

УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ АКСИАЛЬНО-СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ
КРУГОВЫМ ПЬЕЗОПОЛУПРОВОДНИКОВЫМ ЦИЛИНДРОМ

Л. М. Лямшев, Н. С. Шевяков

Дано решение задачи о рассеянии плоской сдвиговой волны круговым пьезополупроводниковым цилиндром, принадлежащим, как и внешняя среда, к пьезоэлектрикам гексагонального класса C_{6v} (6 *mm*). Установлено, что при определенных значениях сверхзвукового дрейфа возможно усиление волн, рассеянных цилиндром. Обсуждаются типы волн в цилиндре, при раскачке которых дрейфующими носителями заряда происходит усиление рассеянных волн.

До настоящего времени в акустике изучалось рассеяние волн деформации на включениях из твердого непьезоэлектрического материала. Лишь недавно, в связи с потребностью более точного описания рабочего процесса пьезопреобразователей в твердой среде, появились работы [1, 2], где при решении граничных задач учитывалось наличие пьезосвойств. Интересное следствие учета не только пьезоэлектрических, но и полупроводниковых свойств рассеивающей среды — усиление рассеянных волн при сверхзвуковом дрейфе носителей заряда в кристалле вдоль границы, обсуждалось в работах [3, 4] для частного случая рассеяния (отражения) ультразвуковой волны плоской границей кристалла. Можно ожидать, что аналогичное явление будет иметь место и в более общем случае рассеяния ультразвуковых волн пьезополупроводниковым включением с искривленной границей.

Покажем это на примере рассеяния плоской аксиально-сдвиговой волны круговым пьезополупроводниковым цилиндром радиуса R . При этом в отличие от работы [2] предположим, что среда вне цилиндра ($r > R$) является пьезодиэлектриком, в пределах цилиндра ($r < R$) имеет место азимутальный дрейф носителей заряда, а для описания электрических полей достаточно ограничиться квазистатическим приближением [5]. Вопросы технической реализации азимутального дрейфа носителей мы здесь рассматривать не будем.

Исходя из соображений простоты решения допустим, что материалы цилиндра и внешней среды, параметры и поля которых условимся различать индексами $\nu = 1, 2$ соответственно, принадлежат к классу C_{6v} гексагональных пьезоэлектриков и ориентированы в цилиндрической системе координат (r, θ, z) таким образом, что оси C_6 кристаллов совпадают и параллельны оси z цилиндра, вдоль которой происходят смещения частиц в падающей волне (см. фиг. 1). В этом случае, ограничиваясь рассмотрением нормального падения волны на цилиндр, приходим к выводу, что во всех волнах единственной отличной от нуля составляющей смещения является аксиальная составляющая $u_z = u_z(r, \theta) e^{-i\omega t}$ *. Отличными от нуля механическими напряжениями T_{in} и компонентами вектора индукции D_j являются при этом (см. [5, 6])

* В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

$$(1) \quad T_{rz}^{(v)} = \lambda_v \frac{\partial u_z^{(v)}}{\partial r} + \beta_v \frac{\partial \psi_v}{\partial r}, \quad T_{r\theta}^{(v)} = \lambda_v \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(v)}}{\partial \theta} + \beta_v \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta},$$

$$(2) \quad D_r^{(v)} = -\varepsilon_v \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + 4\pi\beta_v \frac{\partial u_z^{(v)}}{\partial r}, \quad D_\theta^{(v)} = -\varepsilon_v \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} + 4\pi\beta_v \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(v)}}{\partial \theta},$$

где $\lambda_v = \lambda_{xxzz}$, $\beta_v = \beta_{x,xz}$, $\varepsilon_v = \varepsilon_{xx}$ — соответственно модуль упругости, пьезоэлектрический и диэлектрический модули, ψ_v — потенциал электрического поля.

Проблема согласования полей деформации и электрических полей с учетом дрейфа в пьезополупроводнике решается наиболее просто, если дрейфовое поле \mathcal{E}_0 в цилиндре ($r < R$, $v=1$) является неоднородным и имеет составляющие $\mathcal{E}_{0z} = \mathcal{E}_{0r} = 0$, $\mathcal{E}_{0\theta} = -\alpha r$, где α — постоянная, определяемая способом создания дрейфа. Поэтому, используя уравнения движения твердых сред [6], линеаризованные стандартным образом уравнения проводимости материала цилиндра (см., например, [7]) и уравнение $\text{div } \mathbf{D}^{(v)} = (v-2)4\pi eN$, где e — элементарный заряд, N — концентрация носителей заряда в пьезополупроводнике, получим с учетом (1), (2) следующие уравнения для определения полей деформации и электрических полей

$$(3) \quad \nabla^2 u_z^{(v)} + k_v^2 u_z^{(v)} = 0,$$

$$(4) \quad \nabla^2 \left[\frac{\varepsilon_v}{4\pi} \hat{L}_\omega + \sigma_0 (v-2) \right] \psi_v = \hat{L}_\omega \beta_v \nabla^2 u_z^{(v)},$$

где $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ — оператор Лапласа, k_v — волновое число

для сдвиговых волн, $\hat{L}_\omega = f\mu(\mathcal{E}_0 \nabla) + fD\nabla^2 + i\omega$ — линейно-дифференциальный оператор, f — фактор ловушек, D — коэффициент диффузии, σ_0 — проводимость пьезополупроводника и μ — подвижность носителей заряда.

