

УДК 534.213

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО РАЗДЕЛЕНИЯ
ПЕРЕМЕННЫХ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ
О КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРОВ**

Л. С. Шейба, С. А. Шляпочников

Метод приближенного разделения переменных применен к некоторым задачам о продольных колебаниях цилиндров из резиноподобного материала. Решения, полученные для бесконечного цилиндра, сравниваются с известными точными и приближенными. Построена матрица передачи конечного цилиндра, колеблющегося между плоскими штампами.

Метод разделения переменных, как правило, не позволяет получить решения задач динамической теории упругости, даже для тел простейшей формы. В связи с этим может оказаться полезным метод приближенного разделения переменных (метод Л. В. Канторовича приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям [1]). Применительно к двумерным задачам электродинамики и акустики этот метод в трактовке Л. А. Вайнштейна приводит к системе интегродифференциальных уравнений или в упрощенном варианте к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка [2]. Приближенные решения ряда статических осесимметричных задач для цилиндров из резиноподобного материала, имеющих свободные от напряжений поверхности, получены в работах [3, 4]. Существенным здесь оказывается то обстоятельство, что благодаря использованию условия несжимаемости резиноподобного материала поле смещений зависит от двух функций, одна из которых выбирается из физических соображений, а другая является решением дифференциального уравнения четвертого порядка.

В настоящей работе применяется метод приближенного разделения переменных к некоторым линейным динамическим задачам для сплошных и полых цилиндров из резиноподобного материала.

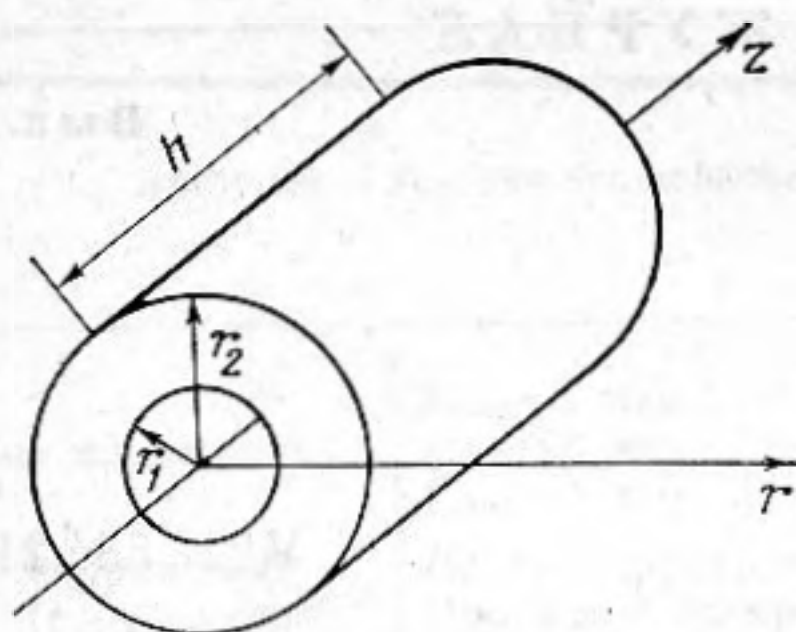
Введем функционал «действия» J , соответствующий искомому векторному полю смещений $Ue^{i\omega t}$ [5]:

$$(1) \quad J = \int_S u_i T_i dS + \int_V [-\lambda \epsilon_{hh} \epsilon_{ii}^* - 2\mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}^* + \rho \omega^2 u_i u_i^*] dV,$$

где u_i , T_i , ϵ_{ij} — компоненты вектора смещений, вектора сил и тензора деформаций, причем звездочка означает комплексное сопряжение, λ , μ , ρ — константы Ламе и плотность материала цилиндра, S — поверхность, ограничивающая объем цилиндра V , ω — круговая частота, t — время.

Осесимметричный относительно цилиндрической системы координат r, z, θ (фиг. 1) вектор смещения будем искать в виде

$$(2) \quad \begin{aligned} u_z &= \frac{f(z)}{r} \frac{d}{dr} (r\psi(r)), \\ u_r &= -\frac{df(z)}{dz} \psi(r). \end{aligned}$$



Фиг. 1. Геометрия цилиндра

Соотношения (2) удовлетворяют условию несжимаемости резиноподобного материала

$$(3) \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0,$$

имеющему место для цилиндров, хотя бы часть поверхности которых свободна от нормальных напряжений.

