

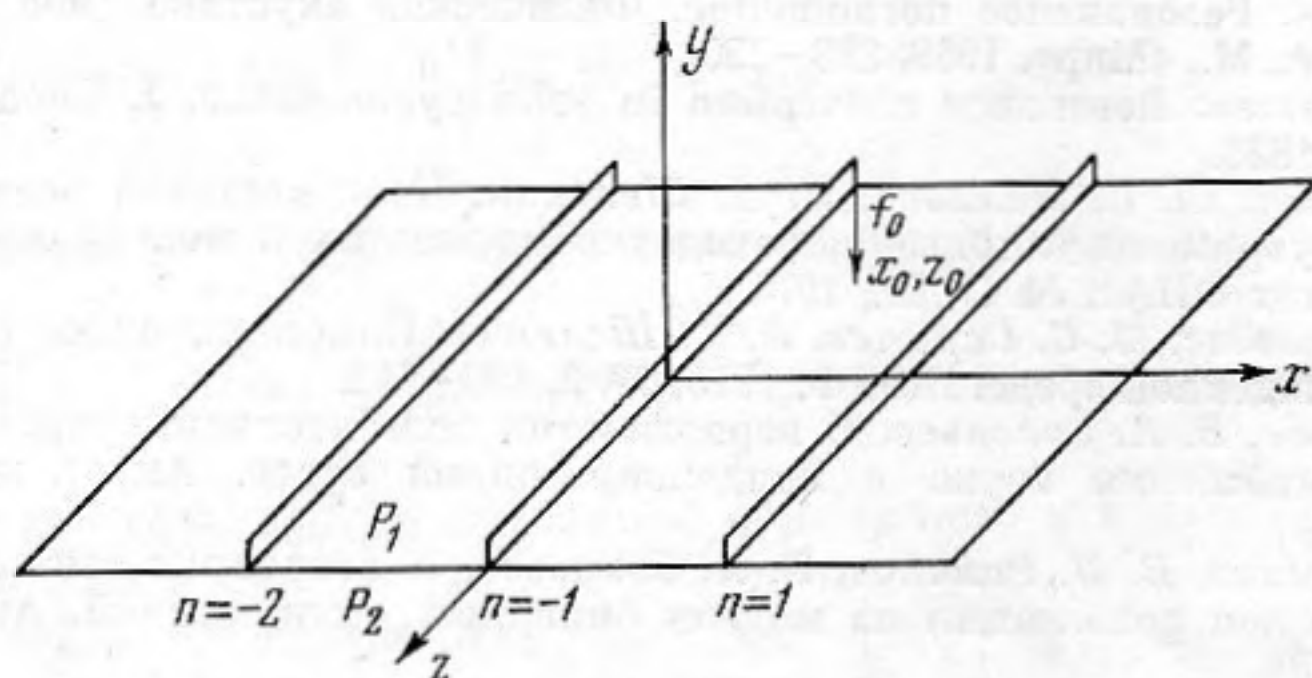
УДК 534.26

**ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНОЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ РЕБЕР, ВОЗБУЖДАЕМОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ**

*В. Н. Романов*

Рассмотрено пространственное распределение величины звукового давления вблизи поверхности изгибно-колеблющейся пластины с конечной системой ребер жесткости. Приведены результаты численных расчетов и проанализирована зависимость величины давления от расстояния до плоскости пластины и от ее параметров.

В ряде работ [1, 2] было рассмотрено излучение звука бесконечной пластиной, возбуждаемой сосредоточенной силой, при наличии на ней бесконечной системы ребер жесткости. При этом именно благодаря наличию бесконечно большого числа ребер жесткости удается получить решение, доступное для расчетов на ЭЦВМ. Для случая же конечного



Фиг. 1. Система координат

числа ребер на бесконечной пластине метод решения задачи, использованной в работах [1, 2], не может быть применен и для решения задачи нужно использовать иной метод.

Рассмотрим излучение звука тонкой бесконечной изгибно-колеблющейся пластиной, соприкасающейся с жидкостью двумя сторонами, при наличии на ней периодической системы ребер жесткости бесконечно малой толщины и при возбуждении ее сосредоточенной силой  $f_0 \exp(-i\omega t)$ , приложенной в точке с координатами  $x_0$  и  $z_0$ ; экспоненциальный множитель мы в дальнейшем опускаем (фиг. 1).

Дифференциальное уравнение колебаний пластины имеет вид:

$$(1) \quad D \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 - k_0^4 \right] w(x, z) = - \sum_{-N_1}^{+N_2} F_j - \sum_{-N_1}^{+N_2} \frac{\partial}{\partial x} M_j - f_0 - P_1 + P_2,$$

где  $w(x, z)$  — смещение нейтральной плоскости пластины,  $N_1$  и  $N_2$  — число ребер, расположенных при  $x \leq 0$  и  $x > 0$  соответственно,

$$(2) \quad F_j = -i\omega Z_F w(x_j, z) \delta(x - x_j),$$

$$M_j = i\omega Z_M \frac{\partial w}{\partial x}(x_j, z) \delta(x - x_j) -$$

поперечные усилия и изгибающие моменты, действующие со стороны ребер на пластину,  $Z_F$  и  $Z_M$  — механические импедансы единицы длины ребра,  $D$  — цилиндрическая жесткость пластины,  $k_0$  — волновое число изгибных волн пластины, находящейся в вакууме,  $P_1$  и  $P_2$  — звуковые давления, действующие на пластину со стороны верхнего и нижнего полупространств жидкости,  $f_0 = \delta(x - x_0) \delta(z - z_0)$ ,  $x_j$  — координата ребра с индексом  $j$ .

