

УДК 534.26:534.121.1

**ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ОСЕСИММЕТРИЧНО-НАГРУЖЕННОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОНСТРУКЦИЕЙ**

*С. Н. Бешенков, Е. Г. Голоскоков*

Методом интегральных преобразований решена задача об излучении звука осесимметрично-нагруженной трехслойной пластиной, лежащей на границе раздела различных сред. Предполагается, что перемещения в обшивках удовлетворяют гипотезе Кирхгофа. Движение низкопрочного среднего слоя (заполнителя) описывается уравнениями динамической теории упругости.

При использовании в современных строительных и инженерных сооружениях трехслойных пластин и оболочек возникает необходимость оценки их акустических свойств, в частности излучения звука при действии различных динамических нагрузок.

Излучение звука однородными пластинами рассмотрено в работах [1-3] и ряде других. Звуковое поле трехслойной пластины с жидким средним слоем, возбуждаемой точечной силой, определено в статье [4]. Используя связь излучения с коэффициентом прохождения звука, авторы работы [5] получили решение указанной задачи для произвольной совокупности слоев.

Ниже рассматривается излучение звука трехслойной пластиной, лежащей на границе раздела разных сред и возбуждаемой осесимметричными нагрузками, действующими на обшивки. Движение заполнителя описывается уравнениями Ляме, на перемещения в обшивках накладывается гипотеза Кирхгофа. Решение задачи при этом существенно упрощается, а вносимая погрешность, как показали расчеты, выполненные для случая точечной силы, является при реальных толщинах обшивок незначительной. Кроме того, данный метод позволяет рассмотреть излучение звука трехслойными панелями при возбуждении их касательной нагрузкой, а также оценить влияние конечности размеров пластины на излучение.

Совместим плоскость  $z=0$  цилиндрической системы координат со срединной плоскостью заполнителя. Пусть толщины заполнителя и обшивок будут  $2h$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , среды, расположенные в полупространствах  $z < -h - \delta_1$  и  $z > h + \delta_2$ , имеют плотности  $\rho_{01}$ ,  $\rho_{02}$  и скорости звука в них  $c_{01}$ ,  $c_{02}$ . На верхнюю и нижнюю обшивки пластины действуют усилия соответственно  $q_1(r) \exp j\omega t$  и  $q_2(r) \exp j\omega t$  ( $j = \sqrt{-1}$ ).

После интегрирования основных уравнений динамической теории упругости для несущих слоев получаем нагрузку [6], передаваемую на заполнитель со стороны обшивок

$$(1) \quad \begin{aligned} \tau_i = \tau_{rz}|_{z=\mp h} = \mp \rho_i \delta_i \omega^2 \left( u_i \pm \frac{\delta_i}{2} \frac{\partial w_i}{\partial r} \right) \mp E_i \delta_i D^2 \left( u_i \pm \frac{\delta_i}{2} \frac{\partial w_i}{\partial r} \right); \\ \sigma_i = \sigma_z|_{z=\mp h} = \mp \rho_i \delta_i \omega^2 w_i + \frac{\rho_i \delta_i^2 \omega^2}{2} D \left( u_i \pm \frac{2}{3} \delta_i \frac{\partial w_i}{\partial r} \right) + \\ + \frac{E_i \delta_i^2}{2} DD^2 \left( u_i \pm \frac{2}{3} \delta_i \frac{\partial w_i}{\partial r} \right) - q_i - p_i|_{z=\mp h \mp \delta_i}. \end{aligned}$$

Здесь  $E_i = E_i' / (1 - \nu_i^2)$ ;  $D = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$ ;  $D^2 = \frac{\partial}{\partial r} D$ ;  $E_i'$ ,  $\nu_i$ ,  $\rho_i$  — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала верхней ( $i=1$ ) и нижней ( $i=2$ ) обшивок;  $u_i$ ,  $w_i$  — радиальные и нормальные перемещения точек обшивок на границах сопряжения с заполнителем;  $p_i(r, z)$  — звуковые давления в полупространствах. Верхний знак в формуле (1) относится к индексу  $i=1$ .