Полагая, согласно методу приближенного разделения переменных, функцию $\psi(r)$ известной и учитывая условие (3), выполним интегрирование по переменной r в формуле (1). Уравнение Эйлера и естественные граничные условия для полученного функционала имеют вид

$$(4) \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} + \gamma_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dz^2} + \gamma_2^2 \right) f(z) = \frac{1}{\mu} \sigma_{rz}(r, z) \frac{d}{dr} (r\psi'(r)) \Big|_{r_1}^{r_2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rr}(r, z) r\psi'(r) \Big|_{r_1}^{r_2}.$$

$$(5) \quad \left[\frac{d^3}{dz^3} + A_3(k_i^2; \psi, \psi', \psi'') \frac{d}{dz} \right] f(z) = -\frac{1}{\mu} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{zz}(r, z) \frac{d}{dr} (r\psi'(r)) dr - \left[\frac{1}{\mu} \sigma_{rr}(r, z) r\psi'(r) \right] \Big|_{r_1}^{r_2}, \quad z=0, h$$

$$(6) \quad \left[\frac{d^2}{dz^2} + A_4(\psi, \psi', \psi'') \right] f(z) = -\frac{1}{\mu} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{rz}(r, z) \psi r dr, \quad z=0, h,$$

где

$$(7) \quad \gamma_{1,2}^2 = \frac{1}{2} A_1(k_i^2; \psi, \psi', \psi'') \pm \sqrt{\frac{1}{4} A_1^2(k_i^2; \psi, \psi', \psi'') + A_2(k_i^2; \psi, \psi', \psi'')},$$

$k_i = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \omega$ — сдвиговое волновое число, σ_{rr} , σ_{rz} , σ_{zz} — компоненты тензора напряжений, штрихи означают дифференцирование по соответствующей переменной, например $\psi' = \frac{d\psi}{dr}$. Функционалы A_i определяются соотношениями:

$$(8) \quad \begin{aligned} A_1(k_i^2; \psi, \psi', \psi'') &= k_i^2 + \langle \varphi' \psi \rangle - 2 \langle \psi' \psi'' \rangle - \\ &- 2 \left\langle \frac{\psi \psi^*}{r^2} \right\rangle - 2 \langle \varphi \varphi^* \rangle + \langle \varphi' \psi^* \rangle, \\ A_2(k_i^2; \psi, \psi', \psi'') &= k_i^2 \langle \varphi \varphi^* \rangle - \langle \varphi' \varphi'^* \rangle, \\ A_3(k_i^2; \psi, \psi', \psi'') &= k_i^2 - 2 \langle \psi' \psi'' \rangle - 2 \left\langle \frac{\psi \psi^*}{r^2} \right\rangle - 2 \langle \varphi \varphi^* \rangle - \langle \varphi' \psi^* \rangle, \\ A_4(\psi, \psi', \psi'') &= \langle \varphi' \psi^* \rangle \end{aligned}$$

при условии нормировки $\langle \psi \psi^* \rangle = 1$, причем введены обозначения

$$\langle \varphi_1 \rangle = \int_{r_1}^{r_2} \varphi_1(r) r dr, \quad \varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \psi(r)).$$

Функция $f(z)$, таким образом, удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка (4) и граничным условиям, вытекающим из постановки задачи; в частности, соотношения (5), (6) являются усредненными граничными условиями соответственно по нормальным и касательным напряжениям. Соотношение (5) позволяет также по перемещениям определить среднее значение нормальных напряжений для несжимаемого материала. Полагая теперь функцию $f(z)$ известной, аналогично установим уравнения и динамические граничные условия для $\psi(r)$:

$$(9) \quad \left(\Delta + \kappa_1^2 - \frac{1}{r^2} \right) \left(\Delta + \kappa_2^2 - \frac{1}{r^2} \right) \psi(r) = \frac{1}{\mu} \sigma_{rz}(r, z) \frac{df^*(z)}{dz} \Big|_0^h + \\ + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \sigma_{rz}(r, z) r f^*(z) \Big|_0^h,$$

$$\left[\frac{d^3}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2}{dr^2} + B_3(k_i^2; f, f', f'') \frac{d}{dr} + B_4(k_i^2; f, f') \right] \psi(r) = \\ (10) \quad = - \frac{1}{\mu} \int_0^h \sigma_{rr}(r, z) \frac{df^*(z)}{dz} dz - \frac{1}{\mu} [\sigma_{zz}(r, z) f^*(z)] \Big|_0^h, \quad r=r_1, r_2,$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + B_5(f, f'') \right] \psi(r) = \frac{1}{\mu} \int_0^h \sigma_{rz}(r, z) f^*(z) dz, \quad r=r_1, r_2,$$