Решение задачи должно удовлетворять уравнению Гельмгольца в жидкости и граничному условию при  $y=0$ :

$$(3) \quad w(x, z) = \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial P_2}{\partial y},$$

$\rho$  — плотность жидкости. Решение задачи представим в виде двойного интеграла Фурье:

$$(4) \quad w(x, z) = \frac{k^2}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(k\xi, k\varepsilon) \exp(ik\xi x + ik\varepsilon z) d\xi d\varepsilon,$$

$$(5) \quad P_{1,2} = \frac{k^2}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}_{1,2}(k\xi, k\varepsilon) \exp(ik\xi x + ik\varepsilon z \mp ky \sqrt{\xi^2 + \varepsilon^2 - 1}) d\xi d\varepsilon,$$

где  $k$  — волновое число в жидкости. Используя соотношения (1–5), получаем,

$$(6) \quad \frac{k}{2\pi} \tilde{w}(k\xi, k\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \alpha \beta^{1/2} \sum_{-N_1}^{+N_2} \tilde{w}(x_j, k\varepsilon) \exp(-ik\xi x_j) - \right. \\ \left. - i\delta \beta^{1/2} \frac{\xi}{k} \sum_{-N_1}^{+N_2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}(x_j, k\varepsilon) \exp(-ik\xi x_j) - \frac{b\beta^3}{\rho c^2} \times \right. \\ \left. \times \exp(-ik\xi x_0 - ik\varepsilon z_0) \right\} \sqrt{\xi^2 + \varepsilon^2 - 1} / L(\xi, \varepsilon),$$

где  $L(\xi, \varepsilon) = \sqrt{\xi^2 + \varepsilon^2 - 1} [(\xi^2 + \varepsilon^2)^2 - \beta^2] - 2b\beta^3$ ,  $\beta = k_0^2/k^2 = f_{гр}/f$ ,  $b\beta = \rho c/\omega m_0$ , ( $\rho c$  — волновое сопротивление жидкости,  $m_0$  — масса единицы поверхности пластины)  $\alpha = iZ_F/Z_{0F}$ ,  $\delta = iZ_M/Z_{0M}$  ( $Z_{0F} = Dk_0^3/\omega$ ;  $Z_{0M} = Dk_0/\omega$ ),

$$(7) \quad \tilde{w}(x_j, k\varepsilon) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(k\xi, k\varepsilon) \exp(i\xi k x_j) d\xi,$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}(x_j, k\varepsilon) = \frac{k^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi \tilde{w}(k\xi, k\varepsilon) \exp(i\xi k x_j) d\xi.$$

Найдем трансформанты смещения и угла поворота сечения пластины в месте присоединения к ней ребра с индексом  $n$ , для этого подставим в соотношения (7) величину  $x_n$  вместо  $x_j$ , а также соотношение (6).

Тогда мы получим следующую систему уравнений для определения трансформант смещения и угла поворота

$$\begin{aligned}
\tilde{w}(x_n, k\varepsilon) &= \alpha\beta^{1/2} \sum_j \tilde{w}(x_j, k\varepsilon) I_0(x_n - x_j, k\varepsilon) - \delta\beta^{1/2} \frac{i}{k} \sum_j \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}(x_j, k\varepsilon) \rightarrow \\
&\rightarrow I_1(x_n - x_j, k\varepsilon) - \frac{b\beta^3}{\rho c^2} I_0(x_n - x_0, k\varepsilon) \exp(-i\varepsilon k z_0); \\
(8) \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}(x_n, k\varepsilon) &= ki \left\{ \alpha\beta^{1/2} \sum_j \tilde{w}(x_j, k\varepsilon) I_1(x_n - x_j, k\varepsilon) - \right. \\
&- \delta\beta^{1/2} \frac{i}{k} \sum_j \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}(x_j, k\varepsilon) \rightarrow \\
&\left. \rightarrow I_2(x_n - x_j, k\varepsilon) - \frac{b\beta^3}{\rho c^2} I_1(x_n - x_0) \exp(-i\varepsilon k z_0) \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$I_r(x, k\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^r \exp(ik\xi x) \sqrt{\xi^2 + \varepsilon^2 - 1} / L(\xi, \varepsilon) d\xi.$$

Контурные интегралы такого вида при  $\varepsilon=0$  вычислялись в работе [3]. На частотах ниже граничной частоты ( $\beta \gg 1$  и  $b\beta \gg 1$ ) результаты вычисления на ЭЦВМ этих интегралов при  $0 \leq \varepsilon < q_1$  можно привести приближенно к следующим аналитическим зависимостям:

$$\begin{aligned}
(9) \quad I_0(0, k\varepsilon) &= iQ_0 [1/\sqrt{q_1^2 - \varepsilon^2} + i/(2\sqrt{q_1^2 + \varepsilon^2})]; \\
I_2(0, k\varepsilon) &= iQ_0 [\sqrt{q_1^2 - \varepsilon^2} - i\sqrt{q_1^2 + \varepsilon^2}]; \\
I_2(x, k\varepsilon) &= iQ_0 m \exp(ikm|x|), \\
I_0(x, k\varepsilon) &= iQ_0/m \exp(ikm|x|), \\
I_1(x, k\varepsilon) &= iQ_0 \exp(ikm|x|) \operatorname{sign} x,
\end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} I_0(0, k\varepsilon) \\ I_2(0, k\varepsilon) \\ I_2(x, k\varepsilon) \\ I_0(x, k\varepsilon) \\ I_1(x, k\varepsilon) \end{aligned}} \right\} \text{при } km|x| \gg 1,$$

$$Q_0 = \frac{q_1^2 - 1}{5q_1^4 - 4q_1^2 - \beta}, \quad m = \sqrt{q_1^2 - \varepsilon^2}, \quad q_1 \approx \sqrt{\beta} \sqrt{1 + 2b\sqrt{\beta}}.$$

Величина  $q_1$  — полюс на вещественной оси [4]. Условие  $km|x| \gg 1$  определяет взаимодействие ребер только через распространяющиеся по пластине изгибные волны.

