АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIII 1977 Вып. 1

УДК 534.833.524

К ОЦЕНКЕ ПОГЛОЩЕНИЯ ЭНЕРГИИ СВЯЗАННЫХ ИЗГИБНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОГРАНИЧЕННЫХ СТРУКТУР

Б. А. Канаев, С. А. Рыбак, Б. Д. Тартаковский

Оценивается влияние связи продольных и изгибных колебаний ограниченных структур на эффективность их демпфирования путем нанесения вибропоглощающих покрытий. С помощью полученных для энергии изгибных и продольных колебаний соотношений определяется зависимость эффекта демпфирования от параметров структуры.

Поглощение энергии изгибных и продольных колебаний однородных упругих структур определяется коэффициентом потерь соответственно изгибных или продольных колебаний. В неоднородных структурах* происходит взаимное преобразование энергии изгибных и продольных колебаний, вследствие чего поглощение энергии зависит не только от коэффициента потерь для колебаний данного типа, но и от потерь энергии связанных с ними колебаний другого типа, от степени этой связи, а также от соотношения энергий изгибных и продольных колебаний, возбужденных общим источником. Ниже рассматривается поглощение энергии стационарных колебаний ограниченных неоднородных структур при случайном возбуждении.

В неограниченных неоднородных упругих структурах энергия случайных связанных изгибных и продольных колебаний описывается уравнениями стационарной диффузии [1], которые для ограниченных структур могут быть представлены в виде следующих соотношений, определяющих баланс их колебательной энергии:

$$W_1=\delta_1E_1+\alpha(q_1-q_2),\quad W_2=\delta_2E_2+\alpha(q_2-q_1), \tag{1}$$

где W_i — энергия, поступающая от источника, излучающего белый шум в полосе частот $\Delta\omega$, в структуру в единицу времени, E_i — колебательная энергия структуры, $\delta_i=\omega\eta_i$, η_i — коэффициент потерь, ω — средняя частота полосы возбуждения, α — параметр связи изгибных и продольных колебаний; $i=1$; 2 (здесь и в дальнейшем индекс 1 относится к изгибным, индекс 2 — к продольным колебаниям). Величины $q_1=\dfrac{E_1}{S}c_{\text{гр.}1}$ и $q_2=\dfrac{E_2}{S}c_{\text{гр.}2}$ обозначают потоки энергии изгибных и продольных колебаний, S — площадь поверхности структуры, $c_{\text{гр.}i}$ — групповая скорость.

Первый член правой части соотношений (1) определяет энергию, поглощаемую колебанием данного типа, второй член — энергию, которой обмениваются изгибные и продольные колебания вследствие их взаимного преобразования. Отметим, что выражения, аналогичные приведенным, ис-

* Здесь и в дальнейшем неоднородной структурой будем называть такую структуру, в которой происходит взаимное преобразование изгибных и продольных колебаний, а однородной — структуру, в которой такое преобразование отсутствует.

пользуются для описания баланса энергии в связанных помещениях [2] и в связанных упругих структурах [3–5], совершающих колебания одного типа.

Соотношения (1) имеют ясный физический смысл в случае бегущих по структуре изгибных и продольных волн, которые в ограниченных структурах могут существовать лишь на достаточно высоких частотах. На низких частотах, когда продольные и изгибные колебания представляют собой совокупность стоячих волн (мод колебаний), обмен энергией в основном происходит между модами продольных и изгибных колебаний структуры.

Предполагая, что энергия колебаний данного типа равномерно распределена по статистически независимым модам колебаний, попадающим в полосу частот возбуждения $\Delta\omega$, можно считать, что обмен энергий между продольными и изгибными колебаниями описывается соотношением $\alpha'(T_1-T_2)$, где T_1 и T_2 — энергия, приходящаяся на одну моду соответственно изгибных и продольных колебаний, α' — коэффициент, характеризующий связь мод колебаний. В этом случае уравнения баланса энергии структуры могут быть представлены в виде

$$(2) \qquad W_1'=\delta_1'T_1+\alpha'(T_1-T_2), \quad W_2'=\delta_2'T_2+\alpha'(T_2-T_1),$$

где $W_i'=W_i/\Delta\omega$, δ_i' — коэффициент, характеризующий потери энергии мод колебаний каждого типа. Заметим, что обмен энергией между ограниченными связанными структурами, совершающими однотипные колебания, также может быть представлен соотношением вида $\alpha(T_1-T_2)$, где T_i — энергия, приходящаяся на одну моду i-й структуры [6–8].