Состояние заполнителя определяется уравнениями Ляме

$$(2) \quad (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mu \nabla^2 \mathbf{r} = -\rho \omega^2 \mathbf{r};$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, w),$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\rho$  — постоянные Ляме и плотность материала. Введением функций  $\varphi$  и  $\psi$ , таких, что

$$(3) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

уравнения (2) можно представить в виде

$$\nabla^2 \varphi + k_i^2 \varphi = 0;$$

$$(4) \quad \nabla^2 \psi + \left( k_i^2 - \frac{1}{r^2} \right) \psi = 0;$$

$$k_i = \omega / c_i; \quad k_t = \omega / c_t; \quad c_i = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}; \quad c_t = \sqrt{\mu / \rho}.$$

Умножив первое уравнение (4) на  $r J_0(kr) dr$ , а второе на  $r J_1(kr) dr$  и проинтегрировав по  $r$  от 0 до  $\infty$ , приходим к уравнениям

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \bar{\varphi}(k, z)}{\partial z^2} - (k^2 - k_i^2) \bar{\varphi}(k, z) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}_1(k, z)}{\partial z^2} - (k^2 - k_i^2) \bar{\psi}_1(k, z) = 0,$$

в которых  $\bar{\varphi}(k, z)$  — трансформанта Ханкеля нулевого порядка функции  $\varphi(r, z)$ ,  $\bar{\psi}_1(k, z)$  — трансформанта Ханкеля первого порядка функции  $\psi(r, z)$ ,  $J_0$ ,  $J_1$  — бесселевы функции нулевого и первого порядка.

После интегрирования уравнений (5) и использования формул обращения получаем с учетом формулы (3) следующие выражения для перемещений в заполнителе:

$$(6) \quad u = - \int_0^\infty \left( A_1 \frac{k}{r_1} \operatorname{sh} r_1 z + A_2 \frac{k}{r_1} \operatorname{ch} r_1 z + A_3 \frac{r_2}{k} \operatorname{sh} r_2 z + \right. \\ \left. + A_4 \frac{r_2}{k} \operatorname{ch} r_2 z \right) k J_1(kr) dk,$$

$$w = \int_0^\infty (A_1 \operatorname{ch} r_1 z + A_2 \operatorname{sh} r_1 z + A_3 \operatorname{ch} r_2 z + A_4 \operatorname{sh} r_2 z) k J_0(kr) dr,$$

где  $r_1 = \sqrt{k^2 - k_i^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{k^2 - k_t^2}$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  — постоянные интегрирования. Звуковые давления в средах полупространств будут

$$(7) \quad p_1 = \int_0^{\infty} A_5(k) \exp(j\sqrt{k_1^2 - k^2} z) k J_0(kr) dk;$$

$$p_2 = \int_0^{\infty} A_6(k) \exp(-j\sqrt{k_2^2 - k^2} z) k J_0(kr) dk.$$

Здесь  $k_1 = \omega/c_{01}$ ,  $k_2 = \omega/c_{02}$  — волновые числа в средах. При этом из условия излучения следует, что  $\text{Im} \sqrt{k_i^2 - k^2} \leq 0$ .

Формулы (6) и закон Гука позволяют найти напряжения в заполнителе на границах сопряжения с обшивками. Приравнявая получающиеся при этом выражения выражениям (1), мы приходим к системе четырех алгебраических уравнений для определения постоянных  $A_m$  ( $m = 1, 2, \dots, 6$ ). Два дополнительных уравнения получим из условий

$$(8) \quad w_1 = \frac{1}{\omega^2 \rho_{01}} \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=-h-\delta_1},$$

$$w_2 = \frac{1}{\omega^2 \rho_{02}} \frac{\partial p_2}{\partial z} \Big|_{z=+h+\delta_2}.$$