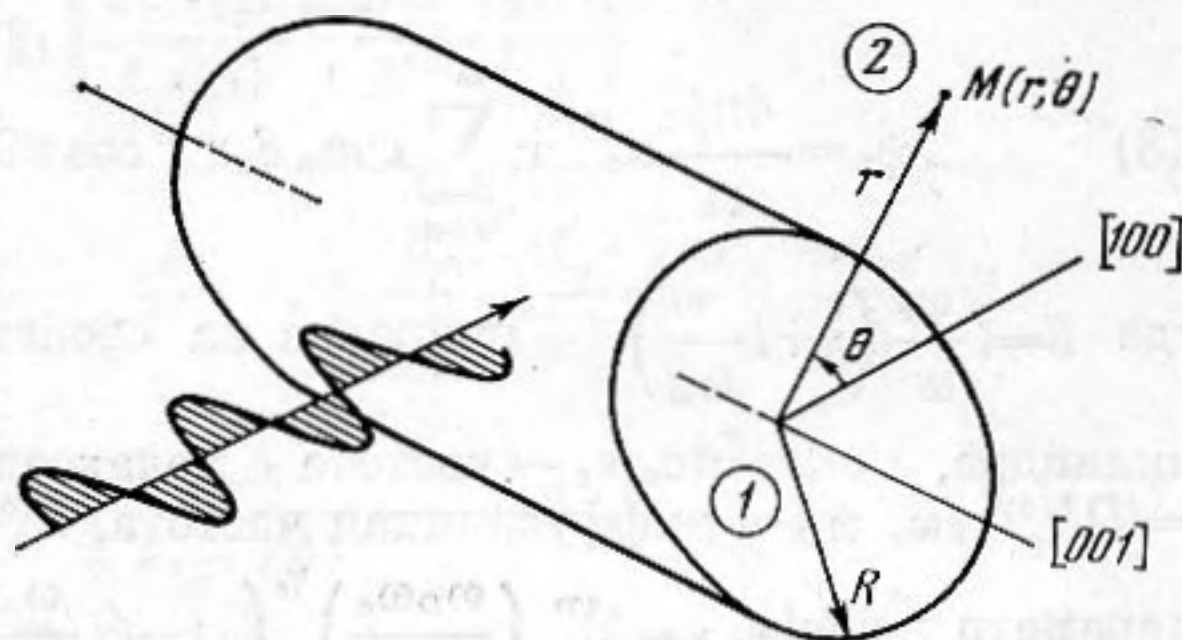
В соответствии с формулой (3) и принятой картиной падения волны на цилиндр (фиг. 1), результирующее смещение частиц $u_z^{(v)}$ имеет вид

$$(5) \quad u_z^{(1)} = U \sum_{n=0}^{\infty} i^n m_n b_n J_n(k_1 r) \cos n\theta, \quad r < R,$$

$$(6) \quad u_z^{(2)} = U \sum_{n=0}^{\infty} i^n m_n [J_n(k_2 r) + a_n H_n^{(1)}(k_2 r)] \cos n\theta \quad r > R.$$

где U — амплитуда смещения частиц в падающей волне:

$$u_{z_i}^{(2)} = U \exp(ik_2 \cos \theta r) = U \sum_{n=0}^{\infty} i^n m_n J_n(k_2 r) \cos n\theta, \quad J_n(k_v r) -$$



Фиг. 1. Картина падения плоской аксиально-сдвиговой волны на пьезополупроводниковый цилиндр

функция Бесселя, $n=0, 1, 2, \dots$, $H_n^{(1)}(k_2 r)$ — функция Ханкеля первого рода, $m = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n \neq 0 \end{cases}$, а b_n и a_n — коэффициенты, подлежащие определению.

Выражения (5), (6) — решения соответственных уравнений (3), удовлетворяют требованию погашаемости на бесконечности [8] и ограниченности решения при $r < R$.

Потенциалы электрических полей ψ являются решениями уравнений (4) и в соответствии с требованием ограниченности при $r < R$, $r > R$ могут быть написаны следующим образом:

$$(7) \quad \psi_1 = \frac{4\pi\beta_1}{\epsilon_1(1+\delta)} u_z^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} i^n m_n [c_n r^n + g_n I_n(\kappa r)] \cos n\theta, \quad r < R,$$

$$(8) \quad \psi_2 = \frac{4\pi\beta_2}{\epsilon_2} u_z^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} i^n m_n d_n r^{-n} \cos n\theta, \quad r > R,$$

где $\delta = i \frac{\omega_c}{\omega} \left(\gamma + i \frac{\omega}{\omega_D} \right)^{-1}$ — поправка на свойства проводимости материала

цилиндра, $\omega_c = 4\pi\sigma_0/\epsilon_1$ — частота релаксации проводимости, $\omega/\omega_D = = fDk_1^{(0)2}/\omega$, ω_D — диффузионная частота, $k_1^{(0)} = k_1|_{\delta=0}$, $\gamma = 1 - f\mu\alpha n/k_1^{(0)}$ — параметр дрейфа, $\kappa = k_1^{(0)} \left(\frac{\omega_D \omega_c}{\omega^2} \right)^{1/2} \left(1 - i\gamma \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/2}$, $I_n(\kappa r)$ — модифицированная

функция Бесселя. В выражениях (7), (8) первые слагаемые представляют потенциалы электрических полей деформации, а члены, объединенные в суммы, являются потенциалами неоднородных волн электрического поля, которые возникают у границы вследствие пьезосвойств.