где

$$(11) \quad \kappa_{1,2}^2 = \frac{1}{2} B_1(k_i^2; f, f', f'') \pm \sqrt{\frac{1}{4} B_1^2(k_i^2; f, f', f'') + B_2(k_i^2; f, f', f'')},$$

$$B_1(k_i^2; f, f', f'') = k_i^2 - \langle f^* f'' \rangle - \langle f f^{*''} \rangle - 4 \langle f' f' \rangle,$$

$$B_2(k_i^2; f, f', f'') = k_i^2 \langle f' f' \rangle - \langle f'' f^{*''} \rangle,$$

(12)

$$B_3(k_i^2; f, f', f'') = k_i^2 - \frac{1}{r^2} - 4 \langle f' f' \rangle - \langle f^* f'' \rangle,$$

$$B_4(k_i^2; f, f') = k_i^2 + \frac{1}{r^2} - 2 \langle f' f' \rangle,$$

$$B_5(f, f'') = - \frac{1}{r^2} - \langle f^* f'' \rangle, \quad \langle f f^* \rangle = 1,$$

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}, \quad \langle f_1 \rangle = \int_0^h f_1(z) dz.$$

Совместная система интегродифференциальных уравнений (4)–(12) определяет «наилучшее» решение вида (2) с разделяющимися переменными.

Рассмотрим в качестве примера продольные волны в бесконечном сплошном ($r_1=0$) цилиндре радиуса $r_2=a$ со свободной от напряжений боковой поверхностью. Функция $f(z) = e^{i\gamma z}$ удовлетворяет уравнению (4) при соответствующем выборе $\psi(r)$, причем волновое число γ подлежит определению из уравнения (9) и граничных условий (10). Ограниченное при

$r=0$ решение (9) будет

$$(13) \quad \psi(r) = C_1 J_1(\kappa_1 r) + C_2 J_1(\kappa_2 r),$$

где, согласно формуле (11),

$$\kappa_1^2 = k_t^2 - \gamma^2, \quad \kappa_2^2 = -\gamma^2.$$

Граничные условия на боковой поверхности цилиндра $\sigma_{r,r} = \sigma_{r,z} = 0$ с учетом формулы (10) приводят к следующему дисперсионному уравнению:

$$(14) \quad [(k_t a)^2 - 2(\gamma a)^2]^2 J_0(\kappa_2 a) J_1(\kappa_1 a) + 4(\gamma a)^2 \kappa_1 a \kappa_2 a J_0(\kappa_1 a) \times \\ \times J_1(\kappa_2 a) - 2(k_t a)^2 \kappa_2 a J_1(\kappa_1 a) J_1(\kappa_2 a) = 0.$$

Уравнение (14) отличается от соответствующего точного [6, 7] лишь аргументом функций Бесселя $\kappa_2 a$, равным $\sqrt{(k_t a)^2 - (\gamma a)^2}$, где k_t — волновое число волн сжатия. Сравнивая решение (14) с точным, оценим область применимости гипотезы несжимаемости (3), положенной в его основу. Критические частоты продольных волн, согласно формуле (14), определяются уравнением

$$(15) \quad J_1(k_t a) = 0,$$

в то время как соответственное точное уравнение имеет вид

$$(16) \quad J_1(k_t a) \left[k_t a J_0\left(\frac{k_t a}{\alpha}\right) - \frac{2}{\alpha} J_1\left(\frac{k_t a}{\alpha}\right) \right] = 0,$$

где

$$\alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \gg 1.$$

Сравнение формул (15), (16) показывает, что приближенный метод дает правильные значения для критических частот мод, зарождающихся сдвиговыми волнами и неприменим в отношении квазиобъемных. Как видно из формулы (16), низшие моды цилиндра из резиноподобного материала ($\alpha^2 \gg 1$) зарождаются сдвиговыми. Из работы [7], в частности, следует, что при $\alpha^2 = 200$ десять низших мод зарождаются сдвиговыми, причем квазиобъемная волна появляется при $k_t a = 34$.