Окончательно система уравнений для определения постоянных имеет вид

$$(9) \quad \sum_{m=1}^6 A_m a_{nm} = \bar{q}_n, \quad (n=1, 2, \dots, 6)$$

$$a_{n1} = a_n \text{ch } r_1 h + b_n \text{sh } r_1 h,$$

$$a_{n2} = (-1)^n (a_n \text{sh } r_1 h + b_n \text{ch } r_1 h),$$

$$a_{n3} = c_n \text{ch } r_2 h + d_n \text{sh } r_2 h,$$

$$a_{n4} = (-1)^n (c_n \text{sh } r_2 h + d_n \text{ch } r_2 h),$$

$$a_{15} = -g_1, \quad a_{55} = -j\gamma_1 g_1, \quad a_{26} = -g_2, \quad a_{66} = j\gamma_2 g_2,$$

$$(10) \quad g_1 = \exp[-j\sqrt{k_1^2 - k^2} (h + \delta_1)], \quad \gamma_1 = \sqrt{k_1^2 - k^2} / \omega^2 \rho_{01},$$

$$g_2 = \exp[-j\sqrt{k_2^2 - k^2} (h + \delta_2)], \quad \gamma_2 = \sqrt{k_2^2 - k^2} / \omega^2 \rho_{02},$$

$$\bar{q}_1 = \int_0^{\infty} q_1(r) J_0(kr) r dr, \quad \bar{q}_2 = \int_0^{\infty} q_2(r) J_0(kr) r dr.$$

Коэффициенты  $a_n, b_n, c_n, d_n$  вычисляются по формулам:  
при  $n=1, 2$

$$(11) \quad a_n = c_n = (-1)^n \delta_n (\rho_n \omega^2 + 2\beta_n k^2 / 3),$$

$$b_n = (-1)^{n+1} [k^2 \beta_n / r_1 + (\lambda + 2\mu) r_1 - \lambda k^2 / r_1],$$

$$d_n = (-1)^{n+1} r_2 (\beta_n + 2\mu); \quad \beta_n = \delta_n^2 (\rho_n \omega^2 - E_n k^2) / 2,$$

при  $n=3, 4$

$$a_n = -k(\beta_{n-2} + 2\mu), \quad b_n = \frac{2k\beta_{n-2}}{\delta_{n-2} r_1}$$

$$c_n = -k\beta_{n-2} - \mu(r_2^2/k + k), \quad d_n = \frac{2r_2\beta_{n-2}}{\delta_{n-2} k}$$

при  $n=5, 6$

$$a_n = c_n = 1, b_n = d_n = 0.$$

Остальные коэффициенты равны нулю.

Из системы (9) находим

$$(12) \quad A_5(k) = - \frac{[j(\bar{q}_2 \Delta_{26} - \bar{q}_1 \Delta_{16}) + \bar{q}_1 \Delta_{12} / \gamma_2]}{g_1 \gamma_1 [(\Delta_{12} / \gamma_1 \gamma_2 + \Delta_{56}) - j(\Delta_{25} / \gamma_2 + \Delta_{16} / \gamma_1)]};$$

$$A_6(k) = - \frac{[j(\bar{q}_1 \Delta_{15} - \bar{q}_2 \Delta_{25}) + \bar{q}_2 \Delta_{12} / \gamma_1]}{g_2 \gamma_2 [(\Delta_{12} / \gamma_1 \gamma_2 + \Delta_{56}) - j(\Delta_{25} / \gamma_2 + \Delta_{16} / \gamma_1)]}.$$

Здесь  $\Delta_{lr}$  — определители, получающиеся из матрицы коэффициентов  $a_{nm}$  вычеркиванием строк с индексами  $n=l, n=r$  и столбцов  $m=5, m=6$ . Интегралы в формулах (7) можно вычислить методом перевала для тех точек пространства, которые лежат на больших расстояниях от пластины. Для этого целесообразно изменить пределы интегрирования и заменить функцию Бесселя на функцию Ханкеля [4]. Кроме того, сделаем подстановку  $k=k_1 \sin \varphi$  в первый интеграл (7) и  $k=k_2 \sin \varphi$  во второй и перейдем от цилиндрических координат к сферическим  $R, \theta$ , где  $R$  — расстояние от срединной плоскости заполнителя до точки наблюдения,  $\theta$  — угол между осью  $z$  и направлением на точку наблюдения. Воспользовавшись асимптотическими выражениями для функции Ханкеля, выражения (7) представим в виде