Соотношения (1) и (2) эквивалентны, поскольку $T_i=E_i/\Delta n_i$ и $c_{\text{гр.}\,i}=\Delta\omega/\Delta k_i$. При этом

$$(3) \qquad \alpha_i'=\frac{\alpha_i}{SA}, \quad \delta_i'=\frac{\delta_i}{c_{\text{гр.}\,i}A}=\delta_i\frac{\Delta n_i}{\Delta\omega},$$

где Δn_i — число колебаний, частоты которых попадают в полосу $\Delta\omega$, $A=\Delta k_i/\Delta n_i\cong\pi/L$, Δk_i — изменение волнового числа соответствующего типа колебаний на протяжении интервала $\Delta\omega$, L — характерный размер структуры.

Из соотношений (1) следуют выражения для энергии изгибных и продольных колебаний:

$$(4) \qquad E_1=\frac{1}{c_{\text{гр.}1}}\frac{\gamma_2+\varkappa(1+\beta)}{\gamma_1\gamma_2+\varkappa(\gamma_1+\gamma_2)}, \quad E_2=\frac{1}{c_{\text{гр.}2}}\frac{\beta\gamma_1+\varkappa(1+\beta)}{\gamma_1\gamma_2+\varkappa(\gamma_1+\gamma_2)},$$

(где $\gamma_i=\delta_i/c_{\text{гр.}\,i}$, $\varkappa=\alpha/S$, $\beta=W_2/W_1$), позволяющие оценить эффективность мероприятий, направленных на уменьшение вибраций структур и обусловленного ими шума.

Поскольку излучаемый структурой шум определяется в основном изгибными колебаниями, наибольший интерес представляет рассмотрение эффективности демпфирования изгибных колебаний, в частности путем нанесения на структуру вибропоглощающих покрытий. При таком демпфировании изменяются динамические параметры структуры (масса, жесткость и коэффициент потерь), что в свою очередь обусловливает уменьшение ее колебательной энергии.

Определим эффективность демпфирования изгибных колебаний $Э_1$ отношением энергии вибраций до и после нанесения покрытия. Тогда при заданной мощности источников (W_1, W_2), в предположении, что при демпфировании величина связи изгибных и продольных колебаний не изменяется, получим для эффективности $Э_1$ из (4) выражение

$$(5) \qquad Э_1=\frac{E_1}{E_1'}=\frac{c_{\text{гр.}1}'}{c_{\text{гр.}1}}\frac{[\gamma_2+\varkappa(1+\beta)][\gamma_1'\gamma_2'+\varkappa(\gamma_1'+\gamma_2')]}{[\gamma_2'+\varkappa(1+\beta)][\gamma_1\gamma_2+\varkappa(\gamma_1+\gamma_2)]}.$$

В выражении (5) и в дальнейшем параметры со штрихом относятся к демпфированной структуре, без штриха — к исходной структуре. Из (5) следует, что эффект поглощения энергии изгибных колебаний неоднородных структур определяется в общем случае изменением коэффициентов потерь и групповых скоростей изгибных и продольных колебаний, а также величиной связи и соотношением мощностей источников, возбуждающих продольные и изгибные колебания.

Рассмотрим эффективность вибропоглощения при некоторых соотношениях параметров структуры, которые могут иметь место на практике.

При $\varkappa \gg \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1', \gamma_2'$ (случай сильной связи) из (5) следует, что

$$\text{Э}_1 \cong \frac{\eta_1' + b'\eta_2'}{\eta_1 + b\eta_2}, \tag{6}$$

где $b = \dfrac{c_{\text{гр.}1}}{c_{\text{гр.}2}} = \dfrac{\Delta n_2}{\Delta n_1}$, $b' = \dfrac{c'_{\text{гр.}1}}{c'_{\text{гр.}2}} = \dfrac{\Delta n_2'}{\Delta n_1'}$. Эффективность демпфирования в рассматриваемом случае определяется изменением коэффициента потерь изгибных и продольных колебаний и не зависит от величины связи и соотношения мощностей W_1 и W_2.

Как следует из (6), степень влияния на эффективность Э_1 потерь энергии продольных колебаний зависит от величин b и b'. Для пластины

$$b = 2\sqrt{2\pi f}\,\sqrt[4]{mB_1/B_2^2},$$

где $B_1 = EH^3/12(1-\sigma^2)$ — изгибная жесткость, $B_2 = EH/(1-\sigma^2)$ — продольная жесткость, $m = \rho H$ — масса единицы поверхности, H — толщина пластины, ρ — плотность, E — модуль Юнга и σ — коэффициент Пуассона материала пластины. Для стальных пластин $b \cong 0{,}004\sqrt{f\,(\text{гц})\,H\,(\text{см})}$ эта величина меньше единицы в широком диапазоне частот и большом интервале толщин пластины.