Для определения коэффициентов a_n , b_n , c_n , d_n и g_n воспользуемся граничными условиями

$$(9) \quad \left(\lambda_1 \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} + \beta_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \left(\lambda_2 \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial r} + \beta_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=R},$$

$$u_z^{(1)} \Big|_{r=R} = u_z^{(2)} \Big|_{r=R},$$

$$\psi_1 \Big|_{r=R} = \psi_2 \Big|_{r=R}, \quad \left(4\pi\beta_1 \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} - \epsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} =$$

$$= \left(4\pi\beta_2 \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial r} - \epsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=R},$$

выражающими соответственно непрерывность сдвигового напряжения T_{rz} , деформационного смещения u_z , электрического потенциала ψ и радиальной составляющей вектора индукции D_r . Кроме того, используем условие равенства нулю нормальной составляющей вектора плотности тока на границе пьезополупроводникового цилиндра и внешней среды

$$(10) \quad \frac{4\pi\sigma_0}{\epsilon_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = fD \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{4\pi\beta_1}{\epsilon_1} k_1^2 u_z^{(1)} + \nabla^2 \psi_1 \right] \Big|_{r=R},$$

подразумевая, что процессы рекомбинации и захвата носителей на поверхностные уровни отсутствуют. Это оправдывается по меньшей мере в тех случаях, когда скорость поверхностной рекомбинации носителей мала, а длина ультразвуковой волны λ велика по сравнению с дебаевским радиусом r_D .

Подставляя выражения (5) – (8) в граничные условия (9), (10), получим после преобразований неоднородную систему алгебраических уравнений, решая которую, находим

$$a_n = \frac{4\pi\beta_{\text{эф}}^2}{\varepsilon_{\text{эф}}\Omega} Q \frac{J_n(\xi_2)}{H_n^{(1)'}(\xi_2)} - \left[\lambda_1^*(1+\mathcal{K}_1^2\delta)\xi_1 \frac{J_n'(\xi_1)}{J_n(\xi_1)} \frac{J_n(\xi_2)}{H_n^{(1)'}(\xi_2)} - \lambda_2^*\xi_2 \frac{J_n'(\xi_2)}{H_n^{(1)'}(\xi_2)} \right]$$

$$(11) \quad b_n = \frac{J_n(\xi_2)}{J_n(\xi_1)} \times \left[\lambda_1^*(1+\mathcal{K}_1^2\delta)\xi_1 \frac{J_n'(\xi_1)}{J_n(\xi_1)} - \lambda_2^*\xi_2 \frac{H_n^{(1)'}(\xi_2)}{H_n^{(1)'}(\xi_2)} \right] - n \frac{4\pi\beta_{\text{эф}}^2}{\varepsilon_{\text{эф}}\Omega} Q$$

$$\times \frac{\lambda_2^*\xi_2 \left[\frac{J_n'(\xi_2)}{J_n(\xi_2)} - \frac{H_n^{(1)'}(\xi_2)}{H_n^{(1)'}(\xi_2)} \right]}{\left[\lambda_1^*(1+\mathcal{K}_1^2\delta)\xi_1 \frac{J_n'(\xi_1)}{J_n(\xi_1)} - \lambda_2^*\xi_2 \frac{H_n^{(1)'}(\xi_2)}{H_n^{(1)'}(\xi_2)} \right] - n \frac{4\pi\beta_{\text{эф}}^2}{\varepsilon_{\text{эф}}\Omega} Q}$$

$$c_n = -\frac{U}{\Omega} J_n(\xi_1) R^{-n} 4\pi \left[\frac{\beta_1 \Lambda}{\varepsilon_1(1+\delta)} - \frac{\beta_2}{\varepsilon_2} \right] b_n,$$

$$d_n = c_n R^{2n} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\omega_c/\omega - i\gamma}{i\gamma},$$

$$g_n = U \frac{J_n(\xi_1)}{I_n'(\xi)} \zeta 4\pi \left[\frac{\beta_1}{\varepsilon_1(1+\delta)} \left\{ \delta \xi_1 \frac{J_n'(\xi_1)}{J_n(\xi_1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + n \frac{\omega_c/\omega}{i\gamma} \frac{\Lambda}{\Omega} \right\} - \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\beta_2 n}{i\gamma \varepsilon_2 \Omega} \right] b_n.$$

В формулах (11) обозначено: $Q = (1+\delta) + i \frac{\omega}{\omega_D} \delta$, $K_v^2 = \frac{4\pi\beta_v^2}{\varepsilon_v \lambda_v}$ – квадрат коэффициента электромеханической связи $\varepsilon_v = k_v R$,

$$\mathcal{K}_v^2 = K_v^2 (1+\delta)^{\nu-2} [1 + K_v^2 (1+\delta)^{\nu-2}]^{-1};$$

$$\zeta = \kappa R; \quad \lambda_v^* = \lambda_v [1 + K_v^2 (1+\delta)^{\nu-2}],$$

$$\Omega = 1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left[(1+\delta) + i \frac{\omega}{\omega_D} \frac{\delta}{\gamma} \right] + \frac{n}{\zeta} \frac{I_n(\xi)}{I_n'(\xi)} \frac{\delta}{1 - \delta \frac{\omega^2}{\omega_D \omega_c}}$$