$$(13) \quad p_1 = \frac{e^{j \frac{\pi}{4}} k_1^2}{\sqrt{2\pi k_1 R \sin \theta}} \int_{\Gamma} A_5(\varphi) \exp[-jk_1 R \cos(\varphi - \theta)] \sqrt{\sin \varphi \cos \varphi} d\varphi;$$

$$p_2 = \frac{e^{j \frac{\pi}{4}} k_2^2}{\sqrt{2\pi k_2 R \sin \theta}} \int_{\Gamma} A_6(\varphi) \exp[-jk_2 R \cos(\varphi - \theta)] \sqrt{\sin \varphi \cos \varphi} d\varphi.$$

Путь интегрирования  $\Gamma$  приведен в работе [7]. Произведя вычисления по методу перевала [7], получим следующие выражения для звуковых давлений в полупространствах:

$$(14) \quad p_1 = - \frac{jk_1 e^{-jk_1 R} \cos \theta}{R g_1} \frac{\omega Z_0^{(1)} [j(\bar{q}_2 \Delta_{26} - \bar{q}_1 \Delta_{16}) + \omega Z_0^{(2)} \bar{q}_1 \Delta_{12}]}{[(\omega^2 Z_0^{(1)} Z_0^{(2)} \Delta_{12} + \Delta_{56}) - j\omega (Z_0^{(2)} \Delta_{25} + Z_0^{(1)} \Delta_{16})]}$$

$$p_2 = - \frac{jk_2 e^{-jk_2 R} \cos \theta}{R g_2} \frac{\omega Z_0^{(2)} [j(\bar{q}_1 \Delta_{15} - \bar{q}_2 \Delta_{25}) + \omega Z_0^{(1)} \bar{q}_2 \Delta_{12}]}{[(\omega^2 Z_0^{(1)} Z_0^{(2)} \Delta_{12} + \Delta_{56}) - j\omega (Z_0^{(2)} \Delta_{25} + Z_0^{(1)} \Delta_{16})]}$$

Здесь  $Z_0^{(1)} = \rho_{01} c_{01} / \cos \theta$ ,  $Z_0^{(2)} = \rho_{02} c_{02} / \sqrt{1 - (c_{02}^2 \sin^2 \theta / c_{01}^2)}$ , при вычислении  $p_1$ ,  $Z_0^{(1)} = \rho_{01} c_{01} / \sqrt{1 - (c_{01}^2 \sin^2 \theta / c_{02}^2)}$ ,  $Z_0^{(2)} = \rho_{02} c_{02} / \cos \theta$  — при вычислении  $p_2$ . При этом в формулах (10), (11) необходимо положить  $k=k_1 \sin \theta$  в первом случае и  $k=k_2 \sin \theta$  во втором.