a/Λ	$C_1 C_t$			$C_2 C_t$		
	$\alpha^2=100$	$\alpha^2=200$	$\alpha^2=\infty$	$\alpha^2=100$	$\alpha^2=200$	$\alpha^2=\infty$
0,1	1,687	1,688	1,689	6,185	6,187	6,188
0,3	1,402	1,402	1,402	2,413	2,415	2,416
0,5	1,144	1,145	1,145	1,839	1,840	1,840
0,75	1,022	1,022	1,024	1,503	1,503	1,503
1,0	0,982	0,983	0,983	1,311	1,311	1,311

В таблице представлены данные расчета дисперсии фазовой скорости двух низших типов волн при $\alpha_1^2 = 100$, $\alpha_2^2 = 200$, $\alpha_3^2 = \infty$ в зависимости от отношения радиуса цилиндра a к волноводной длине волн Λ . Расхождение между значениями фазовых скоростей, точно рассчитанными для типичных значений параметра α^2 и найденными в рамках гипотезы несжимаемости (3), составляет десятые доли процента.

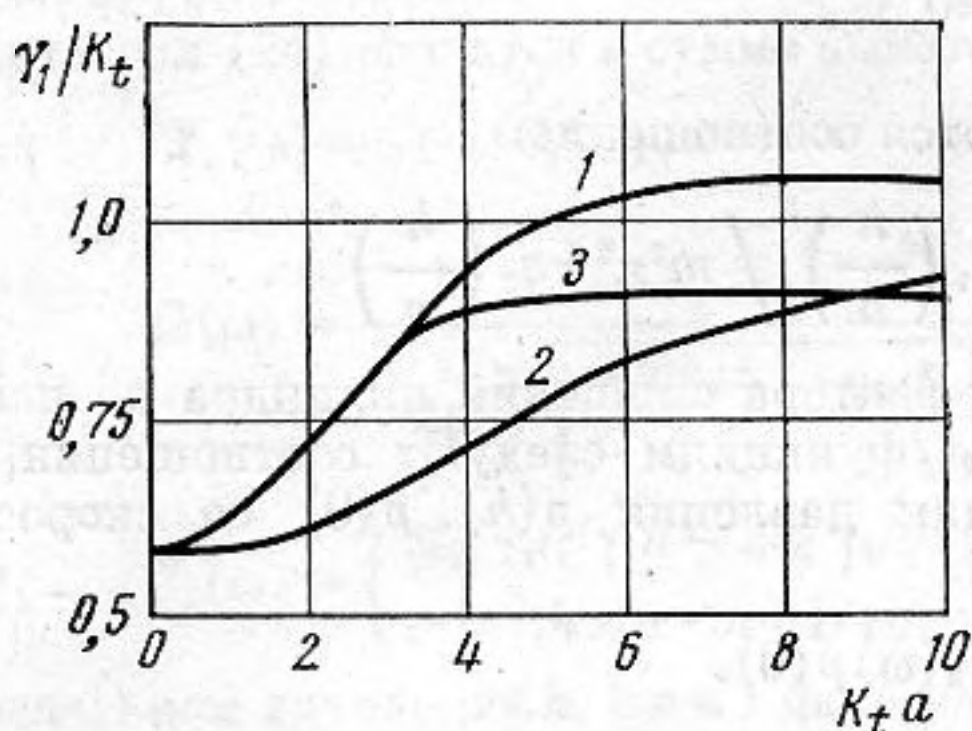
Уравнение (4) и соотношения (7) могут оказаться полезными при аналитической аппроксимации дисперсионной кривой низшей моды. В частности, если положить $\psi(r) = cr$ (плоские сечения), то для волнового числа γ_1 получается следующее выражение:

$$(17) \quad \gamma_1(\omega) = \sqrt{\frac{k_t^2}{2} - \frac{12}{a^2}} + \sqrt{\left(\frac{k_t^2}{2} - \frac{12}{a^2}\right)^2 + 8\frac{k_t^2}{a^2}},$$