Подставляя выражения (9) в формулу (8), получим:

$$\begin{aligned}
(10) \quad \tilde{w}(x_n, k\varepsilon) &\gamma_1 + \delta_1 \sum_{\substack{j, j \neq n \\ -N_1}}^{+N_2} \tilde{w}(x_j, k\varepsilon) \exp\left(\frac{ikm}{x_n} - x_j\right) + \\
&+ d_2 \sum_{\substack{j, j \neq n \\ -N_1}}^{+N_2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}(x_j, k\varepsilon) \operatorname{sign}(x_n - x_j) \rightarrow \\
&\rightarrow \exp(ikm|x_n - x_j|) = \kappa_1 \exp(ikm|x_n - x_0|), \\
\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}(x_n, k\varepsilon) &\gamma_2 + \delta_2 \sum_{\substack{j, j \neq n \\ -N_1}}^{+N_2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}(x_j, k\varepsilon) \exp(ikm|x_n - x_j|) + \\
&+ d_1 \sum_{\substack{j, j \neq n \\ -N_1}}^{+N_2} \tilde{w}(x_j, k\varepsilon) \operatorname{sign}(x_n - x_j) \rightarrow \\
&\rightarrow \exp(ikm|x_n - x_j|) = \kappa_2 \exp(ikm|x_n - x_0|) \operatorname{sign}(x_n - x_0).
\end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1 - \alpha\beta^{3/2} I_0(0, k\varepsilon), & \delta_1 &= -i\alpha\beta^{3/2} Q_0/m, & d_1 &= k\alpha\beta^{3/2} Q_0, \\ \gamma_2 &= 1 - \delta\beta^{3/2} I_2(0, k\varepsilon), & \delta_2 &= -i\delta\beta^{3/2} Q_0/m, & d_2 &= -\delta\beta^{3/2} Q_0/k, \\ \kappa_1 &= -i \frac{b\beta^3}{\rho c^2} Q_0 / \sqrt{q_1^2 - \varepsilon^2} \exp(-i\varepsilon k z_0), \end{aligned}$$

$$\kappa_2 = \frac{kb\beta^3}{\rho c^2} Q_0 \exp(-i\varepsilon k z_0).$$

В общем случае необходимо решить систему  $2(N_1 + N_2)$  уравнений (10) и определить величины

$$\tilde{w}(x_n, k\varepsilon) = \frac{\Delta_{wn}}{\Delta_{2N_0}}, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}(x_n, k\varepsilon) = \frac{\Delta_{dw_n}}{\Delta_{2N_0}},$$

где  $N_0 = N_1 + N_2$ ,  $\Delta_{2N_0}$  — определитель системы порядка  $2N_0$ ,  $\Delta_{wn}$  и  $\Delta_{dw_n}$  — определители, полученные из  $\Delta_{2N_0}$  заменой соответствующего столбца столбцом свободных членов.

В дальнейшем будем считать, что  $N_1 = N_2 = N$ .

Систему уравнений (10) в общем случае можно решить лишь с помощью ЭЦВМ, однако в случае отсутствия моментного импеданца у ребер решение системы получается в аналитическом виде. При  $z_M = 0$  система уравнений (10) приводится к виду

$$\tilde{w}(x_n, k\varepsilon) \gamma_1 + \delta_1 \sum_{\substack{j: j \pm n \\ -N}}^{+N} \tilde{w}(x_j, k\varepsilon) \exp(ikm|x_n - x_j|) = \kappa_1 \exp(ikm|x_n - x_0|),$$

при этом  $\tilde{w}(x_n, k\varepsilon) = \frac{\Delta_{wn}}{\Delta_{2N}}$

Матрица определителя системы  $\Delta_{2N}$  имеет следующий вид

$$\Delta_{2N} = \begin{array}{cccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \gamma_1 & \delta_1 E & \delta_1 E^2 & \delta_1 E^3 & \delta_1 E^4 & \delta_1 E^5 & \cdots \\ \cdots & \delta_1 E & \gamma_1 & \delta_1 E & \delta_1 E^2 & \delta_1 E^3 & \delta_1 E^4 & \cdots \\ \cdots & \delta_1 E^2 & \delta_1 E & \gamma_1 & \delta_1 E & \delta_1 E^2 & \delta_1 E^3 & \cdots \\ \cdots & \delta_1 E^3 & \delta_1 E^2 & \delta_1 E & \gamma_1 & \delta_1 E & \delta_1 E^2 & \cdots \\ & & & & N=1 & & & \\ \cdots & \delta_1 E^4 & \delta_1 E^3 & \delta_1 E^2 & \delta_1 E & \gamma_1 & N=2 & \delta_1 E \\ \cdots & \delta_1 E^5 & \delta_1 E^4 & \delta_1 E^3 & \delta_1 E^2 & \delta_1 E & \gamma_1 & N=3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Здесь  $E = \exp(ikml)$ . Для упрощения матрицы  $\Delta_{2N}$  вычтем из строчек, находящихся ниже горизонтальной штрихпунктирной линии, верхние строчки, находящиеся на одном и том же удалении от этой линии, а затем из столбцов, расположенных левее вертикальной штрихпунктирной линии, вычтем правые столбцы, расположенные на том же удалении. В результате получим выражение

$$\Delta_{2N} = \begin{array}{ccc|ccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \gamma_1 + \delta_1 E^5 & \delta_1 E + \delta_1 E^4 & \delta_1 E^2 + \delta_1 E^3 & \delta_1 E^3 & \delta_1 E^4 & \delta_1 E^5 \vdots \\ \vdots & \delta_1 E + \delta_1 E^4 & \gamma_1 + \delta_1 E^3 & \delta_1 E + \delta_1 E^2 & \delta_1 E^2 & \delta_1 E^3 & \delta_1 E^4 \vdots \\ \vdots & \delta_1 E^2 + \delta_1 E^3 & \delta_1 E + \delta_1 E^2 & \gamma_1 + \delta_1 E & \delta_1 E & \delta_1 E^2 & \delta_1 E^3 \vdots \\ \hline & & 0 & & \gamma_1 - \delta_1 E & \delta_1 E - \delta_1 E^2 & \delta_1 E^2 - \delta_1 E^3 \dots \\ & & & & \delta_1 E - \delta_1 E^2 & \gamma_1 - \delta_1 E^3 & \delta_1 E - \delta_1 E^4 \dots \\ & & & & \delta_1 E^2 - \delta_1 E^3 & \delta_1 E - \delta_1 E^4 & \gamma_1 - \delta_1 E^5 \dots \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} =$$

$$= \Delta_N | B |_N,$$

где 0 обозначает нулевую матрицу.