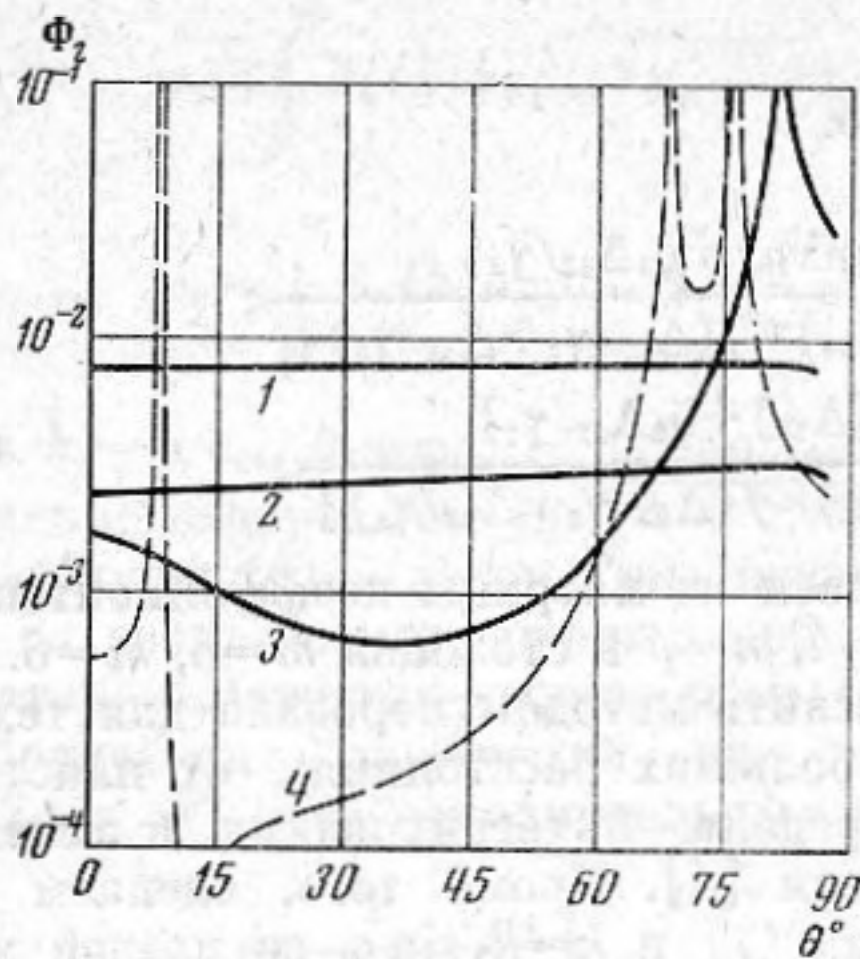
Приведем результаты расчета излучения звука при возбуждении пластины точечной силой, действующей на верхнюю обшивку. В этом случае  $\bar{q}_2=0$ ,  $\bar{q}_1=F/2\pi$  и выражение для давления  $p_2$  примет вид

