \vartheta_0} - (1-\mu) \Phi_3 - \Phi_2;$$

$\Delta_1'$  и  $\Delta_2'$  — производные по  $\vartheta$  от функций  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ .

Из формул (6) и (12) следует, что при малой нагрузке ( $\gamma^2 \ll 1$ ) максимум модуля смещения нагруженного торца стержня достигается при  $\Phi_1 = 0$ , т. е. при условии  $J_1(\vartheta_0)/N_1(\vartheta_0) = J_1(\vartheta_l)/N_1(\vartheta_l)$ . Очевидно, что положения определяемого таким образом резонанса на частотной оси зависят от параметра формы  $\mu$ .

Эквивалентная электромеханическая схема клиновидного преобразователя изображена на фиг. 1, в. Для преобразователя, изображенного на фиг. 1, а, параметры схемы равны

$$Z_1 = j \frac{1}{\omega C_1}; \quad Z_2 = j Z_0 \frac{\Phi_1 L_1}{\left( \Phi_3 - \frac{1}{\vartheta_0} \Phi_5 - \frac{2}{\pi \vartheta_0} \right)^2};$$



Фиг. 2. Зависимость удельной мощности излучения на резонансе  $P_r$  (1), резонансной частоты  $f_r$  (2), электрической емкости  $C$  (3) клиновидных преобразователей от параметра формы  $\mu$ . Сплошные кривые — электроды на параллельных гранях, штриховые кривые — электроды на скошенных гранях:  $P_{0r}$  — удельная мощность при  $\mu=0$  и  $f_r=f_{0r}$ ;  $f_{0r}=c_1/2l$ . Точками нанесены экспериментальные результаты

$$Z_3 = -jZ_0 \frac{L_1}{L_2}; \quad Z_4 = z_H S_0; \quad Z_0 = z_1 S_0; \quad N = N_1 \cdot N_2;$$

$$N_1 = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} h_0; \quad N_2 = \frac{L_1}{\Phi_3 - \frac{1}{\vartheta_0} \Phi_5 - \frac{2}{\pi \vartheta_0}}$$

Для преобразователя второй модификации (фиг. 1, б) параметры схемы определяются следующими соотношениями:

$$Z_1 = j \frac{1}{\omega C_2}; \quad Z_2 = jZ_0 \frac{\Delta_3 \Phi_1}{\left[ (1-\mu) \Phi_3 - \frac{2}{\pi \vartheta_0} \right]^2};$$

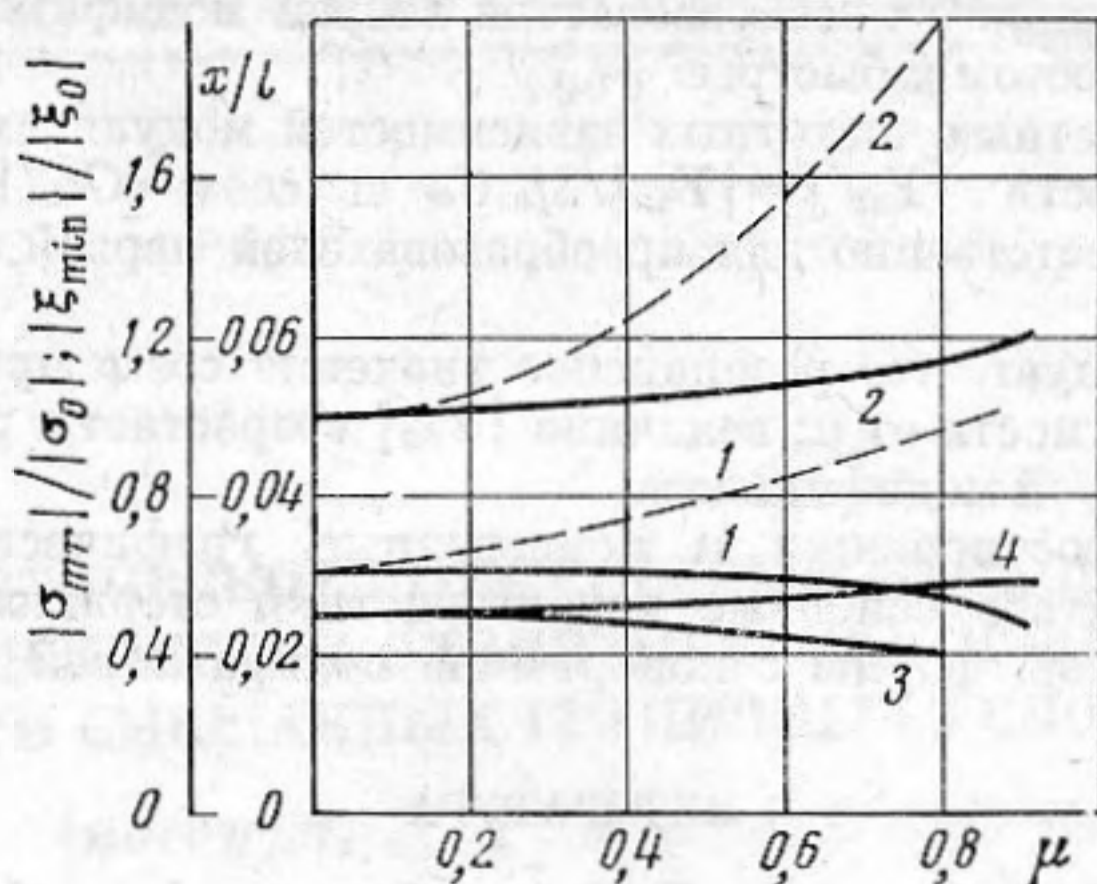
$$Z_3 = -jZ_0 \frac{\Delta_3}{\Phi_4}; \quad Z_4 = z_H S_0; \quad Z_0 = z_1 S_0;$$

