АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIII 1977 Вып. 1

УДК 534.26

ЗАТУХАНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ В НЕРЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ

А. Д. Лапин

Рассчитано затухание среднего поля в волноводе со слабо неоднородным заполнением.

При исследовании распространения звука в волноводе, имеющем нерегулярности в среде или на стенках, возникает задача о нахождении закона спадания среднего поля. Для волновода с шероховатыми стенками эта задача была решена в работах [1–4]. В данной работе мы рассчитаем затухание среднего поля в волноводе со слабо неоднородным заполнением.

Рассмотрим простейший волновод – жидкий слой, ограниченный абсолютно мягкими стенками $z=0$ и $z=h$, и будем считать, что его свойства не зависят от координаты y и все движение происходит в плоскости xz (двухмерная задача). Примем, что заполняющая среда однородная в левом полуволноводе ($x<0$) и статистически неоднородная в правом полуволноводе ($x>0$), причем отклонение μ показателя преломления неоднородной среды от среднего значения, равного единице, мало: $|\mu|\ll 1$. Пусть из левого полуволновода на правый полуволновод падает нормальная волна номера q:

$$p(x, z)=A_q^0 \exp(i\xi_q x)\sin(k_q z), \tag{1}$$

где p – звуковое давление, $k_q=q\pi/h$, $\xi_q=\sqrt{k^2-k_q^2}$, k – волновое число, h – ширина волновода. Найдем среднее поле в правом полуволноводе. При расчете мы воспользуемся тем обстоятельством, что по мере распространения звука в нерегулярном волноводе когерентная составляющая звукового поля (среднее поле) безвозвратно уходит (рассеивается) в некогерентную составляющую поля; рассеяние из некогерентной составляющей поля в когерентную составляющую отсутствует.

Рассмотрим нерегулярный участок волновода, заключенный между плоскостями x и $x+\Delta x$, где интервал Δx удовлетворяет следующим условиям: а) интервал велик по сравнению с длиной волны и характерным масштабом нерегулярностей; б) рассеяние на интервале достаточно мало, так что для расчета рассеянного поля можно применять формулы, полученные в первом приближении метода малых возмущений. Изменение потока энергии в когерентной части звукового поля после прохождения нерегулярного участка Δx можно записать в виде

$$\xi_q\{|\langle A_q(x+\Delta x)\rangle|^2-|\langle A_q(x)\rangle|^2\}= -\sum_{n=1}^{N}\xi_n\{\langle|a_n^+|^2\rangle+\langle|a_n^-|^2\rangle\}, \tag{2}$$

где $A_q(x)$ – амплитуда исходной волны в сечении x, a_n^+ и a_n^- – соответственно амплитуды рассеянных нормальных волн номера n, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси x, N — число однородных (распространяющихся) нормальных волн в данном волноводе; угловые скобки означают статистическое усреднение. В формуле (2) не учитываются неоднородные нормальные волны, так как они не дают вклада в потоки энергии.

Из работы [5] следует, что в первом приближении метода малых возмущений средние квадраты амплитуд рассеянных нормальных волн пропорциональны длине нерегулярного участка и интенсивности падающего поля, т. е.

$$\langle |a_n^\pm|^2\rangle = \alpha_{qn}^\pm |\langle A_q(x)\rangle|^2 \Delta x. \tag{3}$$

Коэффициенты пропорциональности $\alpha_{qn}^\pm$ зависят от типа нерегулярностей; для среды с флуктуациями показателя преломления они определяются по формуле

$$\alpha_{qn}^\pm = \frac{k^4\langle\mu^2\rangle}{2\xi_n^2 h}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} R(\tau_1,\tau_2)\{\delta_{qn}+\cos[(k_q-k_n)\tau_2]+$$
$$+\cos[(k_q+k_n)\tau_2]\}\exp[i(\xi_q\mp\xi_n)\tau_1]\,d\tau_1\,d\tau_2,$$

где $R(\tau_1, \tau_2)$ — коэффициент корреляции величины μ, $\delta_{qq}=1$, $\delta_{qn}=0$ при $n\neq q$.

