

УДК 534.232

**АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ СИСТЕМЫ БЕСКОНЕЧНЫХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ
ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ**

В. А. Андебура, А. Г. Лейко, С. М. Силецкий

Интегральным методом наименьших квадратов определено поле излучения произвольной системы бесконечных цилиндрических эллиптических излучателей при смешанных граничных условиях на поверхности излучателей с учетом их взаимного влияния. Приведены результаты расчета углового распределения амплитуды поля излучения круговой системы из двух, трех и четырех излучателей.

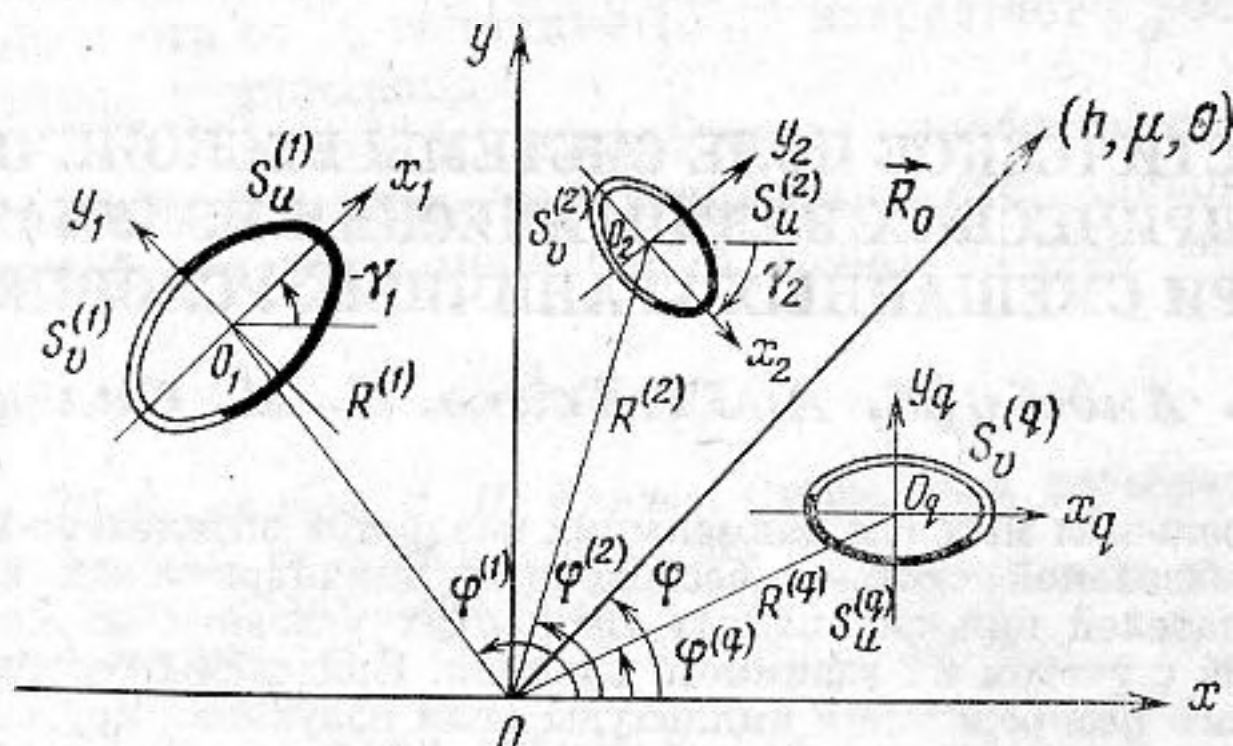
Задачи излучения и рассеяния звуковых и электромагнитных волн для систем многих тел важны для ряда практических приложений. В работе [1] дано решение ряда задач дифракции электромагнитных волн на системах из двух тел различной конфигурации. Излучение звука произвольной системой круговых цилиндров рассмотрено в работе [2]. Дифракция звука на плоской периодической решетке эллиптических цилиндров рассматривалась в работе [3].

Решения в перечисленных работах учитывают волновое взаимодействие тел через внешнее поле путем удовлетворения граничных условий на каждом из взаимодействующих тел; с этой целью используются теоремы сложения собственных волновых функций задачи. Отметим, что в перечисленных работах рассматривались системы тел, на поверхности которых были заданы краевые условия Неймана или Дирихле.