При демпфировании стальных структур обычно справедливы соотношения $\eta_1 \cong \eta_2$ и $\eta_1' \gg \eta_2'$. Если пренебречь изменением b при нанесении покрытия, то из (6) следует вывод, что на частотах, для которых $b \ll 1$, эффективность демпфирования структуры, совершающей продольные и изгибные колебания, не отличается от эффективности демпфирования Э_{01} структуры, в которой имеют место только изгибные колебания, т. е. что $\text{Э}_1 \cong \eta_1'/\eta_1 = \text{Э}_{01}$. С увеличением частоты и соответствующим ростом b эффективность демпфирования Э_1 уменьшается и на частоте $f_1 = \sqrt{\dfrac{3B_2}{m}} \Big/ 4\pi H$ гц (для стальной пластины $f_1 \cong 6 \cdot 10^4/H$ (см) гц), для которой $b=1$, значение ее составляет $\text{Э}_1 \cong \text{Э}_{01}/2$.

Таким образом, на частотах, не превышающих f_1, эффективность демпфирования неоднородной структуры ниже эффективности демпфирования соответствующей однородной структуры в пределах 3 *дб*.

Рассмотрим далее случай слабой связи: $\varkappa \ll \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1', \gamma_2'$. Из (5) следует, что

$$\text{Э}_1 \cong \eta_1'/\eta_1 = \text{Э}_{01} \quad \text{при} \quad \beta \ll \frac{\gamma_2}{\varkappa} - 1,$$

$$\text{Э}_1 \cong a_2 \frac{\eta_1'\eta_2'}{\eta_1\eta_2} \cong \text{Э}_{01}\text{Э}_{02} \quad \text{при} \quad \beta \gg \frac{\gamma_2'}{\varkappa} - 1,$$

$$a_2 = \frac{c_{\text{гр.}2}}{c'_{\text{гр.}2}} = \frac{\Delta n_2'}{\Delta n_2}.$$

Полагая $a_2 \cong 1$, находим, что эффективность в этом случае изменяется с ростом величины β от значения, соответствующего эффективности демпфирования изгибных колебаний однородной структуры $Э_{01}$, до значения, равного произведению эффективностей демпфирования изгибных ($Э_{01}$) и продольных ($Э_{02}$) колебаний. Величина связи на эффективность не влияет.

При нанесении покрытий на металлические структуры увеличивается коэффициент потерь изгибных колебаний, коэффициент потерь продольных колебаний изменяется при этом незначительно, т. е. $\gamma_2' \cong \gamma_2$. Кроме того, в области частот $f < f_1$ имеет место неравенство $\gamma_1 \gg \gamma_2$. Из (5) следует, что независимо от значений $\varkappa$ и β эффективность демпфирования равна $Э_1 \cong Э_{01}$. Таким образом, в неоднородной структуре, где наряду с изгибными существуют и продольные колебания, потери которых пренебрежимо малы, эффективность демпфирования изгибных колебаний та же, что и в случае существования только изгибных колебаний.

Аналогичным образом можно исследовать эффективность демпфирования продольных колебаний неоднородной структуры, определяемую величиной $Э_2 = E_2/E_2'$. Из соотношений (4) получим следующее выражение для эффективности:

$$Э_2 = \frac{c'_{\text{гр.2}}}{c_{\text{гр.2}}} \frac{[\beta\gamma_1 + \varkappa(1+\beta)][\gamma_1'\gamma_2' + \varkappa(\gamma_1' + \gamma_2')]}{[\beta\gamma_1' + \varkappa(1+\beta)][\gamma_1\gamma_2 + \varkappa(\gamma_1 + \gamma_2)]}. \tag{7}$$

При $\varkappa \gg \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1', \gamma_2'$ из (7) находим, что

$$Э_2 \cong \frac{b}{b'} \frac{\eta_1' + b'\eta_2'}{\eta_1 + b\eta_2} = Э_1 \frac{b}{b'}.$$

Поскольку при нанесении вибропоглощающего покрытия на металлические структуры обычно $b' \cong b$, то в случае сильной связи эффективность демпфирования продольных колебаний не отличается от эффективности демпфирования изгибных колебаний, т. е. $Э_2 = Э_1$.

В случае слабой связи, когда $\varkappa \ll \gamma_1, \gamma_2, \gamma_2', \gamma_2'$, эффективность равна:

$$Э_2 \cong \eta_2'/\eta_2 \quad \text{при} \quad \frac{1}{\beta} \ll \frac{\gamma_1}{\varkappa} - 1,$$

$$Э_2 \cong a_1 \frac{\eta_1'\eta_2'}{\eta_1\eta_2} \cong Э_{01}Э_{02} \quad \text{при} \quad \frac{1}{\beta} \gg \frac{\gamma_1'}{\varkappa} - 1,$$

$$a_1 = \frac{c_{\text{гр.1}}}{c'_{\text{гр.1}}} = \frac{\Delta n_1'}{\Delta n_1}.$$

Полагая $a_1 \cong 1$, находим, что эффективность $Э_2$ изменяется с ростом $1/\beta$ от значения эффективности демпфирования продольных колебаний однородной структуры до произведения эффективностей демпфирования изгибных и продольных колебаний однородной структуры.