Пользуясь формулами (2) и (3), получим соотношение

$$\Delta\{|\langle A_q\rangle|^2\} = \{|\langle A_q(x+\Delta x)\rangle|^2 - |\langle A_q(x)\rangle|^2\} = \tag{4}$$
$$= -2\alpha_q |\langle A_q(x)\rangle|^2 \Delta x,$$

где

$$\alpha_q = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\xi_n}{\xi_q}(\alpha_{qn}^+ + \alpha_{qn}^-).$$

Таким образом, относительное уменьшение квадрата модуля средней амплитуды на малом нерегулярном участке волновода пропорционально длине этого участка. Следовательно, средняя амплитуда исходной нормальной волны будет экспоненциально убывать по мере распространения этой волны в нерегулярном волноводе, т. е.

$$|\langle A_q(x)\rangle| = |A_q^0| e^{-\alpha_q x}. \tag{5}$$

Коэффициент затухания α_q волны определяется по формуле

$$\alpha_q = \sum_{n=1}^{N}\frac{k^4\langle\mu^2\rangle}{2\xi_q\xi_n h}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} R(\tau_1,\tau_2)\{\delta_{qn}+\cos[(k_q-k_n)\tau_2]+ \tag{6}$$
$$+\cos[(k_q+k_n)\tau_2]\} e^{i\xi_q\tau_1}\cos(\xi_n\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2.$$

Пусть коэффициент корреляции неоднородностей задан в виде $R(\tau_1, \tau_2) = \exp(-\tau_1^2/\tau_{10}^2 - \tau_2^2/\tau_{20}^2)$, где τ_{10} и τ_{20} — характерные масштабы неоднородностей. Тогда коэффициент затухания нормальной волны номера q будет равен

$$\alpha_q = \sum_{n=1}^{N}\frac{\pi\langle\mu^2\rangle k^4\tau_{10}\tau_{20}}{4\xi_q\xi_n h}\{\delta_{qn}+\exp[-(k_q-k_n)^2\tau_{20}^2/4]+ \tag{7}$$
$$+\exp[-(k_q+k_n)^2\tau_{20}^2/4]\}\{\exp[-(\xi_q-\xi_n)^2\tau_{10}^2/4]+$$
$$+\exp[-(\xi_q+\xi_n)^2\tau_{10}^2/4]\}.$$

Для изотропной среды ($\tau_{10}=\tau_{20}=\tau_0$) это выражение можно привести к виду

$$(8)\qquad \alpha_q=\sum_{n=1}^{N}\frac{\pi\langle\mu^2\rangle k^4\tau_0^2}{\xi_q\xi_n h}\left\{\frac{1}{2}\delta_{qn}\exp(-\xi_q^2\tau_0^2/2)\operatorname{ch}(\xi_q^2\tau_0^2/2)+\right.$$

$$\left.+\exp(-k^2\tau_0^2/2)\operatorname{ch}(k_qk_n\tau_0^2/2)\operatorname{ch}(\xi_q\xi_n\tau_0^2/2)\right\}.$$

Из формул (6) — (8) следует, что коэффициент затухания α_q резко возрастает при приближении частоты звука к критическим частотам нормальных волн данного волновода, т. е. при $kh\to N\pi$. Однако эти формулы нельзя применять на самих критических частотах, так как здесь нарушаются условия применимости метода малых возмущений [5].