Большой практический интерес представляет исследование систем взаимодействующих тел со смешанными граничными условиями на их поверхности, что связано, однако, с известными математическими трудностями. Приближенные решения задач об излучении и рассеянии звука одиночными телами, полученные интегральным методом наименьших квадратов, даны в ряде работ, первой из которых явилась работа [4]. Ниже мы обобщим упомянутый метод для нахождения приближенного решения задачи об излучении произвольной системы гармонически колеблющихся цилиндрических излучателей со смешанными граничными условиями на их поверхности. Конфигурация излучателей, выбранная для рассмотрения, в значительной мере универсальна, так как позволяет описать форму поверхности излучателей, изменяющуюся в широких пределах — от круговой цилиндрической до плоской полосы. Итак, определим акустическое поле произвольной системы $q=1, 2, \dots, M$ гармонически колеблющихся бесконечных эллиптических излучателей, на части боковой поверхности каждого из которых, ограниченной двумя образующими, задан потенциал скорости, а на остальной части их боковой поверхности — колебательная скорость. Граничные условия на поверхности излучателя с номером q зададим следующим образом:

$$(1) \quad \begin{aligned} \Phi(h, \theta, \mu)_{\mu=\mu_0^q} &= u^q(\theta, \mu), \quad (\theta, \mu) \in S_u^q, \\ - \frac{\partial \Phi(h, \theta, \mu)}{\partial n} \Big|_{\mu=\mu_0^q} &= v^q(\theta, \mu) \quad (\theta, \mu) \in S_v^q, \quad q=1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

где Φ — комплексная амплитуда потенциала скорости суммарного звукового поля, u^q и v^q — соответственно амплитуда потенциала скорости и амплитуда нормальной составляющей колебательной скорости на поверхности излучателя, $\partial/\partial n$ — производная по нормали, θ , μ — эллиптические координаты, μ_0^q — координата поверхности излучателя с номером q , h^q — волновой параметр излучателя ($h^q = ka^q/2$, где k — волновое число, a^q — фокусное расстояние эллипса поперечного сечения q -го излучателя).



Фиг. 1. Системы координат в плоскости поперечного сечения системы излучателей

Предполагается, что излучатели, образующие систему, расположены в пространстве, не касаясь друг друга так, что их продольные оси параллельны. Волновые размеры, конфигурация излучателей, их ориентация и расстояние между ними могут быть произвольными. В частных случаях излучатели могут быть ориентированы так, что их продольные оси лежат в одной плоскости (плоская решетка излучателей) или на круговой цилиндрической поверхности (круговая цилиндрическая решетка излучателей). Сечение системы излучателей плоскостью, нормальной к их продольным осям, изображено на фиг. 1. Здесь введены следующие системы координат: прямоугольная система $oxuz$ с осью oz , параллельной продольным осям излучателей; локальные прямоугольные системы координат $o^q x^q y^q z^q$, $q=1, 2, \dots, M$, оси $o^q z^q$ которых являются продольными осями соответственных излучателей, а оси $o^q x^q$ и $o^q y^q$ направлены вдоль большой и малой осей эллипсов поперечного сечения излучателей; локальные эллиптические системы координат h^q, θ^q, μ^q . Центры o^q локальных координат в системе координат $oxuz$ определены радиусами R^q , соединяющими точки o^q и o , и углами φ^q между положительным направлением оси ox и этими радиусами. Координаты R_0 и φ определяют точку наблюдения.

В математической постановке задача заключается в нахождении решения уравнения Гельмгольца относительно потенциала скорости суммарного поля $\Phi(h, \theta, \mu)$ с учетом взаимодействия излучателей через акустическое поле. Решение должно удовлетворять граничным условиям (1) и условиям излучения на бесконечности.

Потенциал скорости поля, создаваемого излучателем с номером q в присутствии остальных излучателей, представим в виде бесконечного ряда по волновым функциям эллиптического цилиндра

$$(2) \quad \Phi^q = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{\infty} (A_m^q \Psi_m^{(e)q} + B_m^q \Psi_m^{(o)q}),$$

где A_m^q, B_m^q — неизвестные комплексные коэффициенты, $\Psi_m^{(e)q} = He_m(h^q, \mu^q) Se_m(h^q, \theta^q)$, $\Psi_m^{(o)q} = Ho_m(h^q, \mu^q) So_m(h^q, \theta^q)$ — четные и нечетные волновые функции эллиптического цилиндра, $He_m = Ie_m + iNe_m$, $Ho_m =$

$=I_0m + iN_0m, J_e m, J_0m$ — четные и нечетные радиальные функции Матье — Бесселя, $N_e m, N_0m$ — четные и нечетные радиальные функции Матье — Неймана, $S_e m, S_0m$ — четные и нечетные угловые функции Матье [5]. Временной множитель $e^{-i\omega t}$ опущен. Потенциал скорости суммарного поля, создаваемого системой излучателей, определим в виде

$$(3) \quad \Phi = \sum_{q=1}^M \Phi^q.$$

Для построения приближенного решения усечем ряды (2) при максимальном m , равном наперед заданному числу N . Тогда суммарный потенциал (3) можно написать в виде:

$$(4) \quad \Phi^{(N)} = \frac{1}{k} \sum_{q=1}^M \sum_{m=0}^N (A_m^q \Psi_m^{(e)q} + B_m^q \Psi_m^{(o)q}).$$

Заметим, что коэффициенты A_m^q, B_m^q ряда (4) отличаются от соответственных коэффициентов ряда (2).