$$(15) \quad |p_2| = \frac{F k_2}{4\pi R} \Phi_2(\theta),$$

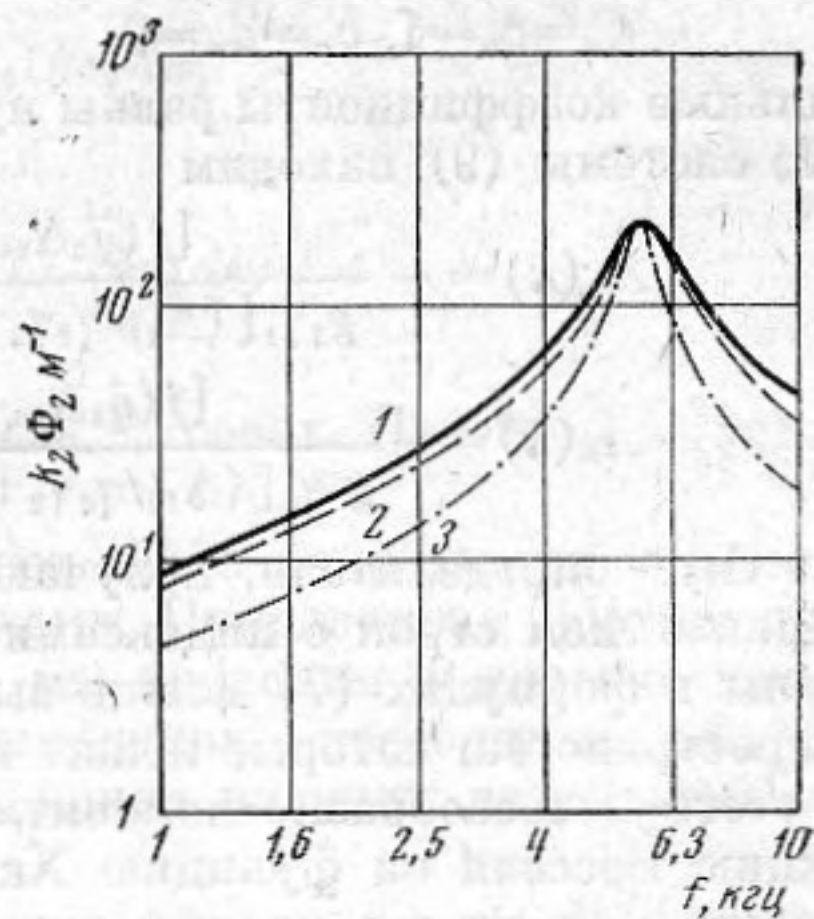
где

$$\Phi_2(\theta) = \frac{2\omega Z_0^{(2)} |\Delta_{15}| \cos \theta}{[(\omega^2 Z_0^{(1)} Z_0^{(2)} \Delta_{12} + \Delta_{56})^2 + \omega^2 (Z_0^{(2)} \Delta_{25} + Z_0^{(1)} \Delta_{16})^2]^{1/2}}$$

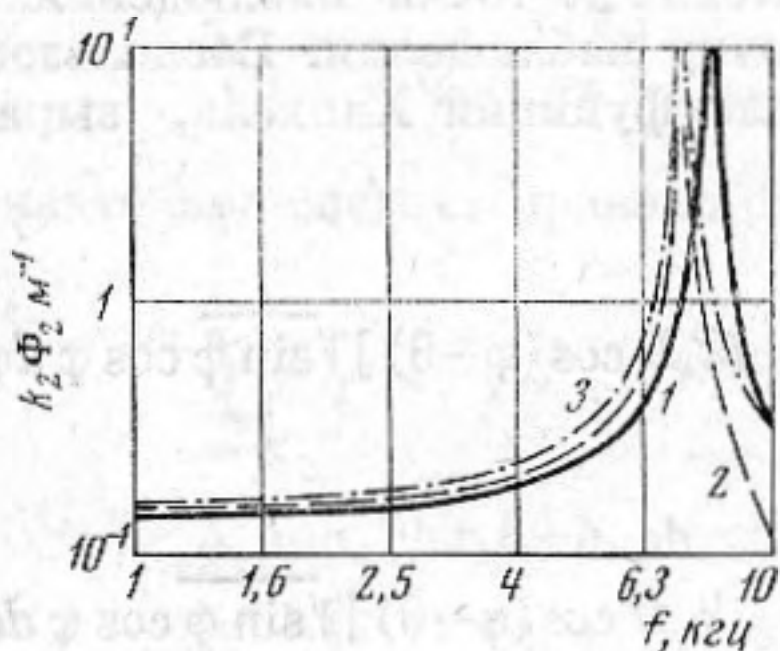
представляет собой характеристику направленности излучения.



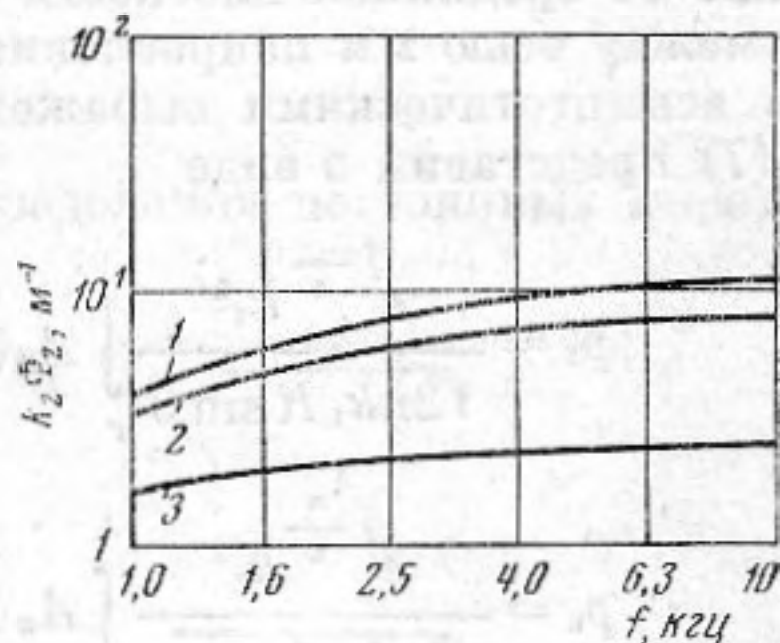
Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