В формулах (6) — (8) число суммируемых членов растет при увеличении параметра kh, и поэтому эти формулы не удобны для расчета коэффициентов затухания нормальных волн в широких (по сравнению с длиной волны звука) волноводах. Получим асимптотическую формулу для α_q при $kh\to\infty$. С этой целью в формуле (8) выделим последнее ($n=N$) слагаемое, стремящееся к бесконечности при $kh\to N\pi$, и заменим оставшуюся сумму интегралом; в результате при $kh\to\infty$ получим выражение

$$\alpha_q=\frac{\langle\mu^2\rangle k^4\tau_0^2}{\xi_q}\exp(-k^2\tau_0^2/2)\left\{\frac{\pi}{\xi_N h}\operatorname{ch}(k_qk_N\tau_0^2/2)\times\right.$$

$$\times\operatorname{ch}(\xi_q\xi_N\tau_0^2/2)+\sum_{n=1}^{N-1}\left[\frac{1}{2}\delta_{qn}\exp(k_q^2\tau_0^2/2)\operatorname{ch}(\xi_q^2\tau_0^2/2)+\right.$$

$$\left.\left.+\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}kk_q\tau_0^2\frac{k_n}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}k\xi_q\tau_0^2\sqrt{1-(k_n/k)^2}\right)\right]\frac{\pi/kh}{\sqrt{1-(k_n/k)^2}}\right\}\approx$$

$$\approx\frac{\langle\mu^2\rangle k^4\tau_0^2}{\xi_q}\exp(-k^2\tau_0^2/2)\,[\beta_q^{(1)}+\beta_q^{(2)}],$$

где

$$\beta_q^{(1)}=\frac{\pi}{\xi_N h}\operatorname{ch}(k_qk_N\tau_0^2/2)\operatorname{ch}(\xi_q\xi_N\tau_0^2/2),$$

$$(9)\qquad \beta_q^{(2)}=\int_0^1\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}kk_q\tau_0^2\tilde{k}_z\right)\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}k\xi_q\tau_0^2\sqrt{1-\tilde{k}_z^2}\right)\frac{d\tilde{k}_z}{\sqrt{1-\tilde{k}_z^2}}.$$

При произвольных значениях параметров k, k_q и τ_0 интеграл (9) не сводится к табличному. Этот интеграл можно приближенно оценить при $k_q/k\,(k\tau_0)^2\ll1$ и при $\xi_q/k\,(k\tau_0)^2\ll1$.

Пусть при заданных значениях параметров выполняется неравенство $\frac{k_q}{k}(k\tau_0)^2\ll1$. Тогда в интеграле (9) можно положить $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}kk_q\tau_0^2\tilde{k}_z\right)\approx1$, и мы получим выражение

$$\beta_q^{(2)}\approx\int_0^1\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}k\xi_q\tau_0^2\sqrt{1-\tilde{k}_z^2}\right)\frac{d\tilde{k}_z}{\sqrt{1-\tilde{k}_z^2}}=\pi/2\,J_0(ik\xi_q\tau_0^2/2),$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