Для отыскания неизвестных коэффициентов A_m^q, B_m^q применим интегральный метод наименьших квадратов [4] к системе многих тел. С этой целью составим систему $q=1, 2, \dots, M$ функционалов, выражающих квадратичное отклонение приближенного решения (4) от граничных условий (1) на каждом излучателе. Заметим, что для удовлетворения граничным условиям на поверхности излучателя с номером q волновые функции $\Psi_m^{(e)p}$ и $\Psi_m^{(o)p}$ при $p \neq q$ необходимо выразить через волновые функции излучателя с номером q , используя теоремы сложения для эллиптических волновых функций [1].

Следуя методу, описанному в работе [6], и положив для конкретности $v^q(\theta, \mu) \equiv 0$ для всех $q=1, 2, \dots, M$, что соответствует акустически мягким границам S_u^q , мы придем к системе линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_m^p и B_m^p

$$(5) \quad \sum_{p=1}^M \left[\sum_{m=0}^N A_m^p X_{nm}^{pq} + \sum_{m=1}^N B_m^p Y_{nm}^{pq} \right] = -F_n^{(e)q}, \quad n=0, 1, \dots, N,$$

$$\sum_{p=1}^M \left[\sum_{m=0}^N A_m^p Z_{nm}^{pq} + \sum_{m=1}^N B_m^p W_{nm}^{pq} \right] = F_n^{(o)q},$$

$$n=1, 2, \dots, N, \quad q=1, 2, \dots, M.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$X_{nm}^{pq} = \begin{cases} \gamma_{nm} & \text{при } p=q \\ \alpha_{nm}^{(e)} & \text{при } p \neq q \end{cases}, \quad Y_{nm}^{pq} = \begin{cases} \nu_{nm} & \text{при } p=q \\ \beta_{nm}^{(e)} & \text{при } p \neq q \end{cases}$$

$$Z_{nm}^{pq} = \begin{cases} \varkappa_{nm} & \text{при } p=q \\ \alpha_{nm}^{(o)} & \text{при } p \neq q \end{cases}, \quad W_{nm}^{pq} = \begin{cases} \varepsilon_{nm} & \text{при } p=q \\ \beta_{nm}^{(o)} & \text{при } p \neq q \end{cases},$$

$$F_n^{(e)q} = \frac{1}{h^q} \int_{\tau_0^q + \tau^q}^{2\pi + \tau_0^q - \tau^q} v^q(\theta, \mu) (\text{ch}^2 \mu_0^p - \cos^2 \theta)^{1/2} \frac{\partial \bar{\Psi}_n^{(e)q}}{\partial \mu} d\theta,$$

$$F_n^{(o)q} = \frac{1}{h^q} \int_{\tau_0^q + \tau^q}^{2\pi + \tau_0^q - \tau^q} v^q(\theta, \mu) (\text{ch}^2 \mu_0^2 - \cos^2 \theta)^{1/2} \frac{\partial \bar{\Psi}_n^{(o)q}}{\partial \mu} d\theta,$$

где τ_0^q — координата биссектрисы угла $2\tau^q$, охватывающего поверхность S_z^q . Выражения для γ_{nm} , ν_{nm} , κ_{nm} , ε_{nm} приведены в работе [6], выражения для остальных коэффициентов имеют вид:

$$\alpha_{nm}^{(e)} = \sum_{l=0}^N [Q_{ml}^{(1),(2)}(p, q) \delta_{nl}^{(e)} + R_{ml}^{(1),(2)}(p, q) \delta_{n,l}^{(o)}],$$

$$\alpha_{nm}^{(o)} = \sum_{l=0}^N [Q_{ml}^{(1),(2)}(p, q) \sigma_{nl}^{(e)} + R_{ml}^{(1),(2)}(p, q) \sigma_{nl}^{(o)}],$$

$$\beta_{nm}^{(e)} = \sum_{l=0}^N [\tilde{Q}_{ml}^{(1),(2)}(p, q) \delta_{nl}^{(e)} + \tilde{R}_{ml}^{(1),(2)}(p, q) \delta_{nl}^{(o)}],$$