$$I_n'(\xi) = \left. \frac{dI_n(x)}{dx} \right|_{x=\xi}$$

$$\frac{\beta_{\text{эф}}^2}{\varepsilon_{\text{эф}}} = \left(\beta_1 - \frac{\beta_1}{\varepsilon_2} \beta_2 \right) \left[\frac{\beta_1 \Lambda}{\varepsilon_1(1+\delta)} - \frac{\beta_2}{\varepsilon_2} \right]$$

$$\Lambda = 1 + \xi_1 \frac{J_n'(\xi_1)}{J_n(\xi_1)} \delta \frac{1}{\zeta} \frac{I_n(\xi)}{I_n'(\xi)}$$

$$J_n'(\xi_v) = \left. \frac{dJ_n(x)}{dx} \right|_{x=\xi_v} \quad H_n^{(1)'}(\xi_2) = \left. \frac{dH_n^{(1)}(x)}{dx} \right|_{x=\xi_2}$$

Прежде чем приступить к обсуждению проблемы усиления волн, рассеянных цилиндром, отметим, что, согласно результатам работ [3, 4, 9], следует различать два вида усиления волн при отражении (рассеянии), а именно: усиление волн, отраженных (рассеянных) от пьезополупроводникового кристалла в условиях резонанса совпадения, так называемое резонансное усиление, и усиление волн, отраженных (рассеянных) границей пьезодиэлектрика, отделенного тонким зазором от полупроводника с дрейфующими носителями заряда (граница со структурой усилителя разделенных сред). Второй вид усиления в отличие от первого уместно назвать псевдорезонансным усилением, так как максимум усиления связан не с проявлением границей акустических резонансных свойств (граница со структурой усилителя разделенных сред не допускает резонанса совпадения), а вызван наиболее эффективным проникновением пьезополя со стороны кристалла в полупроводник. Ограничимся ниже анализом случая резонансного усиления волн.

В условиях резонанса совпадения скорость «следа» падающей извне на пьезополупроводниковый кристалл ультразвуковой волны вдоль границы совпадает с фазовой скоростью так называемых нормальных волн в кристалле, а сам факт резонансного усиления выражается в неограниченном увеличении амплитуды отраженной волны при определенных значениях сверхзвукового дрейфа носителей заряда в пьезополупроводнике. В связи с тем, что при этом пьезополупроводник совершает колебания, близкие по своей структуре к собственным колебаниям ненагруженного внешней средой, непроводящего пьезоэлектрика, можно заключить, что усиление отраженной волны является следствием акустоэлектрической неустойчивости границы, развивающейся под влиянием сверхзвукового дрейфа на резонансных формах колебания кристалла.

Неограниченное увеличение амплитуд волн не может иметь места в действительности (см. [10, 11]) ввиду наличия нелинейных эффектов и прежде всего эффектов нелинейного акустоэлектрического взаимодействия. Эти эффекты в работах [3, 4] не учитывались. Несмотря на это, линейный подход к решению проблемы отражения (рассеяния) волн деформации пьезополупроводниковыми кристаллами оправдывает себя (ср. теоретическую работу [3] и экспериментальные результаты работ [10, 11]) в тех случаях, когда необходимо выяснить условия наиболее эффективного резонансного усиления, а также установить структуру и тип волн, на которых происходит усиление.

Следуя развитому в работах [3, 4] линейному подходу, для определения условий возникновения резонансного усиления волн, рассеянных цилиндром, приравняем нулю знаменатель выражений (11), т. е. потребуем, чтобы при некотором $n \neq 0$ выполнялось равенство

$$(12) \quad \left[\lambda_1 \cdot (1 + \mathcal{K}_1^2 \delta) \xi_1 \frac{J_n'(\xi_1)}{J_n(\xi_1)} - \lambda_2 \cdot \xi_2 \frac{H_n^{(1)'}(\xi_2)}{H_n^{(1)}(\xi_2)} \right] - n \frac{4\pi\beta_{\text{эф}}^2}{\epsilon_{\text{эф}}\Omega} Q = 0.$$

Уравнение (12) позволяет определить спектр собственных частот и затухание собственных колебаний пьезополупроводникового цилиндра, жестко заделанного в пьезодиэлектрическую среду. Это уравнение можно также рассматривать как дисперсионное уравнение для сдвиговых волн в цилиндре, распространяющихся вдоль цилиндрической границы пьезополупроводникового кристалла при взаимодействии с внешней средой в направлении положительного отсчета азимутального угла θ ($n \geq 0$). В общем случае определение корней уравнения (12) сопряжено со значительными математическими трудностями. Поэтому ниже мы ограничимся анализом уравнения (12) применительно к случаю цилиндра больших волновых размеров $|\xi_1|, \xi_2 \gg 1$ в области достаточно низких ультразвуковых частот $\omega^2 \ll \omega_D \omega_c$, полагая, что внешняя среда не является пьезоэлектриком ($\beta_2 = 0$,