При $\xi_q/k\,(k\tau_0)^2\ll1$ аналогичные вычисления дают

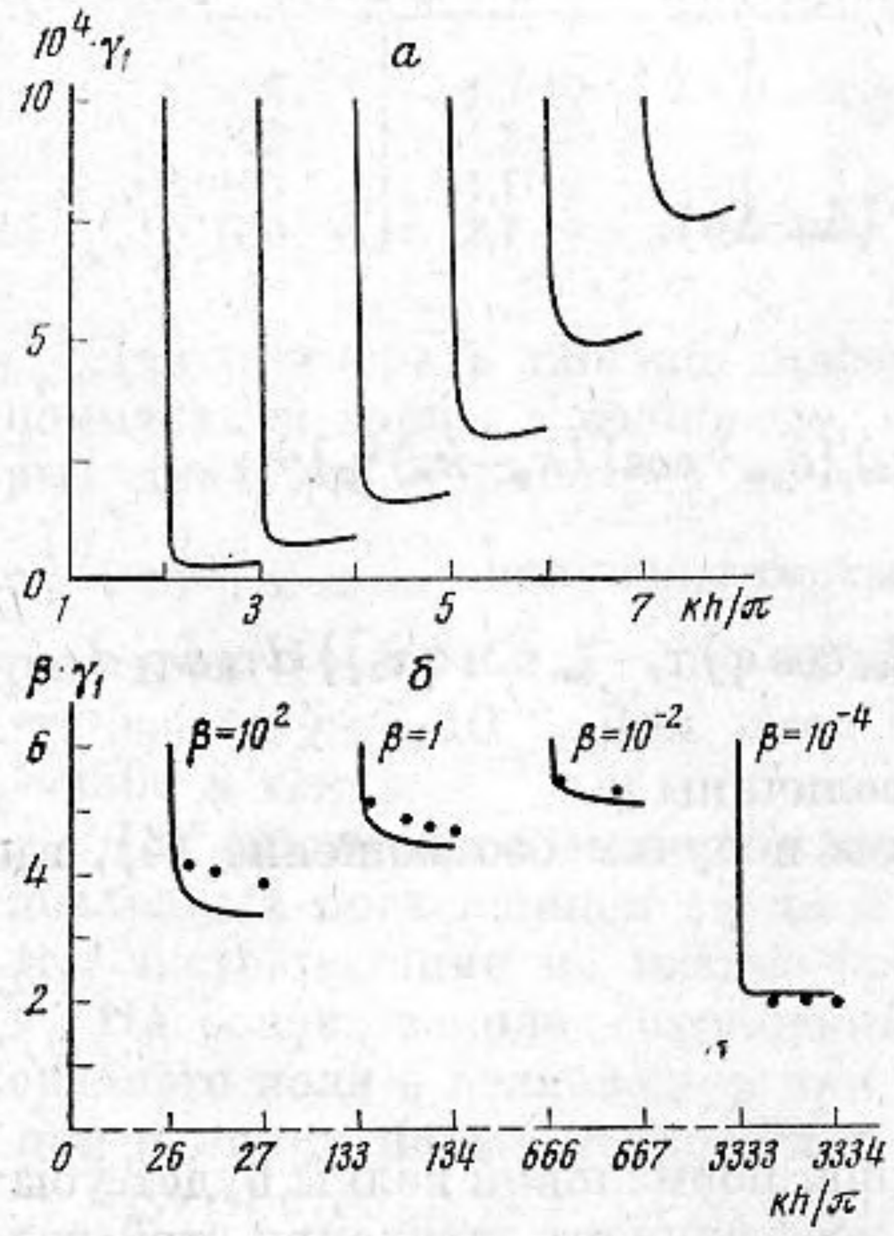
$$\beta_q^{(2)}\approx\int_0^1\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}kk_q\tau_0^2\tilde{k}_z\right)\frac{d\tilde{k}_z}{\sqrt{1-\tilde{k}_z^2}}=\frac{\pi}{2}J_0(ikk_q\tau_0^2/2).$$

Таким образом, при $kh \to \infty$ имеем следующие асимптотические формулы:

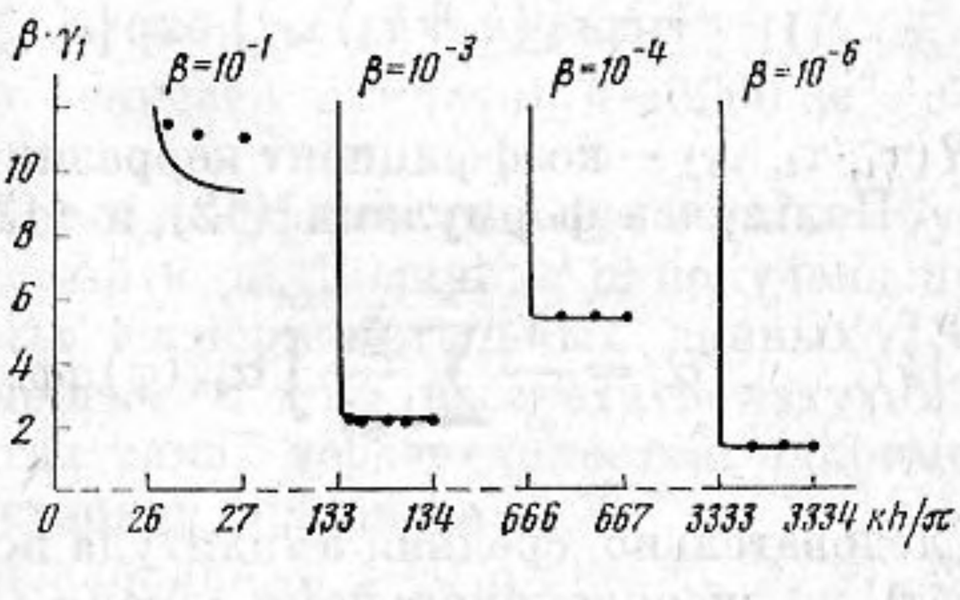
$$\alpha_q = \frac{\pi\langle\mu^2\rangle k^4\tau_0^2}{2\xi_q}\exp(-k^2\tau_0^2/2)\left\{\frac{2}{\xi_N h}\operatorname{ch}(\xi_q\xi_N\tau_0^2/2) + \right.$$
$$\left. + J_0(ik\xi_q\tau_0^2/2)\right\} \quad \text{при } \frac{k_q}{k}(k\tau_0)^2 \ll 1, \tag{10}$$

$$\alpha_q = \frac{\pi\langle\mu^2\rangle k^4\tau_0^2}{2\xi_q}\exp(-k^2\tau_0^2/2)\left\{\frac{2}{\xi_N h}\operatorname{ch}(k_q k_N\tau_0^2/2) + \right.$$
$$\left. + J_0(ikk_q\tau_0^2/2)\right\} \quad \text{при } \frac{\xi_q}{k}(k\tau_0)^2 \ll 1. \tag{11}$$

Исследуем частотную зависимость коэффициента затухания первой нормальной волны и оценим границы применимости асимптотической



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Зависимость нормированного коэффициента затухания от величины kh/π при $\tau_0/h = 2\cdot10^{-4}$

Фиг. 2. Зависимость нормированного коэффициента затухания от величины kh/π при $\tau_0/h = 1{,}4\cdot10^{-2}$

формулы (10). С этой целью рассмотрим безразмерную величину $\gamma_1 = \alpha_1 h/\langle\mu^2\rangle$ — нормированный коэффициент затухания волны. На фиг. 1 и 2 представлены графики величины γ_1 в функции kh/π, рассчитанные на основе формулы (8) при различных значениях τ_0/h. На тех же фигурах точками даны соответственные значения величины γ_1, найденные при помощи асимптотической формулы (10). Сопоставление численных результатов, полученных по формулам (8) и (10), показывает, что при $kh/\pi > 26$ они разнятся менее чем на 20%, причем это различие уменьшается с увеличением величины kh/π. Следовательно, при $kh/\pi > 26$ коэффициенты затухания нормальных волн можно вычислить с достаточной точностью по простой асимптотической формуле (10).

Все изложенные выше результаты были получены в предположении, что свойства неоднородной среды, заполняющей волновод, не зависят от координаты y. Обобщим эти результаты на трехмерный случай, когда величина μ является статистической функцией всех пространственных координат. Как и ранее, мы будем считать, что левый полуволновод ($x<0$) не содержит неоднородностей и что волна (1) падает из него на правый полуволновод ($x>0$), содержащий неоднородности. Расчет спадания среднего поля выполним по обычной схеме на основе закона сохранения энергии. Рассмотрим трубу прямоугольного сечения, образованную плоскостями y, $y+\Delta y$ и стенками волновода. Изменение потока энергии в когерентной составляющей звукового поля при переходе в трубе от сечения x к сечению $x+\Delta x$ обусловлено рассеянием этой составляющей поля на неоднородностях среды, заключенной в объеме $(\Delta x\,\Delta y\,h)$, и оно дается формулой

$$(12)\qquad (\Delta yh)\,\xi_q\{|A_q(x+\Delta x)\rangle|^2-|\langle A_q(x)\rangle|^2\}=$$
$$=-\sum_{n=1}^{N}h\xi_n\int_0^{2\pi}\langle|a_n(\varphi)|^2\rangle\,d\varphi,$$