В матрице  $\Delta_N$  вычтем из предыдущих столбцов последующие, умноженные на  $E$ , а затем вычтем из предыдущих строчек последующие, также умноженные на  $E$ ; в результате получаем

$$(11) \quad \Delta_N = \begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b & a & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & a & b & a & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & a & b & a \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & a & c_1 \end{array} = c_1 D_{N-1} - a^2 D_{N-2},$$

где  $b = \gamma_1 - 2\delta_1 E^2 + \gamma_1 E^2$ ,  $c_1 = \gamma_1 + \delta_1 E$ ,  $a = E(\delta_1 - \gamma_1)$ . Матрицу  $\Delta_{wn}$  также можно упростить аналогичными преобразованиями, но только в том случае, если сила приложена в центре системы ребер, т. е.  $x_0 = l/2$ . При этом  $\Delta_{wn} = \Delta_n | B |_N$ , где индекс  $n$  имеет абсолютное значение, т. е.  $\Delta_{-n} = \Delta_{+n}$ .

Матрицу  $\Delta_n$  после аналогичных преобразований можно разделить на четыре матрицы, одна из которых нулевая, другая — диагональная, остальные квадратные. В результате получим

$$(12) \quad \Delta_n = \kappa_1 \exp(ikml/2) a^{n-1} (d D_{N-n-1} - a^2 D_{N-n-2}),$$

где  $d = \gamma_1 - \delta_1 E^2$ . Определители  $D_S$  в выражениях (11) и (12) имеют вид

$$D_S = \begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b & a & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & a & b & a & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & a & b & a \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & a & b \end{array}$$

и легко вычисляются методом рекуррентных соотношений [5]. Окончательное выражение для трансформанты смещения определяется как

$$(13) \quad \tilde{w}(x_n, k\varepsilon) = \frac{[dT_{N-n} - a^2 T_{N-n-1}] (\gamma_1 - \delta_1)^{n-1}}{c_1 T_N - a^2 T_{N-1}} \kappa_1 E^{n-1/2},$$

где

$$T_t = \frac{(b + \sqrt{b^2 - 4a^2})^t - [b - \sqrt{b^2 - 4a^2}]^t}{2^t \sqrt{b^2 - 4a^2}}.$$

Если коэффициент потерь в материале пластины достаточно велик, выражение (13) можно существенно упростить. Введем потери через комплексный модуль Юнга  $E = E_0(1 - i\eta_0)$ ; величина полюса на вещественной оси станет комплексной  $q_1 = q_1(1 + i\eta_0/4)$ , при этом величина  $m =$

$=\sqrt{q_1^2 - \varepsilon^2}$  также будет комплексной величиной с положительной мнимой частью ( $\varepsilon \ll q_1$  в точке перевала), следовательно,  $|E| = |\exp(ikml)|$  может быть при больших  $\eta_0$  много меньше единицы.

Пренебрегая  $\varepsilon$  по сравнению с  $q_1$ , можно найти условие неравенства  $|E| \ll 1$ :  $\exp(-kq_1 l \eta_0 / 4) \ll 1$ . Положив  $|E| \leq 0,25$ , найдем, что  $\eta \geq \frac{5,5}{kq_1 l}$ .

При  $|E| \ll 1$ , учитывая, что  $|\delta_1| \approx |\gamma_1|$ , упростим выражения для коэффициентов, входящих в формулу (13), пренебрегая  $|E|^2$  по сравнению с единицей:  $b \approx d \approx \gamma_1$ . Поскольку  $|a|^2 \ll d$ ,  $c_1$ , то можно показать, что

$$(14) \quad \tilde{w}_\eta(x_n, k\varepsilon) = \frac{\kappa_1 E^{n-1/2} (\gamma_1 - \delta_1)^{n-1}}{(\gamma_1 + \delta_1 E) \gamma_1^{n-1}}.$$

Представим для удобства дальнейших преобразований трансформанты смещений и углов поворотов, определяемых системой уравнений (10), в виде

$$(15) \quad \tilde{w}(x_n, k\varepsilon) = \frac{b\beta^3}{\rho c^2} Q_0 \tilde{w}^{**}(x_n, k\varepsilon) \exp(ikm|x_n - x_0| - ik\varepsilon z_0),$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}(x_n, k\varepsilon) = \frac{b\beta^3}{\rho c^2} Q_0 \frac{\partial \tilde{w}^{**}}{\partial x}(x_n, k\varepsilon) \exp(ikm|x_n - x_0| - ik\varepsilon z_0).$$

Выделяя из соотношений (13) и (14) множители в соответствии с выражением (15), получим

$$\tilde{w}^{**}(x_n, k\varepsilon) = \frac{-i}{\sqrt{q_1^2 - \varepsilon^2}} \frac{[-a^2 T_{N-n-1} + d T_{N-n}]}{c_1 T_N - a^2 T_{N-1}} (\gamma_1 - \delta_1)^{n-1}.$$

$$\tilde{w}_\eta^{**}(x_n, k\varepsilon) = \frac{-i}{\sqrt{q_1^2 - \varepsilon^2}} \frac{(\gamma_1 - \delta_1)^{n-1}}{(\gamma_1 + \delta_1 E) \gamma_1^{n-1}}.$$

Вычислим звуковое давление  $p_1$  в верхнем полупространстве. Поскольку на основании соотношения (3) трансформанта давления

$$(16) \quad \tilde{p}_1(k\xi, k\varepsilon) = -\rho c^2 k \tilde{w}(k\xi, k\varepsilon) / \sqrt{\xi^2 + \varepsilon^2 - 1}, \text{ то}$$

$$p_1 = -\frac{k^2 b \beta^3}{(2\pi)^2} \iint \sum_n \left[ \alpha \beta^{1/2} \tilde{w}^{**}(x_n, k\varepsilon) - \frac{i \delta \beta^{1/2} \xi}{k} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial \tilde{w}^{**}}{\partial x}(x_n, k\varepsilon) \right] Q_0 \exp[ik\xi(x - x_n) + ikm|x_n - x_0| + \\ + ik\varepsilon(z - z_0) - ky \sqrt{\xi^2 + \varepsilon^2 - 1}] / L(\xi, \varepsilon) d\xi d\varepsilon - \\ - \frac{k^2}{(2\pi)^2} b \beta^3 \iint \exp[ik\xi(x - x_0) + ik\varepsilon(z - z_0) - \\ - ky \sqrt{\xi^2 + \varepsilon^2 - 1}] / L(\xi, \varepsilon) d\xi d\varepsilon = P_F + P_M + P_T.$$