$$\beta_{nm}^{(o)} = \sum_{l=0}^N [\tilde{Q}_{ml}^{(1),(2)}(p, q) \sigma_{nl}^{(e)} + \tilde{R}_{ml}^{(1),(2)}(p, q) \sigma_{nl}^{(o)}],$$

$$\delta_{nm}^{(l)} = \int_{\tau_0^q - \tau^q}^{\tau_0^q + \tau^q} L_m^{(l)} \Psi_n^{(e)} d\theta + \frac{1}{(h^q)^2} \int_{\tau_0^q + \tau^q}^{2\pi + \tau_0^q - \tau^q} \frac{\partial L_m^{(e)}}{\partial \mu} \frac{\partial \bar{\Psi}_n^{(e)}}{\partial \mu} d\theta,$$

$$\delta_{nm}^{(e)} = \int_{\tau_0^q - \tau^q}^{\tau_0^q + \tau^q} L_m^{(0)} \bar{\Psi}_n^{(e)} d\theta + \frac{1}{(h^q)^2} \int_{\tau_0^q + \tau^q}^{2\pi + \tau_0^q - \tau^q} \frac{\partial L_m^{(0)}}{\partial \mu} \frac{\partial \bar{\Psi}_n^{(e)}}{\partial \mu} d\theta,$$

$$\sigma_{nm}^{(e)} = \int_{\tau_0^q - \tau^q}^{\tau_0^q + \tau^q} L_m^{(e)} \bar{\Psi}_n^{(0)} d\theta + \frac{1}{(h^q)^2} \int_{\tau_0^q + \tau^q}^{2\pi + \tau_0^q - \tau^q} \frac{\partial L_m^{(e)}}{\partial \mu} \frac{\partial \bar{\Psi}_n^{(0)}}{\partial \mu} d\theta,$$

$$\sigma_{nm}^{(0)} = \int_{\tau_0^q - \tau^q}^{\tau_0^q + \tau^q} L_m^{(0)} \bar{\Psi}_n^{(0)} d\theta + \frac{1}{(h^q)^2} \int_{\tau_0^q + \tau^q}^{2\pi + \tau_0^q - \tau^q} \frac{\partial L_m^{(0)}}{\partial \mu} \frac{\partial \bar{\Psi}_n^{(0)}}{\partial \mu} d\theta,$$

$$L_n^{(e)q} = \frac{J_e(h^q, \mu^q)}{M e_n(h^q)} S e_n(h^q, \theta^q),$$

$$L_n^{(o)q} = \frac{J_o(h^q, \mu^q)}{M o_n(h^q)} S o_n(h^q, \theta^q).$$

Здесь $Q_{mn}^{(1),(2)}$, $R_{mn}^{(1),(2)}$, $\tilde{Q}_{mn}^{(1),(2)}$ и $\tilde{R}_{mn}^{(1),(2)}$ соответствуют аналогичным функциям работы ([1], стр. 167), умноженным на πi^{m-n} ; $M e_n$, $M o_n$ — нормы угловых функций Матье [5].

Среднеквадратическую ошибку приближения граничных условий (1) в этом случае можно определить аналогично тому, как это сделано в работе [6].

Угловую зависимость акустического поля системы излучателей в волновой зоне получим из выражения (4), используя асимптотические представления радиальных функций Матье при $\mu \rightarrow \infty$ [5]

$$(6) \quad \Phi_{(N)}(\varphi) = \frac{1}{k} \sum_{q=1}^M e^{-i\varphi_q} \sum_{m=0}^N e^{-i\beta_m} [A_m^q S e_m(\theta^q) + B_m^q S o_m(\theta^q)],$$

где $\varphi_q = k R_q \cos(\varphi^{(q)} - \varphi)$, $\beta_m = \frac{\pi}{2}(m + 1/2)$, $\theta^q = \gamma^q + \varphi$, γ^q — угол между положительными направлениями осей $o^q x^q$ и ox .