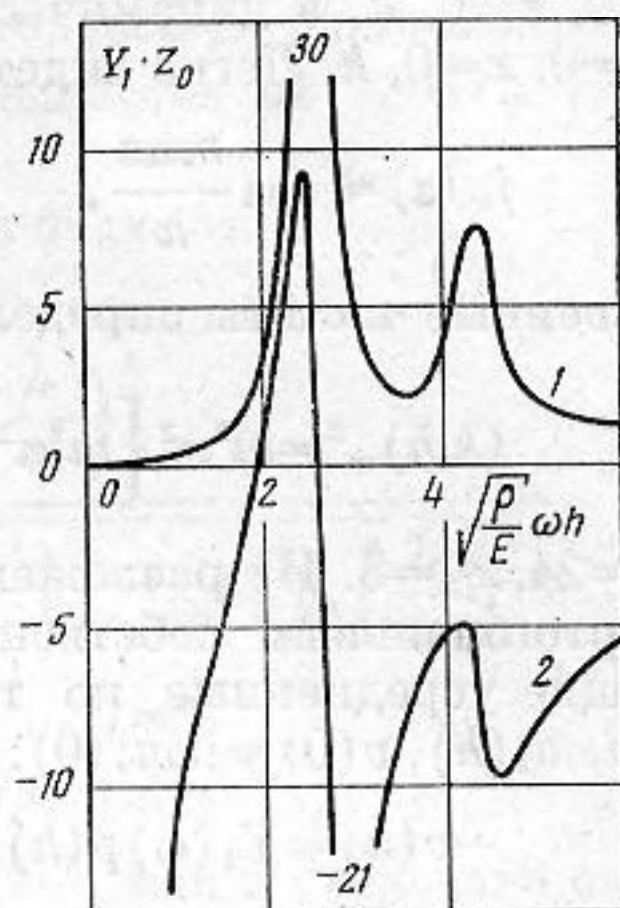
совпадающее с результатами приближенной теории Германа — Миндлина [8]. Точность аппроксимации можно увеличить, положив $\psi(r) = C_1 r - C_3 r^3$, где отношение C_3/C_1 выбирается из условия отсутствия касательных напряжений на поверхности цилиндра, что дает

$$\frac{C_3}{C_1} = \frac{2\gamma_1^2}{8 + (a\gamma_1)^2}.$$

Дисперсионные кривые, полученные в указанных приближениях, наряду с точной кривой, приведены на фиг. 2; ошибка по волновому числу, как видно, не превышает 30% во всем частотном диапазоне при плоских сечениях (17) и 15% — при параболических.



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Волновое число первой нормальной волны в цилиндре: 1 — точное решение, 2 — приближенное с плоскими сечениями, 3 — приближенное с параболическими сечениями

Фиг. 3. Частотная зависимость диагонального элемента матрицы податливости цилиндра Y_1 : 1 — активная составляющая, 2 — реактивная составляющая для $a=h=2,5$ см, $\rho=1,2$ г/см³, $E=3\mu=1,05 \cdot 10^8$ дн/см², $\eta=0,15$, $z_0=1,5 \cdot 10^5$ дн/см²

Перейдем к задаче о вынужденных колебаниях цилиндра конечной длины. Решение в этом случае будем искать в виде разложения по собственным векторным функциям задачи, причем последние построим методом приближенного разделения переменных.

Из уравнения (4), равно как и из уравнения (9) и соответствующих граничных условий типа $T u_i = 0$, вытекает соотношение ортогональности собственных векторных функций задачи U_n , U_m , отвечающих собственным числам k_{tn} и k_{tm} :

$$(k_{tn}^2 - k_{tm}^2) \left[\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \psi_n(r)) \frac{d}{dr} (r \psi_m^*(r)) dr \int_0^h f_n(z) \times \right. \\ \left. \times f_m^*(z) dz + \int_{r_1}^{r_2} \psi_n(r) \psi_m^*(r) r dr \int_0^h \frac{df_n(r)}{dz} \frac{df_m^*(z)}{dz} dz \right] = 0.$$