$$N_1 = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} b; \quad N_2 = \frac{\Delta_3 (1-\mu)^{-1/2}}{(1-\mu) \Phi_3 - \frac{2}{\pi \vartheta_0}}$$

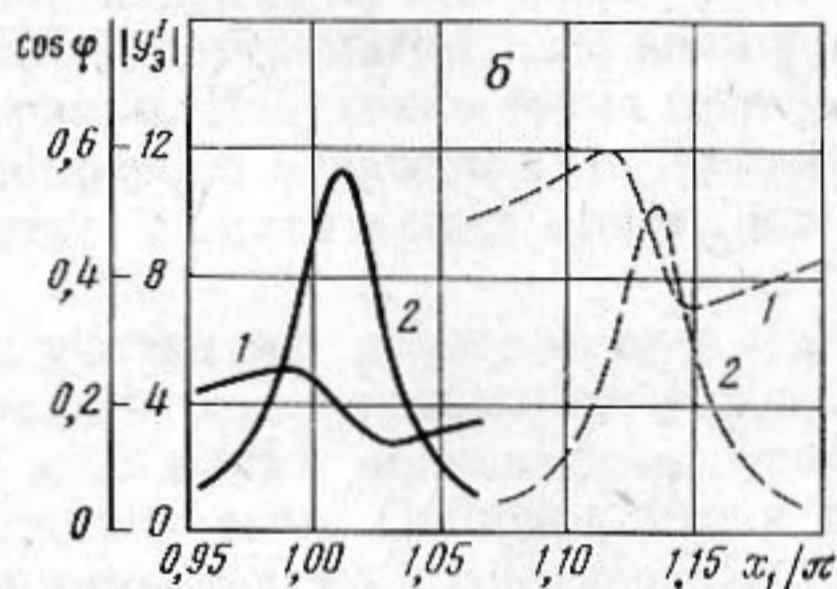
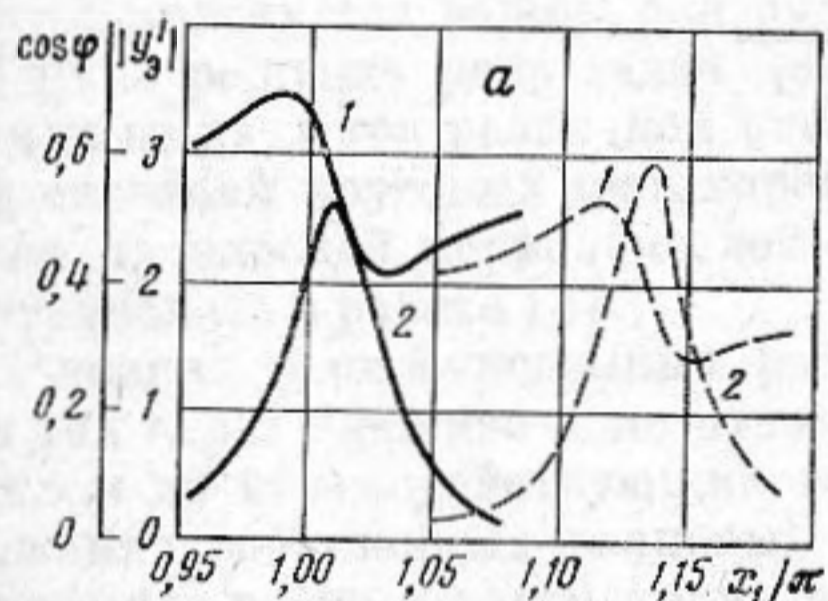
По формулам (5)–(7), (9) (11–13) и (15) был проведен численный анализ основных характеристик преобразователя клиновидной формы, изготовленного из пьезокерамики ТБК-3 и нагруженного широким торцом на водную среду. Некоторые результаты этого анализа представлены на фиг. 2–4.