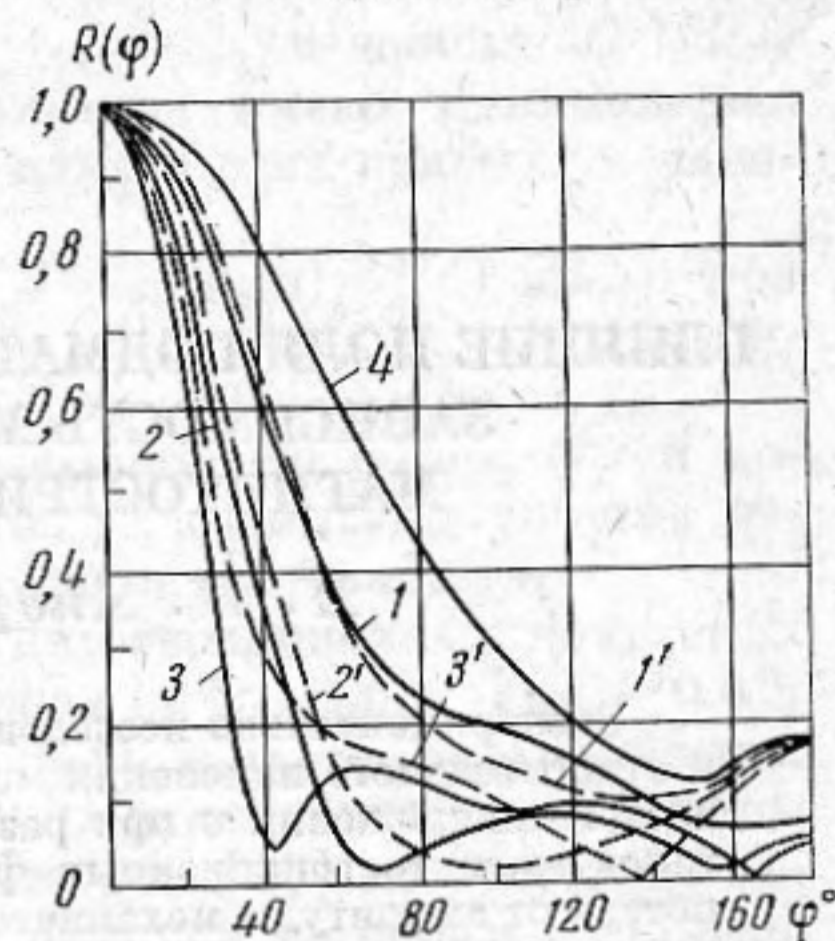
По формулам (5) и (6) были произведены расчеты углового распределения амплитуды акустического поля для системы двух, трех и четырех идентичных излучателей, расположенных симметрично относительно оси ou (фиг. 1) так, что большие оси эллипсов их поперечного сечения являются касательными к окружности с $kR=9,5$, а угловое расстояние между излучателями составляет $\Phi_0 = -2\pi/27$. Параметры излучателей h^q , μ_0^q , τ_0^q и τ^q соответственно равны 1; 0,43; $-\pi/2$ и $\pi/2$. Расчетные нормированные амплитудные диаграммы направленности $R(\varphi) = |\Phi^{(N)}(\varphi)| / |\Phi^{(N)}(\varphi)|_{\max}$ систем двух, трех и четырех излучателей приведены на фиг. 2.

Как и следовало ожидать, система излучателей, у которых часть боковой поверхности акустически мягкая, обладает ярко выраженной однонаправленностью, причем уровень бокового излучения системы не превышает 20% основного лепестка. Для сравнения на фиг. 2 приведены также диаграммы направленности аналогичных систем, рассчитанные по диаграмме направленности одиночного излучателя (кривая 4) без учета взаимодействия между излучателями. Сравнивая соответственные кривые фиг. 2, можно заметить, что взаимодействие излучателей по полю в рассмотренном случае приводит к обострению главного лепестка диаграммы направленности системы и снижает уровень тыльного излучения (область углов $\varphi=140-180^\circ$), увеличивая при этом уровень первых боковых лепестков диаграммы направленности.

Авторы благодарят В. И. Маяцкого за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Иванов. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск, «Наука и техника», 1968.
2. Е. Л. Шендеров. Волновые задачи гидроакустики. Л., «Судостроение», 1972.
3. А. Г. Лейко, В. И. Маяцкий. Поле рассеяния для системы акустически мягких эллиптических цилиндров. Акуст. ж., 1973, 16, 3, 378—385.
4. М. И. Карновский, В. Г. Лозовик. Акустическое поле бесконечного цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности. Акуст. ж., 1964, 10, 3, 313—317.
5. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы математической физики, т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. В. А. Андебур, С. М. Силецкий. Рассеяние звука эллиптическим цилиндром со смешанными граничными условиями. Акуст. ж., 1973, 19, 6, 897—901.



Фиг. 2. Диаграммы направленности $R(\varphi)$ углового распределения поля системы излучателей из двух (кривые 1 и 1'), трех (кривые 2 и 2') и четырех (кривые 3 и 3') излучателей: сплошные кривые с учетом взаимодействия излучателей, штриховые — без учета взаимодействия. Кривая 4 соответствует диаграмме направленности одиночного излучателя

Поступила
19 января 1976 г.