Фиг. 1. Зависимость характеристик направленности излучения трехслойной пластины от угла падения для различных частот: 1 — при  $f=1$  кГц; 2 — 5; 3 — 10; 4 — 12,5 кГц

Фиг. 2. Зависимость звукового давления в воздухе от частоты для различных углов падения: 1 — при  $\theta=0^\circ$ ; 2 —  $30^\circ$ ; 3 —  $60^\circ$

Фиг. 3. Зависимость давления, создаваемого пластиной, соприкасающейся с водой одной стороной, от частоты для различных углов падения: 1 — при  $\theta=0^\circ$ ; 2 —  $30^\circ$ ; 3 —  $60^\circ$

Фиг. 4. Зависимость звукового давления в воде от частоты для различных углов падения: 1 — при  $\theta=0^\circ$ ; 2 —  $30^\circ$ ; 3 —  $60^\circ$

На фиг. 1 приведены частотно-угловые характеристики направленности излучения  $\Phi_2$  трехслойной пластины в воздухе. Наружные слои выполнены из стали толщиной  $\delta=0,1 \cdot 10^{-2}$  м, наполнитель из материала ПВХ ( $E=5 \cdot 10^7$  нм<sup>-2</sup>;  $\mu=1,8 \cdot 10^7$  нм<sup>-2</sup>;  $\nu=0,4$ ;  $\rho=3 \cdot 10^2$  кгм<sup>-3</sup>) толщиной  $2h=1 \cdot 10^{-2}$  м. Из результатов видно, что на низких частотах пластина является ненаправленным излучателем. С ростом частоты возбуждения в угловой характеристике направленности появляются один или несколько пиков, обусловленные эффектами совпадения для различных типов волн в пластине. Значения углов падения, в направлении которых на данной частоте имеет место максимальное излучение, могут быть определены из условия  $\Delta_{56}=0$ . Полагая в этом уравнении  $\theta=0^\circ$ , получаем формулу для определения частот «волнового резонанса»

$$(16) \quad \operatorname{tg} 2k_1 h = \frac{\rho k_1 (\rho_1 \delta_1 + \rho_2 \delta_2)}{(\rho_1 \rho_2 \delta_1 \delta_2 k_1^2 - \rho^2)}$$

Зависимость звукового давления при  $F/R=4\lambda$  от частоты для различных углов падения волны в воздухе приведена на фиг. 2, из которой ясно виден резонансный характер излучения трехслойной пластины. Если пластина соприкасается одной стороной с водой, то необходимо учесть присоединенную массу жидкости, т. е. положить  $\rho_2^* \delta_2^* = \rho_2 \delta_2 + m_{ж}$ , где  $m_{ж}$  — присоединенная масса. Полагая  $\rho_2^* \delta_2^* \gg \rho_1 \delta_1$ , из формулы (16) получаем

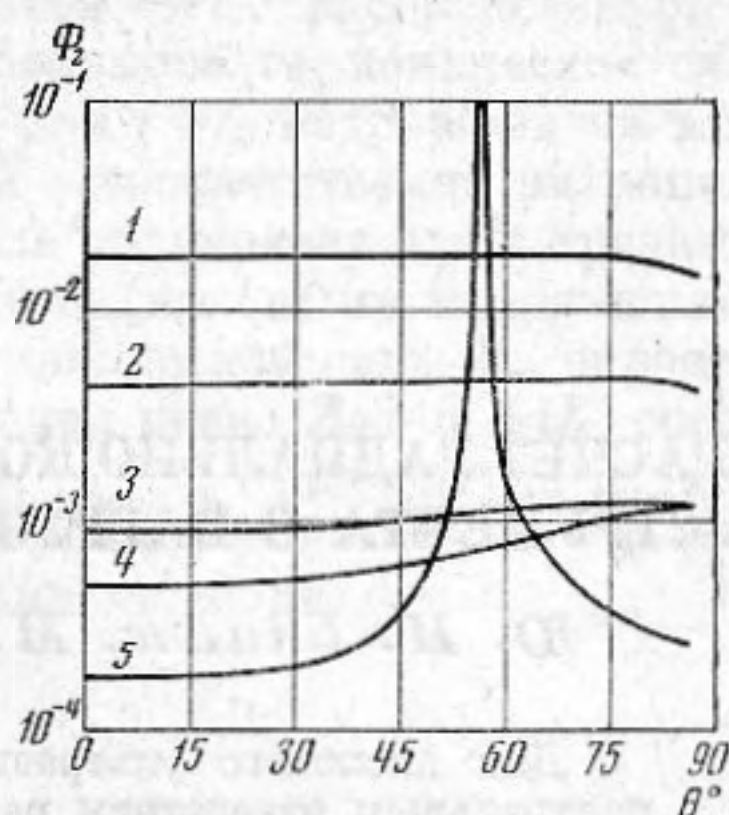
$$(17) \quad \operatorname{tg} 2k_1 h = \frac{\rho}{\rho_1 \delta_1 k_1}.$$