Из фиг. 2 видно, что с ростом параметра формы  $\mu$  удельная мощность излучения на резонансе у преобразователя первой модификации (фиг. 1, а) снижается и всегда меньше, чем у стержня постоянного сечения. При  $\mu > 0,8$  изменение мощности излучения незначительно, а ее величина примерно в 1,4 раза меньше чем мощность излучения стержня постоянного сечения. Для преобразователя второй модификации (фиг. 1, б) удельная мощность излучения на резонансе с ростом  $\mu$  увеличивается и превышает значение мощности для стержневого преобразователя постоянного сечения.

Зависимости резонансной частоты и относительной полосы пропускания для обеих модификаций клиновидного преобразователя идентичны.



Фиг. 3. Зависимость отношения минимального упругого смещения к смещению широкого торца  $|\xi_{\min}|/|\xi_0|$  (1), максимального упругого напряжения  $\sigma_{\max}$  (2), положения  $x/l$  минимума смещения (3) и максимума упругого напряжения (4) от  $\mu$  на резонансной частоте; сплошные кривые — электроды на параллельных гранях, штриховые кривые — электроды на скошенных гранях. Все величины нормированы к соответствующим резонансным значениям при  $\mu=0$



Фиг. 4. Частотные зависимости модуля полной электрической проводимости (1) и  $\cos \varphi$  (2) для преобразователя с электродами на параллельных гранях (а) и для преобразователя с электродами на скошенных гранях (б); сплошные кривые —  $\mu=0,3$ ; штриховые кривые —  $\mu=0,9$

Резонансная частота по мере возрастания  $\mu$  повышается, однако при  $\mu \leq 0,7$  ее изменение не превышает 5% по сравнению с  $f_{0r}$ . Относительная полоса пропускания в интервале значений параметра формы от 0 до 0,9 практически не изменяется.

Электрическая емкость преобразователя первой модификации с ростом  $\mu$  уменьшается по линейному закону, а емкость преобразователя второй модификации увеличивается.

Указанные, а также отмечаемые ниже различия в поведении ряда характеристик двух рассматриваемых модификаций клиновидного преобразователя объясняются различным характером изменения электрического поля вдоль преобразователя.

Из фиг. 3 следует, что положения минимума смещения и максимума механического напряжения слабо зависят от параметра  $\mu$  в широком интервале его значений, причем рассматриваемые зависимости одинаковы для обеих модификаций клиновидного преобразователя. Отношение  $|\xi_{\min}|/|\xi_0|$  также довольно мало меняется с изменением  $\mu$  у преобразователей первой и второй модификаций. Амплитуды максимального механического напряжения в обоих случаях выше, чем амплитуда у преобразователя постоянного сечения, и увеличиваются по мере роста параметра

формы. У клиновидного преобразователя второй модификации амплитуда увеличивается с ростом  $\mu$  быстрее.

Примеры расчетных частотных зависимостей модуля входной электрической проводимости  $|Y_{эл}'| = |Y_{эл}|/2f_0 r C_{01}$  и  $\cos \varphi = G_{эл}/|Y_{эл}|$  даны на фиг. 4а и б соответственно для преобразователей первой и второй модификаций.

Из фиг. 4 следует, что резонансное значение  $\cos \varphi$  практически мало меняется в зависимости от  $\mu$ ; величина  $|Y_{эл}|$  возрастает с ростом параметра формы для второй модификации.

Полученные соотношения и приведенные графические материалы позволяют рассчитать основные характеристики стержневого преобразователя клиновидной формы с поперечной поляризацией пьезокерамики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Алексеев, Д. Б. Дианов, С. П. Карузо. Стержневой преобразователь клиновидной формы. Тр. VIII Всес. акуст. конф. М., 1973.
2. Я. Г. Пановко. Основы прикладной теории упругих колебаний. М., Машгиз, 1957.
3. У. Мэзон. Физическая акустика, т. I, ч. А, М., «Мир», 1966.

Ленинградский электротехнический институт  
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила  
10 мая 1976 г.