Таким образом, если в спектре отсутствует вырождение, собственные функции, построенные методом приближенного разделения переменных, ортогональны:

$$(18) \quad \int_0^h \int_{r_1}^{r_2} U_m \cdot U_n r dr dz = 0.$$

Остановимся подробнее на практически важной задаче о колебаниях цилиндра, находящегося между плоскими штампами, причем контакт со штампами жесткий (без проскальзывания). Кинематические граничные условия на торцах в этом случае можно конкретизировать следующим образом:

$$(19) \quad u_r = 0, \quad z = 0, h,$$

$$(20) \quad \partial u_z / \partial r = 0, \quad z = 0, h.$$

Боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений. Поскольку штампы плоские (20), следует положить $\varphi(r) = C$, $\psi(r) = 0,5 r$; при этом $f(z)$ удовлетворяет уравнению (4), граничное условие (19) принимает вид $f'(z) = 0, z = 0, h$, а динамическое условие $\sigma_{zz} = 0$, согласно формуле (5), $f''(z) = 0, z = 0, h$. Легко видеть, что собственные функции $f_m(z)$ таковы:

$$f_m(z) = \cos \frac{m\pi z}{h}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

а собственные частоты определяются соотношением

$$(21) \quad (k_i h)_m^2 = m^2 \pi^2 \left[m^2 \pi^2 + q_1 \left(\frac{h}{a} \right)^2 / m^2 \pi^2 + q_2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right],$$

где $q_1 = 24$, $q_2 = 8$. Из разложения вектора смещений цилиндра по найденным ортогональным собственным функциям следуют соотношения, связывающие усредненные по торцам давления $p(h)$, $p(0)$ со скоростями $v(h) = i\omega u_z(h)$, $v(0) = i\omega u_z(0)$:

$$(22) \quad \begin{aligned} -v(h) &= Y_1(\omega) p(h) + Y_2(\omega) p(0), \\ v(0) &= Y_2(\omega) p(h) + Y_1(\omega) p(0), \end{aligned}$$

где $Y_j(\omega)$ — элементы матрицы проводимости цилиндра, определенные следующим образом:

$$(23) \quad \begin{aligned} Y_j(\omega) &= \frac{2i\omega h}{\mu} q_3 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \times \\ &\times \frac{(-1)^{j+m-1}}{(1 + \delta_{0m}) \left\{ k_i^2 h^2 \left[m^2 \pi^2 + q_2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] - m^2 \pi^2 \left[m^2 \pi^2 + q_1 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \right\}}, \\ q_3 &= 8, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Суммирование здесь может быть выполнено с помощью преобразования Ватсона: в силу четности слагаемых формулы (23) относительно знака m и особенности нулевого члена $Y_j(\omega)$ представляются интегралом вида

$$(24) \quad \begin{aligned} Y_j(\omega) &= -\frac{\omega h}{\mu} q_3 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \int_{\Gamma} \times \\ &\times \frac{\xi_j(v) dv}{(k_i h)^2 \left[v^2 \pi^2 + q_2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] - v^2 \pi^2 \left[v^2 \pi^2 + q_1 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right]} \end{aligned}$$

где

$$\xi_j(v) = \begin{cases} \operatorname{ctg} v\pi, & j=1 \\ -1/\sin v\pi, & j=2 \end{cases}$$

а контур интегрирования Γ проходит несколько выше вещественной оси плоскости комплексной переменной v . Подынтегральная функция (24) имеет в верхней полуплоскости v два полюса, определяемых соотношени-

$$(25) \quad \gamma_{1,2}h = \pi v_{1,2} = \sqrt{\frac{(k_1h)^2}{2} - \frac{q_1}{2} \left(\frac{h}{a}\right)^2} \pm \sqrt{\left[\frac{(k_1h)^2}{2} - \frac{q_1}{2} \left(\frac{h}{a}\right)^2\right]^2 + (k_1h)^2 q_2 \left(\frac{h}{a}\right)^2},$$

$\text{Im } \bar{v} > 0.$

Полюса $\gamma_{1,2}h$ дают те же значения волновых чисел, что и уравнение (4). Из формулы (25) и фиг. 2 видно, что скорость однородной волны при увеличении частоты уменьшается от юнговской до сдвиговой, а постоянная затухания неоднородной волны уменьшается от $\gamma_2 = i\sqrt{q_1/a} \approx 4,9i/a$ до $\gamma_2 = \sqrt{q_2 - q_1/a} = 4i/a$.