Если выполняется также условие  $2k_1 h \ll 1$ , то последняя формула преобразуется к виду

$$(18) \quad \omega \approx \sqrt{\frac{E}{h \rho_1 \delta_1}}.$$

Частота, определяемая этой формулой, имеет простой физический смысл и представляет собой собственную частоту колебаний пластины с погонной массой  $\rho_1 \delta_1$  на упругом основании с коэффициентом постели  $E/h$ . Зависимость давления от частоты для рассматриваемого случая показана на фиг. 3. Если с двух сторон находится вода, то резонанса, как это видно из фиг. 4, не наблюдается. Объясняется это, очевидно, влиянием присоединенной массы жидкости, вследствие чего резонансная частота сместилась в область частот, на которых влияние симметричных колебаний панели на излучение недостаточно для проявления данного эффекта.

На фиг. 5 показаны частотно-угловые характеристики  $\Phi_2$  конструкции со стальными обшивками  $\delta_1 = 0,1 \cdot 10^{-2}$  м;  $\delta_2 = 0,8 \cdot 10^{-3}$  м и заполнителем из вибропоглощающей пластмассы 306 толщиной  $2h = 0,15 \cdot 10^{-2}$  м. Сравнение их с аналогичными характеристиками, приведенными в работе [5], показывает хорошее совпадение результатов расчета по двум теориям.



Фиг. 5. Зависимость характеристик направленности излучения трехслойной пластины от угла падения для различных частот: 1 — при  $f=0,25$  кГц; 2 — 1; 3 — 5; 4 — 10; 5 — 20 кГц

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Тамм, Л. М. Бреховский. О вынужденных колебаниях бесконечной пластинки, соприкасающейся с жидкостью. Ж. техн. физ., 1946, 16, 7, 879—888.
2. Л. М. Лямшев. Об одном способе решения задачи излучения звука тонкими упругими оболочками и пластинками. Акуст. ж., 1959, 5, 1, 122—124.
3. Л. Я. Гутин. Звуковое излучение бесконечной пластинки, возбуждаемой нормальной к ней сосредоточенной силой. Акуст. ж., 1964, 10, 4, 431—434.
4. Л. П. Борисов. Излучение звука трехслойной конструкцией. Сб.: Колебания, излучение и демпфирование упругих структур, М., «Наука», 1973, 55—60.
5. Л. П. Борисов, С. А. Рыбак, Б. Д. Тартаковский, О. Г. Швилкина. Об излучении бесконечно-напряженной произвольной совокупности слоев. Научно-техн. сб.: Морское приборостроение, серия Акустика, 1972, 1, 28—46.
6. С. Н. Бешенков, Е. Г. Голоскоков, В. П. Ольшанский. Симметричные колебания трехслойных пластин. Прикладная механика, 1972, 8, 7, 42—46.
7. Л. М. Бреховский. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.

Харьковский политехнический институт  
им. В. И. Ленина

Поступила  
18 февраля 1975 г.  
После исправления  
18 ноября 1975 г.