Второй интеграл в выражении (16) определяет  $P_T$  — звуковое давление, создаваемое бесконечной пластиной без ребер при воздействии на нее сосредоточенной силы. При достаточно большом удалении точки наблюдения от поверхности пластины ( $ky \gg 1$ ) он может быть вычислен методом перевала. Окончательный результат имеет вид

$$(17) \quad P_T = \frac{-ik^2 \cos \vartheta_0 \exp(ikR_0)}{4\pi k R_0 [1 - i \cos \vartheta_0 (1 - \sin^4 \vartheta_0 / \beta^2) / (2b\beta)]},$$

где  $R_0$  — величина радиуса-вектора, проведенного из точки возбуждения пластины в точку наблюдения,  $\vartheta_0$  — угол между  $R_0$  и осью  $y$ . Оставшийся в выражении (16) интеграл определяет сумму  $P_F + P_M$  — звуковое давление, создаваемое пластиной и обусловленное наличием на ней системы ребер жесткости с импедансами  $Z_F$  и  $Z_M$ .

Вычисление этого интеграла проведем следующим образом. Сначала выполним внутреннее интегрирование по переменной  $\xi$ . При удалении точки наблюдения на достаточно большое расстояние от пластины ( $ky \gg \gg 1$ ) интегралы по  $\xi$  можно свести к интегралам по перевальным путям, поскольку вкладами в результат вычисления суммы вычетов в полюсах, определяемых выражением  $L(\xi, \epsilon)$ , можно пренебречь.

Для выполнения интегрирования введем следующую систему координат:  $\xi = \sin t_n$ ,  $y = R_n \cos Q_n$ ,  $x - x_n = R_n \sin Q_n$ . Тогда точка перевала  $t_{0n}$ , определяется из выражения, получаемого приравниванием нулю производных показателей экспонент:

$$ik\xi(x-x_n) - ky\sqrt{\xi^2 + \epsilon^2 - 1} = ikR_n(\sin t_n \sin Q_n + \sqrt{\cos^2 t_n - \epsilon^2 \cos^2 Q_n}) = ikR_n \varphi_{t_n}.$$

В точке перевала

$$\varphi'_{t_{0n}} = 0; \quad \sin t_{0n} = \sin Q_n \sqrt{1 - \epsilon^2};$$

$$\cos t_{0n} = \sqrt{\cos^2 Q_n + \sin^2 Q_n \epsilon^2},$$

$$\varphi''_{t_{0n}} = (-\cos^2 Q_n - \sin^2 Q_n \epsilon^2) / [\cos^2 Q_n (1 - \epsilon^2)^{1/2}].$$

Для вычисления внешнего интеграла по  $\epsilon$  введем систему координат  $\epsilon = q_1 \sin \alpha$ ,  $z - z_0 = R_{0n} \sin \varphi_{0n}$ ,  $x_n - x_0 = R_{0n} \cos \varphi_{0n}$ , тогда показатели экспонент примут вид

$$(18) \quad i\psi_{\epsilon n} = ik(x_n - x_0) \sqrt{q_1^2 - \epsilon^2} + ik\epsilon(z - z_0) + ikR_n \sqrt{1 - \epsilon^2} = \\ = ikq_1 R_{0n} \cos(\alpha - \varphi_{0n}) + ikR_n \sqrt{1 - q_1^2 \sin^2 \alpha}.$$

Внешний интеграл при достаточно большом удалении точки возбуждения от ребер ( $kq_1 R_{0n} \gg 1$ ) также можно свести к интегралу по перевальному пути. Точка перевала  $\alpha_{0n}$  легко находится лишь при  $\varphi_{0n} = 0$ ,  $(z - z_0) = 0$ , т. е. в том случае, когда точка наблюдения и точка возбуждения лежат в одной плоскости, перпендикулярной ребрам, при этом  $\alpha_{0n} = 0$ .

В общем случае, при  $\beta \gg 1$ , точку перевала можно приближенно найти из выражения (18), приняв во внимание, что для дальнего поля основной вклад будет давать область  $\alpha_{0n} < \frac{1}{q_1} \ll 1$ . Мы получаем

$$\alpha_{0n} \approx \gamma_{zn} / \sqrt{(1 + \gamma_{xn})^2 + q_1^2 \gamma_{zn}^2},$$

$$\mu_n = \sqrt{(1 + \gamma_{xn})^2 + q_1^2 \gamma_{zn}^2},$$

$$\psi''_{\epsilon n 0} = -kq_1^2 R_n \{ \gamma_{xn} + \gamma_{zn}^2 / \mu_n + \mu_n / (1 + \gamma_{xn}) [1 + \gamma_{zn}^2 / (1 + \gamma_{xn})^2] \},$$

где  $\gamma_{xn} = |x_n - x_0| / (q_1 R_n)$ ,  $\gamma_{zn} = |z - z_0| / (q_1 R_n)$ . Окончательно выражение для звукового давления, создаваемого многопролетной пластиной вследствие наличия ребер принимает следующий вид

$$(19) \quad P_F + P_M = \frac{-ik^2 q_1 b \beta^3}{2\pi} \sum_{-N_1}^{+N_2} \left\{ \left[ \frac{\alpha \beta^{1/2}}{\sqrt{k R_n}} \tilde{w}^{**}(x_n, kq_1 \alpha_{0n}) \frac{-i\delta \beta^{1/2}}{\sqrt{k R_n} k} \sin(t_{0n\alpha}) \right] \right\}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \tilde{w}^{**}}{\partial x} (x_n, kq_1 \alpha_{0n}) \left] Q_0 \frac{\cos \alpha_{0n} \cos t_{0n\alpha}}{\sqrt{\varphi''_{t_{0n\alpha}} \psi''_{\varepsilon n 0}}} / L(\sin t_{0n\alpha}; q_1 \alpha_{0n}) \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \exp[ikR_n(1+\gamma_{xn})/\mu_n + ikq_1 R_{0n} \cos(\alpha_0 - \varphi_{0n})] \right\},$$