Для металлических структур $\gamma_2' \cong \gamma_2$ и $\gamma_1 \gg \gamma_2$. В этом случае из (7) следует, что

$$Э_2 \cong 1/a_2, \quad \text{если} \quad \gamma_1 > \varkappa \text{ и } \frac{1}{\beta} \ll \frac{\gamma_1}{\varkappa} - 1,$$

$$Э_2 \cong \frac{b}{b'} \frac{\eta_1'}{\eta_1} \cong Э_{01}, \quad \text{если} \quad \gamma_1' > \varkappa \text{ и } \beta \ll \frac{\gamma_1'}{\varkappa} - 1$$

или $\gamma_1' < \varkappa$ и $\beta \ll 1 - \dfrac{\gamma_1'}{\varkappa}$.

Таким образом, если пренебречь изменением массы и жесткости металлической структуры при нанесении на нее вибропоглощающего покрытия ($a_2 \cong 1$, $b' \cong b$), то эффективность $Э_2$ изменяется в зависимости от соотношения мощностей β и величины связи $\varkappa$ от единицы до величины эффективности демпфирования изгибных колебаний однородной структуры $Э_{01}$.

Для некоторых структур коэффициент связи продольных и изгибных колебаний может быть вычислен [9]. Однако для большинства реальных структур расчет коэффициента связи затруднителен, в связи с чем большое значение приобретает его экспериментальная оценка. Такая оценка может быть получена на основе соотношения, следующего из (2) и (3):

$$\varkappa = A\frac{W_1-\omega\eta_1 E_1}{E_1(\Delta\omega/\Delta n_1)+E_2(\Delta\omega/\Delta n_2)},$$

в котором величины, входящие в правую часть, определяются экспериментально. Величину W_1 можно определить по измеренным значениям силы $\overline{F}$ и скорости $\overline{V}$ в точке возбуждения колебаний, а частотные промежутки между модами $\Delta\omega/\Delta n_1$ и $\Delta\omega/\Delta n_2$ — по частотным характеристикам входного импеданса изгибных и продольных колебаний.

Энергию изгибных и продольных колебаний можно определить по среднеквадратичным значениям колебательной скорости V_{ij}, измеренной в n точках, равномерно распределенных по поверхности структуры, как $E_i=\sum\limits_{j=1} m_j V_{ij}^2$, где m_j — масса участка, окружающего j-ю точку. Коэффициент потерь η_1 определяется известными методами [4].

При известных значениях параметра связи и известной зависимости величин a_i, b, η_1 и η_2 от параметров вибропоглощающего покрытия полученные соотношения могут быть использованы не только для оценки эффективности демпфирования колебаний структуры, но и для выбора оптимальных способов демпфирования, например для выбора типа и параметров вибропоглощающего покрытия, позволяющего получить требуемую эффективность при минимальном весе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. А. Рыбак.* Случайно связанные изгибные и продольные колебания пластин. Акуст. ж., 1972, *18*, 1, 96—100.
2. *В. В. Фурдуев.* Электроакустика. М., Гостехиздат, 1948.
3. *W. Westphal.* Ausbreitung von Körperschall in Gebäuden. Akustische Beihefte, 1957, 1, 335—348.
4. *А. С. Никифоров, С. В. Будрин.* Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах. Л., «Судостроение», 1968.
5. *В. М. Спиридонов.* Применение энергетического метода для расчета уровней звуковой вибрации. В сб. Борьба с шумом на судах. Л., «Судостроение», 1970.
6. *R. H. Lyon, E. Eichler.* Random vibration of Connected structures. J. Acoust. Soc. America, 1964, *36*, 2, 1344—1354.
7. *S. H. Crandall, R. Lotz.* On the coupling Loss Factor in statistical Energy Analisis. J. Acoust. Soc. America, 1971, *49*, 1, part. 2, 352—356.
8. *S. H. Crandall, R. Lotz.* Prediction and measurement of the proportionality constant in statistical energy analisis of structures. J. Acoust. Soc. America, 1973, *54*, 2, 516—524.
9. *С. В. Будрин, А. С. Никифоров.* Прохождение волн через различные соединения пластин. Акуст. ж., 1963, *9*, 4, 408—412.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
2 февраля 1976 г.