где $a_n(\varphi)$ — амплитуда рассеянной цилиндрической нормальной волны номера n в зоне Фраунгофера по отношению к площадке $(\Delta x\Delta y)$; полярный угол φ отсчитывается от оси, проведенной из точки x, y, 0 параллельно оси абсцисс.

Согласно работе [6], имеем

$$(13)\qquad \langle|a_n(\varphi)|^2\rangle=\alpha_{qn}(\varphi)\,|\langle A_q(x)\rangle|^2(\Delta x\,\Delta y),$$

где

$$\alpha_{qn}(\varphi)=\frac{k^2\langle\mu^2\rangle}{4\pi\xi_nh}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}R(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\,\{\delta_{qn}+\cos[(k_q-k_n)\tau_3]+$$
$$+\cos[(k_q+k_n)\tau_3]\}\exp\{i[(\xi_q-\xi_n\cos\varphi)\tau_1-\xi_n\sin\varphi\tau_2]\}\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3,$$

$R(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ — коэффициент корреляции величины μ.

Пользуясь формулами (12) и (13), мы получим соотношение (4), где

$$(14)\qquad \alpha_q=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\xi_n}{\xi_q}\int_0^{2\pi}\alpha_{qn}(\varphi)\,d\varphi.$$

Следовательно, средняя амплитуда исходной нормальной волны будет убывать по экспоненциальному закону (5); коэффициент затухания этой волны найдем по формуле

$$(15)\qquad \alpha_q=\sum_{n=1}^{N}\frac{k^2\langle\mu^2\rangle}{8\pi\,\xi_qh}\int_0^{2\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}R(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\,\{\delta_{qn}+\cos[(k_q-k_n)\tau_3]+$$
$$+\cos[(k_q+k_n)\tau_3]\}\exp\{i[(\xi_q-\xi_n\cos\varphi)\tau_1-\xi_n\sin\varphi\tau_2]\}\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3\,d\varphi.$$

Пусть коэффициент корреляции неоднородностей задан в виде $R(\tau_1,\tau_2,\tau_3)=\exp(-\tau^2/\tau_0^2)$, где $\tau^2=\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2$. Тогда в формуле (15) все интегралы сводятся к табличным [7], и мы получим выражение

$$(16)\qquad \alpha_q=\sum_{n=1}^{N}\frac{\pi^{3/2}\tau_0^3k^4\langle\mu^2\rangle}{2\xi_qh}\exp(-k^2\tau_0^2/2)\,\Big\{\mathrm{ch}\,(k_qk_n\tau_0^2/2)+$$
$$+\frac{1}{2}\,\delta_{qn}\exp(k_q^2\tau_0^2/2)\Big\}J_0(i\xi_q\xi_n\tau_0^2/2).$$

Найдем асимптотическое выражение для коэффициента затухания нормальной волны при $kh\to\infty$. С этой целью в формуле (16) заменим сумму интегралом и вычислим этот интеграл. В результате получим следующее асимптотическое выражение:

$$\alpha_q = \frac{\sqrt{\pi}\,\tau_0^3 k^5 \langle\mu^2\rangle}{2\xi_q} \exp(-k^2\tau_0^2/2) \int_0^1 \operatorname{ch}\left(\frac{k_q}{k}\frac{k^2\tau_0^2}{2}\tilde{k}_z\right) \times \tag{17}$$

$$\times J_0\left(i\frac{\xi_q}{k}\frac{k^2\tau_0^2}{2}\sqrt{1-\tilde{k}_z^2}\right) d\tilde{k}_z = \frac{\sqrt{\pi}\,\tau_0 k^3\langle\mu^2\rangle}{2\xi_q}\{1-e^{-k^2\tau_0^2}\}.$$