$\lambda_2^* = \lambda_2$), а материал цилиндра характеризуется слабой электромеханической связью ($K_1^2 \ll 1$). Так как при этом $|\zeta| \gg |\xi_1|, \xi_2$, то на основании асимптотических оценок для модифицированной функции Бесселя [12], приходим к выводу, что в интересующей области чисел $n \propto |\xi_1|, \xi_2 : \Lambda \simeq 1$, $\Omega \simeq 1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(1+\delta)$, а $Q \simeq 1+\delta$. В результате уравнение (12) примет вид

$$(13) \quad \left[\lambda_1^* (1 + \mathcal{K}_1^2 \delta) \xi_1 \frac{J_n'(\xi_1)}{J_n(\xi_1)} - \lambda_2 \xi_2 \frac{H_n^{(1)'}(\xi_2)}{H_n^{(1)}(\xi_2)} \right] - \frac{4\pi\beta_1^2}{\varepsilon_1} \left[1 + \frac{\varepsilon_1(1+\delta)}{\varepsilon_2} \right]^{-1} = 0.$$

Здесь, основываясь на асимптотическом представлении функций $J_n(\xi_1)$ и $H_n^{(1)}(\xi_2)$ полусходящимися рядами Дебая [12], можно считать, что при $n > |\xi_1|, \xi_2$

$$(14) \quad \frac{J_n'(\xi_1)}{J_n(\xi_1)} \simeq \left(\frac{n^2}{\xi_1^2} - 1 \right)^{1/2} - \frac{1}{2\xi_1}; \quad \frac{H_n^{(1)'}(\xi_2)}{H_n^{(1)}(\xi_2)} \simeq - \left(\frac{n^2}{\xi_2^2} - 1 \right)^{1/2} - \frac{1}{2\xi_2},$$

а при $n < |\xi_1|, \xi_2$

$$(15) \quad \frac{J_n'(\xi_1)}{J_n(\xi_1)} \simeq i \left(1 - \frac{n^2}{\xi_1^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{2\xi_1};$$

$$\frac{H_n^{(1)'}(\xi_2)}{H_n^{(1)}(\xi_2)} \simeq -i \left(1 - \frac{n^2}{\xi_2^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{2\xi_2}.$$

Анализ показывает, что при $n > 0$ удовлетворить уравнению (13) можно, если $|\xi_1| < n < \xi_2$ или $n < |\xi_1|, \xi_2$. Таким образом, резонансное усиление волн возможно в двух случаях: 1) $|k_1| \simeq k_1^{(0)} < k < k_2$ и 2) $k < k_2, |k_1| \simeq k_1^{(0)}$, где $k = n/R$ — волновое число сдвиговых волн, распространяющихся в пьезополупроводниковом цилиндре. Выразим в формулах (14) и (15) n через k , а затем подставим их в формулу (13). После этого, приравняв нулю в отдельности вещественную и мнимую части левой стороны уравнения (13) и пренебрегая малыми высшего порядка, получим в каждом из случаев следующие системы уравнений:

$$(16) \quad \sqrt{k^2 - k_1^{(0)2}} + \frac{1}{2R} \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} (1 + \mathcal{K}_1^2)^{-1} \right] \simeq k K_1^{(0)} \frac{\gamma^2 \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) + \frac{\omega_c \varepsilon_1}{\omega_D \varepsilon_2}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 + \frac{\omega_c^2 \varepsilon_1^2}{\omega^2 \varepsilon_2^2}},$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} (1 + K_1^2)^{-1} \sqrt{k_2^2 - k^2} \simeq -k \mathcal{K}_1^{(0)2} \frac{\gamma \frac{\omega_c \varepsilon_1}{\omega \varepsilon_2}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 + \frac{\omega_c^2 \varepsilon_1^2}{\omega^2 \varepsilon_2^2}}$$

$$k_1^{(0)} < k < k_2$$

$$(17) \quad \sqrt{k_1^{(0)^2 - k^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (1 + K_1^2)^{-1} \sqrt{k_2^2 - k^2}} \simeq$$

$$\simeq -\mathcal{H}_1^{(0)^2} k \frac{\gamma \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2 + \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2} \frac{\omega_c^2}{\omega^2}},$$

$$\frac{1}{2R} \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} (1 + K_1^2)^{-1} - 1 \right] \simeq k \mathcal{H}_1^{(0)^2} \frac{\gamma^2 \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right) + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{\omega_c}{\omega_D}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2 + \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2} \frac{\omega_c^2}{\omega^2}},$$

$$k_1^{(0)}, \quad k_2 > k,$$

где

$$\mathcal{H}_1^{(0)^2} = \mathcal{H}_1^2|_{\delta=0} = \frac{K_1^2}{1 + K_1^2}.$$

Из уравнений (16), (17) следует, как и в случае плоских границ [3, 4], резонансное усиление возможно только при $\gamma < 0$, т. е. в условиях сверхзвукового дрейфа, что вызвано необходимостью скомпенсировать потери на излучение во внешнюю среду в сдвиговых волнах, распространяющихся в цилиндре. Это достигается при $\gamma < 0$ поступлением соответственной части энергии от дрейфового потока носителей в волну деформации; волна поэтому распространяется стационарно, т. е. не затухая и не усиливаясь ($k > 0$, $n > 0$).

Из анализа уравнений (16) напрашивается вывод, что в случае $k_1^{(0)} < k < k_2$ усиление осуществляется на сдвиговых поверхностных волнах, аналогом которых для плоских границ являются волны Гуляева — Блюштейна [13, 14]. Действительно, условие $k > k_1^{(0)}$ отражает характерное для этого типа волн уменьшение фазовой скорости $v = \omega/k$ по сравнению со скоростью распространения сдвиговых волн $c_1 = \omega/k_1^{(0)}$ в материале цилиндра. Кроме того, при $R \rightarrow \infty$, $\lambda_2 = 0$ и в отсутствие проводимости ($\gamma = 1$, $\omega_c/\omega = \omega/\omega_D = 0$) уравнения (16) переходят, как и следовало ожидать на основании сделанного вывода, в дисперсионное уравнение работы [13].