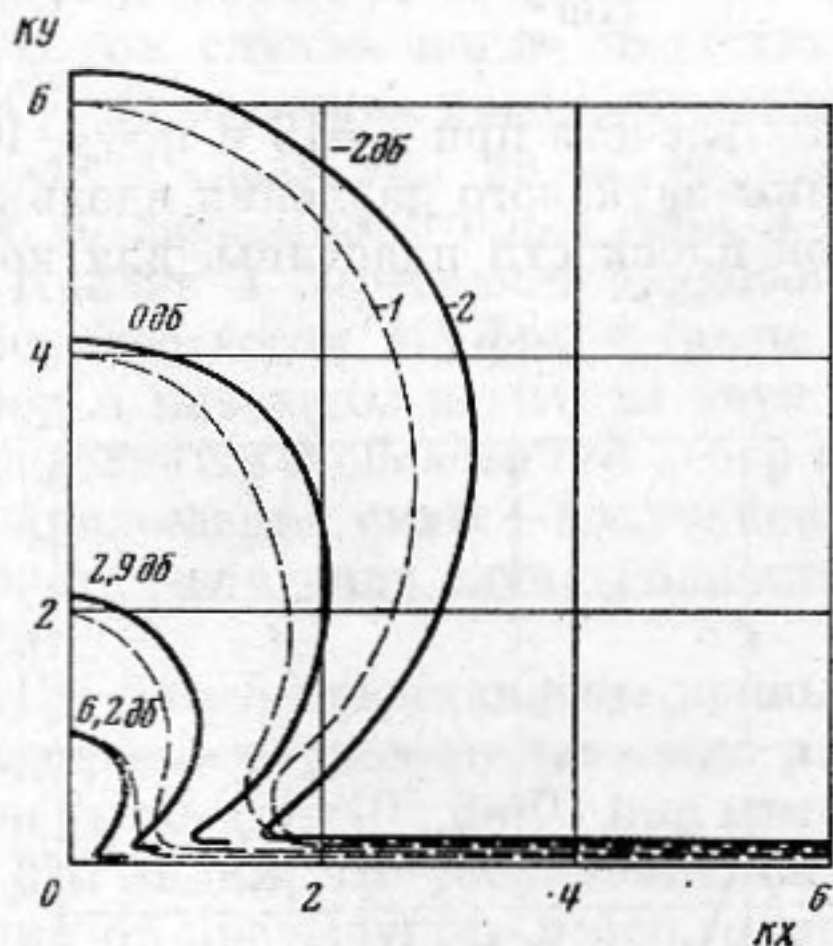
где  $\sin t_{0n\alpha}$ ,  $\cos t_{0n\alpha}$  — величины  $\sin t_{0n}$  и  $\cos t_{0n}$ , вычисленные при  $\varepsilon = q_1 \alpha_{0n}$ .

Если точка наблюдения и точка возбуждения лежат в плоскости, перпендикулярной ребрам, точка перевала будет  $\alpha_{0n} = 0$  и выражение (19) упрощается

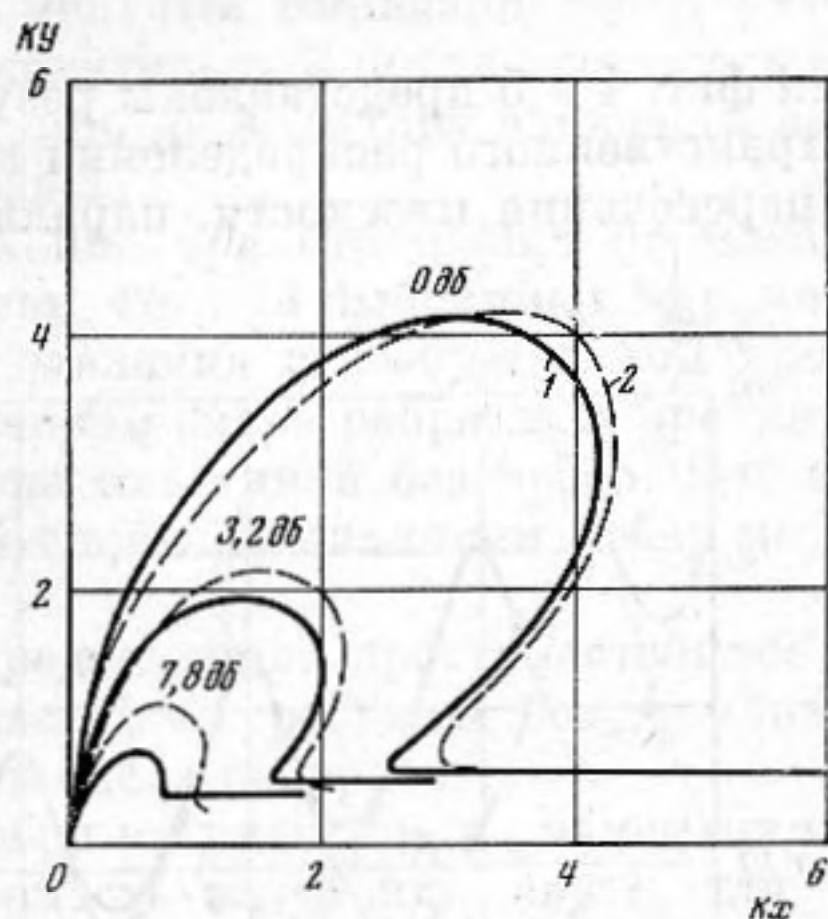
(20)

$$P_F + P_M = \frac{i\sqrt{q_1} k^2}{4\pi} \sum_{-N_1}^{+N_2} \left\{ \left[ \alpha \beta^{3/2} \tilde{w}^{**}(x_n, 0) - i \frac{\delta \beta^{3/2}}{k} \sin Q_n \frac{\partial \tilde{w}^{**}}{\partial x}(x_n, 0) \right] \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow Q_0 \cos Q_n \exp[ikR_n + ikq_1 R_{0n}] / \sqrt{kR_n(kR_{0n} + kR_n q_1)} / [1 - \right. \\ \left. - i \cos Q_n (1 - \sin^2 Q_n) / (2b\beta)] \right\}.$$