Согласно этому выражению, коэффициенты затухания нормальной волны при $k\tau_0 \ll 1$ и при $k\tau_0 \gg 1$ будут соответственно равны $\sqrt{\pi}\langle\mu^2\rangle k^5\tau_0^3/ /2\xi_q$ и $\sqrt{\pi}\langle\mu^2\rangle k^3\tau_0/2\xi_q$.

$\omega/2\pi$, *гц*	$\alpha_1^{(\mathrm{I})}$, *м*$^{-1}$	$\alpha_1^{(\mathrm{II})}$, *м*$^{-1}$	$\alpha_1^{(\mathrm{III})}$, *м*$^{-1}$	α, *м*$^{-1}$
4	$1{,}3\cdot10^{-11}$	$3{,}3\cdot10^{-10}$	$3{,}5\cdot10^{-15}$	$1{,}6\cdot10^{-11}$
20	$4{,}3\cdot10^{-10}$	$1{,}1\cdot10^{-8}$	$2{,}2\cdot10^{-12}$	$4\cdot10^{-10}$
100	$1{,}1\cdot10^{-8}$	$2{,}7\cdot10^{-7}$	$1{,}3\cdot10^{-9}$	$9{,}8\cdot10^{-9}$
500	$2{,}7\cdot10^{-7}$	$6{,}8\cdot10^{-6}$	$1{,}9\cdot10^{-7}$	$2{,}3\cdot10^{-7}$

Для примера в таблице приведены коэффициенты затухания первой нормальной волны в волноводе, найденные по формуле (17) для некоторых значений параметров неоднородностей и волновода. Коэффициенты $\alpha_1^{(\mathrm{I})}$, $\alpha_1^{(\mathrm{II})}$ и $\alpha_1^{(\mathrm{III})}$ получены соответственно при следующих значениях параметров: I — $\tau_0=70$ *м*, $\langle\mu^2\rangle=10^{-9}$; II — $\tau_0=70$ *м*, $\langle\mu^2\rangle=25\cdot10^{-9}$; III — $\tau_0=1$ *м*, $\langle\mu^2\rangle=5\cdot10^{-8}$. Для всех трех случаев принято $h=5000$ *м*, $c=1500$ *м/сек*.

Для сравнения в этой же таблице дан коэффициент затухания α, обусловленный поглощением звука в морской воде. Величина α получена путем экстраполяции на низкие частоты экспериментальных данных [8].

На основе закона сохранения энергии можно рассчитать затухание среднего поля в волноводе и при других типах нерегулярностей, например при наличии малых неровностей на стенках волновода.

Пусть стенки волновода заданы уравнениями $z=0$ и $z=h+\zeta(x, y)$, где $\zeta(x, y)$ — статистическая функция точки, $|k\zeta| \ll 1$, $|\nabla\zeta| \ll 1$. Найдем коэффициенты затухания нормальных волн в этом нерегулярном волноводе. Выполнив соответственные вычисления, мы получим для коэффициента затухания α_q, обусловленного рассеянием звука на неровностях, формулу (14), где, согласно работе [6], величина $\alpha_{qn}(\varphi)$ дается формулой

$$\alpha_{qn}(\varphi) = \frac{\langle\zeta^2\rangle\, k_q^2 k_n^2}{2\pi\,\xi_n h^2} \iint_{-\infty}^{\infty} R(\tau_1, \tau_2) \exp\{i[\xi_q - \xi_n\cos\varphi)\tau_1 - \tag{18}$$

$$-\xi_n \sin\varphi\tau_2]\}\, d\tau_1\, d\tau_2,$$

где $R(\tau_1, \tau_2)$ — коэффициент корреляции неровностей.