Отметим, что дисперсионная ветвь сдвиговых поверхностных волн номера $n > |\xi_1|$ ($k > k_1^{(0)}$) уже отмечалась в работах [15, 16], где рассматривалось распространение сдвиговых волн вдоль цилиндрической границы пьезоэлектрика класса C_{6v} с вакуумом. Важно подчеркнуть, что указанная дисперсионная ветвь присутствует в спектре общего решения уравнения (13) лишь в том случае, если материал цилиндра обладает пьезосвойствами. Покажем это на примере волн, распространяющихся вдоль свободной границы пьезодиэлектрического цилиндра (проводимость материала не играет существенной роли). Соответствующее дисперсионное уравнение было получено ранее в работах [15, 16] и вытекает как частный случай из уравнения (13), если принять: $\lambda_2 = 0$, $\delta = 0$ ($\xi_1 \rightarrow \xi_1^{(0)}$), т. е.

$$(18) \quad \xi_1^{(0)} \frac{J_n'(\xi_1^{(0)})}{J_n(\xi_1^{(0)})} = n \mathcal{H}_1^{(0)^2} \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{-1}.$$

В области значений $\xi_1^{(0)} < n$ функция $J_n(\xi_1^{(0)})$ изменяется монотонным образом [12], а $J_n'(\xi_1^{(0)})/J_n(\xi_1^{(0)}) > 0$ и удовлетворяет условию

$J_n'(\xi_1^{(0)})/J_n(\xi_1^{(0)})|_{n=\xi_1^{(0)}} < J_n'(\xi_1^{(0)})/J_n(\xi_1^{(0)}) \leq 1$. Поэтому уравнение (18) имеет при $n > \xi_1^{(0)}$ решение, притом единственное, если

$$(19) \quad \mathcal{K}_1^{(0)2} > \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \frac{J_n'(\xi_1^{(0)})}{J_n(\xi_1^{(0)})}.$$

Так как $\xi_1^{(0)} = \frac{\omega}{c_{11}} R$, то условие (19) равносильно условию $\omega > \omega^*$, которое означает, что в случае цилиндра имеется граничная частота ω^* , ниже которой дисперсионная ветвь с $n > \xi_1^{(0)}$ не существует. Так же как при $\xi_1^{(0)*} = \frac{\omega^*}{c_{11}} R < \xi_1^{(0)} < n$, уравнение (18) будет иметь решение и в случае $\omega \rightarrow \omega^*$ ($n, \xi_1^{(0)} \rightarrow \xi_1^{(0)*}$). Поэтому осуществляя в уравнении (18) указанный предельный переход, получим формулу

$$(20) \quad \mathcal{K}_1^{(0)2} \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{-1} = \frac{J_n'(\xi_1^{(0)})}{J_n(\xi_1^{(0)})} \Big|_{\substack{n=\xi_1^{(0)*} \\ \xi_1^{(0)}=\xi_1^{(0)*}},$$

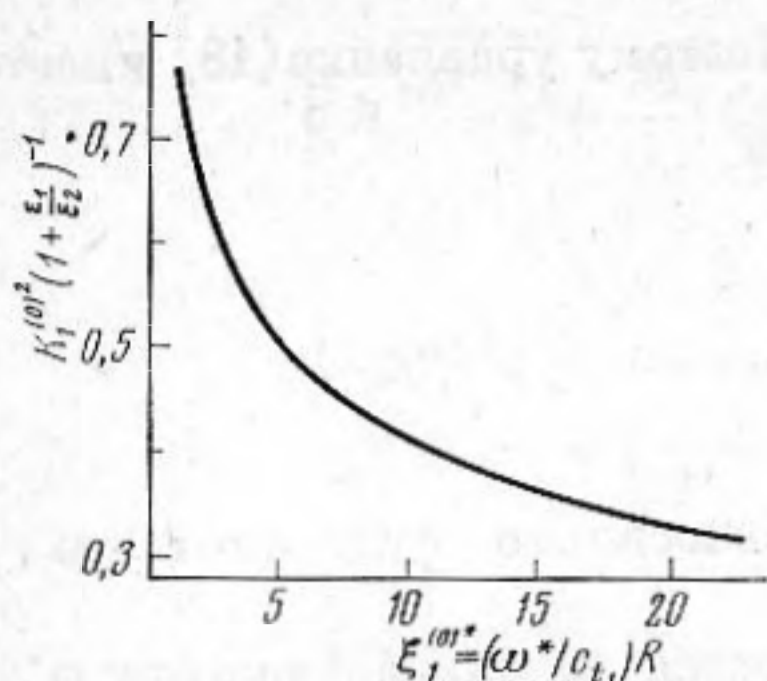
которая отражает однозначную связь между величинами $\mathcal{K}_1^{(0)}$ и ω^* .