Выражения (19) и (17) получены при использовании метода перевала, который в общем случае дает достаточную точность при  $ky \gg 1$ . Однако в работе [4] было показано, что выражением (17), описывающим из-



Фиг. 2. Кривые равного звукового давления для случая силового взаимодействия ребра с пластиной: 1 — точный расчет, 2 — приближенный расчет



Фиг. 3. Кривые равного звукового давления для случая моментного взаимодействия ребра с пластиной: 1 — точный расчет, 2 — приближенный расчет

лучение звука пластиной без ребер, с достаточной для практики точностью можно пользоваться на низких частотах при  $\beta \gg 1$ , начиная с  $ky \geq 1$ . Аналогичное условие имеет место и для излучения звука пластиной вследствие наличия на ней ребра. На фиг. 2 и 3 представлены кривые равного давления, рассчитанные для  $\beta = 32$  в плоскости, проходящей перпендикулярно ребру ( $\varepsilon = \alpha_{0n} = 0$ ) для случаев силового и моментного взаимодействия ребра с пластиной соответственно. Кривые 1 представляют результаты расчетов на ЭЦВМ по выражению (16), а кривые 2 — по выражению (20).

Из сопоставления этих кривых следует, что результаты расчетов по асимптотическому выражению (20) достаточно удовлетворительно совпадают с точным, начиная с  $ky \geq 1$ .

Анализ структуры выражений (19) и (20) показывает, что каждое ребро является акустическим излучателем, производительность которого зависит от его перемещения и угла поворота, причем закон убывания звукового давления, создаваемого ребром, зависит от степени приближения точки возбуждения к ребру. Если точка возбуждения находится вблизи ребра ( $R_{0n} \ll R_n q_1$ ), закон убывания давления будет сферическим, в противном случае ( $R_{0n} \gg R_n q_1$ ) будет иметь место цилиндрический закон.

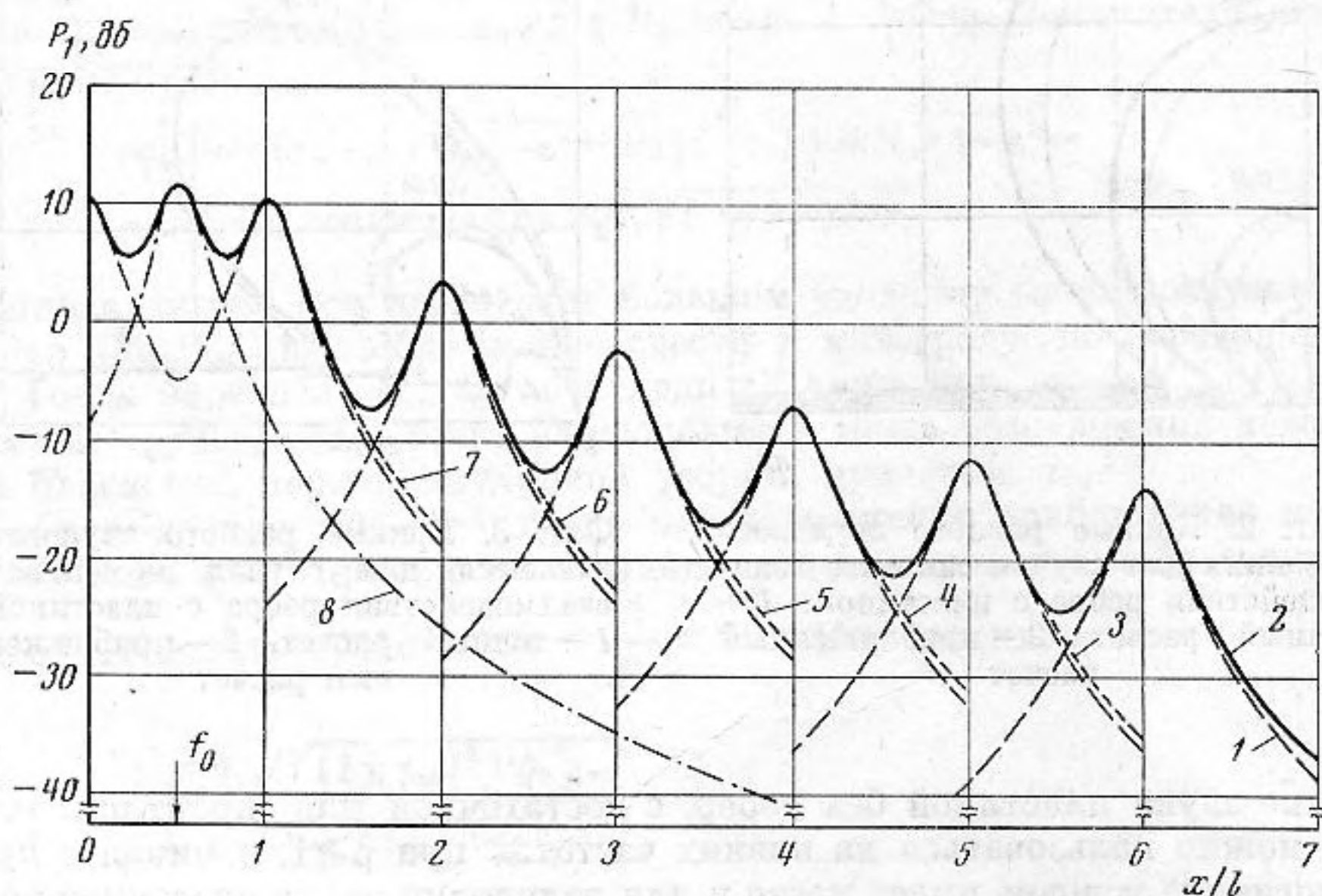
С целью исключения влияния на анализ полученных результатов резонансов пролетов пластины между ребрами целесообразно выражение для  $P_1$  усреднить по полосе, в которую попадают несколько резонансов пролетов:

$$\overline{P_1^2} = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |P_1|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |P_T + P_F + P_M|^2 d\omega.$$