Пусть коэффициент корреляции равен $\exp(-\tau^2/\tau_0^2)$, где $\tau^2=\tau_1^2+\tau_2^2$, τ_0 — характерный масштаб неровностей. Выполнив интегрирование в формулах (14) и (18), мы получим следующее выражение:

$$\alpha_q = \sum_{n=1}^{N} \frac{\pi\langle\zeta^2\rangle\, k_q^2 k_n^2 \tau_0^2}{2\xi_n h^2} \{J_0(i\xi_q\xi_n\tau_0^2/2)\exp(-\xi_q\xi_n\tau_0^2/2)\} \times$$

$$\times \exp[-(\xi_n-\xi_q)^2\tau_0^2/4].$$

При $kh\to\infty$ в этом выражении сумму можно заменить интегралом, и асимптотическая формула для коэффициента затухания будет иметь вид

$$\alpha_q=\frac{\langle\zeta^2\rangle\, k^3k_q^{\,2}\tau_0^{\,2}}{2\xi_q h}\int\limits_0^1\{J_0(i\tilde{\kappa}_x k\xi_q\tau_0^{\,2}/2)\exp(-\tilde{\kappa}_x k\xi_q\tau_0^{\,2}/2)\}\times \tag{19}$$

$$\times\exp\left[-\frac{k^2\tau_0^{\,2}}{4}(\tilde{\kappa}_x-\xi_q/k)^2\right]\tilde{\kappa}_z^{\,2}\,d\tilde{\kappa}_z,$$

где $\tilde{\kappa}_x=\sqrt{1-\tilde{\kappa}_z^{\,2}}$.

В формуле (19) интегрирование удается выполнить при $k\tau_0\ll1$ и при $\xi_q\tau_0\gg1$. Асимптотическое значение коэффициента затухания нормальной волны номера q равно $\langle\zeta^2\rangle k^3k_q^{\,2}\tau_0^{\,2}/6\xi_q h$ при $k\tau_0\ll1$ и $\langle\zeta^2\rangle k_q^{\,3}/\xi_q h$ при $\xi_q\tau_0\gg1$. Например, при значениях параметров $\omega/2\pi=4$ *гц*, $h=5000$ *м*, $c=1500$ *м/сек*, $\tau_0=35$ *м*, $\sqrt{\langle\zeta^2\rangle}=1$ *м* имеем $\alpha_1\approx5\cdot10^{-12}$ *м*$^{-1}$. При уменьшении ширины волновода величина α_1 быстро увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Д. Лапин.* Расчет среднего поля в волноводе с шероховатыми стенками. В сб. VI Всес. акуст. конф. М., 1968, А14.
2. *Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс.* Среднее поле точечного источника в волноводе с шероховатыми стенками. Изв. высш. учебн. завед. Радиофизика, 1969, *12,* 10, 1521—1531.
3. *Ю. П. Лысанов.* О среднем коэффициенте отражения от неровной поверхности, ограничивающей неоднородную среду. Акуст. ж., 1969, *15,* 3, 393—400.
4. *В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс.* Затухание среднего поля в волноводе на критической частоте. Изв. высш. учебн. завед. Радиофизика, 1970, *13,* 1, 128—132.
5. *М. А. Исакович.* Рассеяние звуковых волн на малых неоднородностях в волноводе. Акуст. ж., 1957, *3,* 1, 37—45.
6. *А. Д. Лапин.* К теории рассеяния волн в нерегулярных волноводах. Канд. дис., М., Акустический ин-т АН СССР, 1958.
7. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз 1962.
8. *Л. Баранек.* Акустические измерения. М., Изд-во иностр. лит., 1952.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
23 января 1976 г.