На фиг. 2 представлена графически зависимость величины $\mathcal{K}_1^{(0)2} \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{-1}$ от $\xi_1^{(0)*}$, рассчитанная по формуле (20). Пользуясь этой кривой, можно определить, задаваясь величиной $\mathcal{K}_1^{(0)2} \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{-1}$, характерную для каждого пьезоэлектрика граничную частоту ω^* при заданных размерах цилиндра. Видно, в частности, что при $\mathcal{K}_1^{(0)} \rightarrow 0$, $\omega^* \rightarrow \infty$, т. е. волна номера $n > \xi_1^{(0)}$ не может существовать на поверхности непьезоэлектрического цилиндра. Лишь при $\mathcal{K}_1^{(0)} \neq 0$ и $R \rightarrow \infty$ (плоская граница) эта волна существует во всем диапазоне частот $\omega > 0$, так как $\omega^* \rightarrow 0$.

Ограничение по частоте является следствием зависимости проникающей способности волны с $n > \xi_1^{(0)}$ от $\mathcal{K}_1^{(0)}$ и R . При $\mathcal{K}_1^{(0)2} \ll 1$ проникающая способность этой волны очень велика. Поэтому на низких частотах $\omega < \omega^*$, когда длина волны $\lambda = 2\pi / k_1^{(0)} \sim R$, на оси цилиндра $r=0$ возникает сдвиговое смещение $u_z^{(1)} \neq 0$. В результате этого волна номера $n > \xi_1^{(0)}$ не успевает установиться, распадаясь по отдельным ветвям спектра волн дисперсионного уравнения (18) с $n < \xi_1^{(0)}$. С ростом ω , $\lambda/R \rightarrow 0$ и волна приобретает свойство поверхностной локализации ($\omega > \omega^*$).

Подводя итог всему, что касается особенностей проявления резонансного усиления при $k_1^{(0)} < k < k_2$, отметим, что этот вид усиления является прямым обобщением на случай искривленных границ резонансного усиления, описанного в работе [4], и что влияние кривизны границы выражается в ограничении волновых размеров цилиндра $\xi_1^{(0)}$, допускающих резонансное усиление, некоторым минимальным волновым размером $\xi_1^{(0)*} = \omega^* R / c_{11}$.

Рассмотрим теперь случай $k_1^{(0)}, k_2 > k$. Из уравнений системы (17) видно, что волны, возникающие в цилиндре, представляют собой сдви-

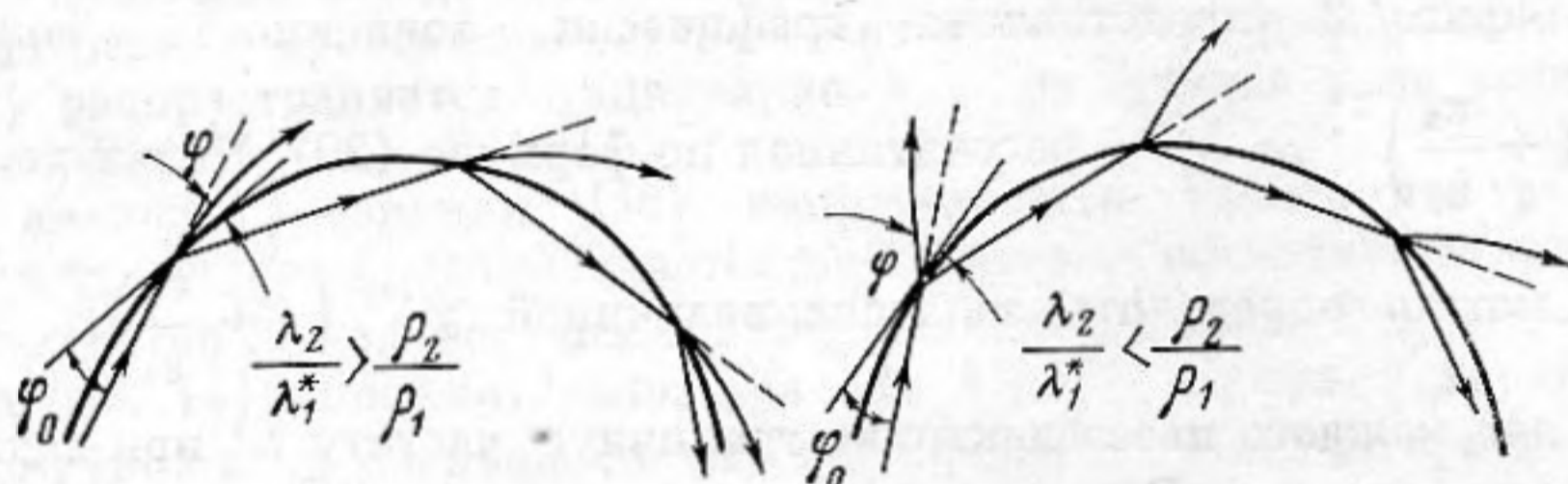


Фиг. 2. Кривая зависимости величины $\mathcal{K}_1^{(0)2} (1 + \epsilon_1/\epsilon_2)^{-1}$ от критического волнового размера цилиндра $\xi_1^{(0)*} = \frac{\omega^*}{c_{t_1}} R$

$$\xi_1^{(0)*} = \frac{\omega^*}{c_{t_1}} R$$

рое вытекает из второго уравнения (17), лучи расходящейся цилиндрической волны входят во внешнюю среду под углом $\varphi < \varphi_0$, при $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} (1 + K_1^2)^{-1} > \rho_2/\rho_1 > 1$ или $\varphi > \varphi_0$, при $1 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (1 + K_1^2) < \rho_2/\rho_1$, где φ_0 — угол скольжения луча поверхностной волны (см. фиг. 3), ρ_v — плотность мате-