Фиг. 4. Пространственное распределение величины звукового давления для пластины с 4 ребрами: 1 — абсолютно жесткие ребра; 2 — абсолютно жесткие ребра, несжимаемая жидкость; 3 — свободно опертые ребра

На фиг. 4 и 5 представлены результаты расчета при  $\beta=16$  и  $\eta_0=4 \cdot 10^{-3}$  пространственного распределения величины звукового давления вдоль линии пересечения плоскости, параллельной плоскости пластины, для кото-



Фиг. 5. Пространственное распределение величины звукового давления для пластины с различным числом свободно опертых ребер жесткости: 1 — излучение отдельных ребер; 2—7 — суммарное излучение при числе ребер 12, 10, 8, 6, 4, 2 соответственно; 8 — излучение звука пластиной без ребер

рой  $ky=\pi$ , и плоскости  $yOx$ , проходящей через точку возбуждения пластины силой. При этом система (10) решалась при  $\epsilon=0$  с помощью ЭЦВМ, значения  $I_{0,2}(0,0)$  заимствовались из работы [3].

Пластина возбуждается в центре среднего пролета, определяемого ребрами с индексами  $n=-1$  и  $n=1$ , единичной точечной силой. Вследствие симметрии картины пространственного распределения на фиг. 4 и 5 представлено распределение, начиная с ребра, имеющего индекс  $n=-1$ , вдоль положительной части оси  $x$  (см. фиг. 1). Волновой размер пролета между соседними ребрами  $kl$  равен  $6\lambda$ .

На фиг. 4 представлено пространственное распределение величины звукового давления для пластины с 4 ребрами. Кривая 1 характеризует излучение звука пластиной в том случае, когда механический импеданс ребер достаточно велик ( $\alpha=\delta=10^4$ ). Видно, что даже в этом случае в месте соединения второго ребра с пластиной имеет место излучение звука, т. е. энергия колебаний через жидкость и через пластину передается из возбуждаемого пролета в соседний. Если при определении величин  $\tilde{w}(x_n, k\varepsilon)$  и  $\frac{\partial}{\partial x}\tilde{w}(x_n, k\varepsilon)$  пренебречь сжимаемостью жидкости (при этом

изменяется лишь  $I_0(0; k\varepsilon) = iQ_0[1/\sqrt{q_1^2 - \varepsilon^2} + i/\sqrt{q_1^2 + \varepsilon^2}]$ , то передача энергии колебаний будет происходить ко второму ребру лишь через пластину и величина звукового давления от второго ребра существенно понижается (кривая 2). В связи с тем, что при пренебрежении сжимаемостью жидкости уменьшаются потери энергии в возбуждаемом пролете, то амплитуда изгибных колебаний в этом пролете увеличивается, соответственно увеличивается величина звукового давления, создаваемого первым ребром.

В том случае, когда отсутствует моментный импеданс ребер ( $\alpha=10^4$ ,  $\delta=0$ ), по пластине распространяется значительный поток энергии, и сжимаемость среды уже не влияет существенно на величину звукового давления, создаваемого вторым ребром (кривая 3).

Кривая 4 определяет звуковое давление при отсутствии на пластине ребер жесткости. Из фиг. 4 также следует, что при выбранных параметрах ребер и пластины величина звукового давления в возбуждаемом пролете определяется в области его ребер излучением звука ребрами, а против точки приложения силы — излучением звука пластиной без ребер. Вне этого пролета излучение звука полностью обусловлено наличием ребер на пластине.

На фиг. 5 представлены кривые, определяющие пространственное распределение звукового давления для пластины с ребрами без моментного импеданца ( $\alpha=10^4$ ,  $\delta=0$ ) при изменении числа ребер.

Мы видим, что увеличение числа ребер на пластине не изменяет излучения от предыдущих ребер, направленность излучения звука для всех ребер близка друг к другу, изменяется лишь производительность источников в области ребер, которая зависит от  $\tilde{w}(x_n, 0)$ .

Из фиг. 5 также следует, что отсутствие моментного импеданца ребер приводит к тому, что вклад в общее излучение, создаваемое ребрами, которые находятся вне возбуждаемого пролета, становится определяющим. При рассмотрении задачи для случая возбуждения в полосе шума моментным импеданцем реальных ребер в звуковом диапазоне частот практически всегда можно пренебречь [6].

Следует отметить, что выводы, сделанные выше, относятся к случаю достаточно большого силового импеданца ребер ( $\alpha=10^4$ ); по мере уменьшения этого импеданца вклад ребер в излучение, естественно, будет также снижаться и в пределе происходит переход к случаю пластины без ребер.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Д. Плахов. Звуковое поле многопролетной пластины. Акуст. ж., 1967, 13, 4, 597—603.
2. В. Н. Евсеев. Излучение звука бесконечной пластиной с периодическими неоднородностями. Акуст. ж., 1973, 19, 3, 345—351.

3. В. Н. Романов. Излучение звука бесконечной пластиной при наличии на ней ребер жесткости. Акуст. ж., 1971, 17, 1, 116-121.
4. В. С. Иванов, В. Н. Романов. К вопросу определения звукового давления вблизи поверхности бесконечной пластины, возбуждаемой сосредоточенной силой. Акуст. ж., 1970, 16, 4, 526-529.
5. А. П. Мишина, И. В. Проскураков. Высшая алгебра, М., «Наука», 1965.
6. А. С. Никифоров. О виброизоляции одиночного ребра жесткости. Акуст. ж., 1969, 15, 4, 623-625.

Поступила  
11 апреля 1974 г.  
После последнего исправления  
12 августа 1976 г.