Интеграл (24) сводится к сумме вычетов в полюсах

$$Y_j(\omega) = G(\omega) S_j(\omega),$$

$$(26) \quad G(\omega) = - \frac{i\omega h q_3 \left(\frac{h}{a}\right)^2}{2\mu \sqrt{\left[\frac{(k_1h)^2}{2} - \frac{q_1}{2} \left(\frac{h}{a}\right)^2\right]^2 + (k_1h)^2 q_2 \left(\frac{h}{a}\right)^2}},$$

$$S_j(\omega) = \begin{cases} \text{ctg } \gamma_1 h / \gamma_1 h - \text{ctg } \gamma_2 h / \gamma_2 h & j=1 \\ -1/\gamma_1 h \sin \gamma_1 h + 1/\gamma_2 h \sin \gamma_2 h & j=2. \end{cases}$$

В предельном случае $a \ll h, k_1 a \ll 1$ формула (26), как и следовало ожидать, дает матрицу проводимости стержня, в других случаях она может быть проанализирована численно. На фиг. 3 показана частотная зависимость диагонального элемента матрицы податливости Y_1 цилиндра с $a=h$, имеющая смысл входной податливости в режиме акустического короткого замыкания. В рассматриваемом случае податливость имеет однорезонансный характер; даже при относительно малом коэффициенте сдвиговых потерь ($\eta=0,15$) второй резонанс проявляется слабо. Отметим, что собственные частоты цилиндра, армированного пластинками, не обладающими изгибной жесткостью, могут быть найдены точно [9], в частности, для сплошного цилиндра с $a=h$ низшая частота соответствует $\sqrt{\rho/E} \omega h = k_1 h / \sqrt{3} = 2,1$. Возрастание резонансной частоты в рассматриваемом случае обусловлено армированием цилиндра пластинками с весьма большой изгибной жесткостью (плоские штампы).

На частотах выше основного резонанса, как следует из фиг. 3, податливость имеет преимущественно инерционный характер, что указывает на преобладание неоднородной волны в этом диапазоне частот.

Наряду с рассмотренной в связи с исследованием слоя искусственной среды с цилиндрическими каналами [10], находящегося между жесткими штампами, представляет интерес задача о полом цилиндра, на внешней боковой поверхности которого отсутствуют перемещения и касательные напряжения, а на внутренней — напряжения. В рамках метода приближенного разделения переменных матрица податливости такого цилиндра (слоя) по-прежнему определяется соотношениями (26), где постоянные q_i зависят от параметра $\epsilon = r_1/r_2$ следующим образом:

$$q_1(\epsilon^2) = \frac{(1-\epsilon^2)(1+3\epsilon^2)}{\epsilon^2} q_3(\epsilon^2),$$

$$q_2(\epsilon^2) = (1-\epsilon^2) q_3(\epsilon^2),$$

$$q_3(\epsilon^2) = \frac{8\epsilon^2}{4\epsilon^2 - 2 \ln \epsilon^2 - 3 - \epsilon^4}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1962.
2. Л. А. Вайнштейн. Метод приближенного разделения переменных и его применение к граничным задачам электродинамики и акустики. ЖТФ, 1957, 27, 9, 2109—2128.
3. В. Л. Бидерман. Вопросы расчета резиновых деталей. Сб. Расчеты на прочность. М., Машгиз, 3, 1958, 40—86.
4. Э. Э. Лавендел. Применение вариационных методов к несжимаемому материалу. Вопросы динамики и прочности, Рига, Изд-во АН ЛатвССР, 1962, 8, 103—118.
5. В. Кон, Дж. А. Крумхансл, Е. Г. Ли. Вариационные методы определения дисперсионных соотношений и упругих свойств композитных материалов (русский перевод). Прикладная механика, 1972, 39, сер. Е. 2, 1972, 7—17.
6. J. Zemanek. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder. J. Acoust. Soc. America, 1972, 51, 1 (part 2), 265—283.
7. А. Е. Вовк. Некоторые вопросы распространения упругих волн в твердых волноводах. Канд. дис. М., Акуст. ин-т АН СССР, 1967.
8. Е. Скучик. Простые и сложные колебательные системы. М., «Мир», 1971.
9. Л. С. Шейба, С. А. Шляпочников. Об одном классе собственных колебаний упругого цилиндра. Акуст. ж., 1974, 20, 2, 331—333.
10. В. В. Тютюкин. Распространение упругих волн в среде с цилиндрическими каналами. Акуст. ж., 1956, 2, 3, 291—301.

Поступила
17 марта 1975 г.
После исправления
17 мая 1976 г.