говые поверхностные волны, удерживаемые кривизной границы [17, 18]. В этом можно убедиться, если учесть, что условие $k_1^{(0)} > k$ отражает характерное для этого типа волн увеличение фазовой скорости $v = \omega/k$ по сравнению со скоростью сдвиговых волн $c_{t_1} = \omega/k_1^{(0)}$ в материале цилиндра (см. работы [17, 18]). Этим также объясняется то, что при $R \rightarrow \infty$ или $\lambda_2 = \lambda_1 (1 + K_1^2)$, когда разрыв материалов цилиндра и внешней среды по упругим свойствам отсутствует, граница теряет способность удерживать волну и системе уравнений (17) невозможно удовлетворить ни при каком $k > 0$. Необходимо отметить, что в соответствии с требованием большей жесткости внешней среды по сравнению с жесткостью материала цилиндра $\lambda_2 > \lambda_1 (1 + K_1^2)$, кото-



Фиг. 3. Картина преломления лучей на границе цилиндра и внешней среды в условиях резонанса совпадения на поверхностных волнах, удерживаемых кривизной границы

риала. В отличие от изученного выше случая резонансного усиления при $k_1^{(0)} < k < k_2$ рассматриваемый случай усиления возможен только при рассеянии от искривленных границ и до этого не был описан в литературе.

В заключение отметим, что полученные нами результаты соответствуют случаю низких ультразвуковых частот $\omega^2 \ll \omega_D \omega_c$ и находятся в хорошем соответствии с результатами [19], где при построении решения аналогичной задачи ограничение частного диапазона условием $\omega^2 \ll \omega_D \omega_c$ являлось исходным предположением и вместо граничного условия (10) использовалось условие разрыва нормальной составляющей вектора электрической индукции, полученное в работе [20]. Решение, обсуждавшееся в работе [19], соответствует в формулах (11) замене $Q \rightarrow 1 + \delta$, $\Lambda \rightarrow 1$,

$$\Omega \rightarrow 1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (1 + \delta), \quad \lambda_1^* (1 + \mathcal{K}_1^2 \delta) \rightarrow \lambda_1 \left(1 + \frac{K_1^2}{1 + \delta} \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. G. de Jong. Diffraction effects from cylindrical transducers in a piezo-electric medium of hexagonal symmetry (class C_{6v} (6 mm)). Appl. Sci., Res., 1972, 27, 2/3, 169—217.
2. F. C. Moon. Scattering waves by a cylindrical piezoelectric inclusion. J. Acoust. Soc. Amer., 1970, 48, 1, 253—262.

3. Л. М. Лямшев. Об усилении ультразвуковых волн в непроводящей жидкости при взаимодействии с тонким пьезополупроводниковым слоем. Акуст. ж., 1969, 15, 3, 460-462.
4. О. А. Косолапова, Л. М. Лямшев, Н. С. Шевяков. Об отражении сдвиговых волн от плоских границ пьезополупроводниковых кристаллов. Рефераты докладов VIII Всесоюзной акустической конференции. Т. 2, М., 1973, 202.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
7. D. L. White. Amplification of ultrasonic waves in piezoelectric semiconductors. J. Appl. Phys., 1962, 33, 8, 2547-2554.
8. Г. Д. Малюжинец. Математическая формулировка задачи о вынужденных гармонических колебаниях в произвольной области. Докл. АН СССР, 1951, 78, 3, 439-442.
9. Л. М. Лямшев, Н. С. Шевяков. Об одной возможности усиления упругих волн при отражении от свободных границ пьезодиэлектрических кристаллов. Акуст. ж., 1973, 19, 6, 418-420.
10. Л. М. Лямшев, Ю. В. Курилкин. Об усилении и поглощении акустических волн при их отражении от кристалла CdS в воде. Докл. АН СССР, 1970, 194, 5, 1049-1051.
11. Ю. В. Курилкин, Л. М. Лямшев. Отражение ультразвуковых волн кристаллами CdSe в воде. Акуст. ж., 1971, 17, 1, 74-78.
12. Г. Н. Варсон. Теория цилиндрических функций. Ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
13. J. L. Bleustein. A new surface wave in piezoelectric materials. Appl. Phys. Letts., 1968, 13, 8, 412-413.
14. Ю. В. Гуляев. Поверхностные электрорезонансные волны в твердых телах. Письма ЖЭТФ, 1969, 9, 1, 63-65.
15. C. L. Chen. On the electroacoustic waves guided by a cylindrical interface. J. Appl. Phys., 1973, 44, 9, 3841-3847.
16. И. А. Викторов. Поверхностные волны на цилиндрических поверхностях кристаллов. Акуст. ж., 1974, 20, 2, 199-206.
17. Л. М. Бреховских. О поверхностных волнах в твердом теле. Акуст. ж., 1966, 12, 3, 374-376.
18. Л. М. Бреховских. О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы. Акуст. ж., 1967, 13, 4, 541-555.
19. Л. М. Лямшев, Н. С. Шевяков. Рассеяние аксиально-сдвиговой волны на круговом пьезополупроводниковом цилиндре. Акуст. ж., 1975, 21, 1, 140-141.
20. И. А. Викторов. Рэлеевские волны в полупроводниковых пьезоэлектрических кристаллах арсенида галлия. Докл. АН СССР, 1969, 187, 2, 294-297.

Акустический институт
Академии наук СССР
Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарева

Поступила
13 ноября 1975 г.
После исправления
5 июля 1976 г.