

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ДЛИННЫХ ВОЛН НА ПЛАСТИНЕ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ВЫСТУПАЮЩИМ РЕБРОМ ЖЕСТКОСТИ

Б. П. Велицкий

Рассмотрена дифракция плоской звуковой волны на упругой пластине, подкреплённой выступающим ребром жесткости малой высоты. Найдены диаграмма направленности поля, рассеянного в жидкость, и распределение давления на ребре. Проведен анализ возможности описания внешнего подкрепления с помощью локального импеданса пластины.

Вопросы взаимодействия звука с неоднородными конструкциями, например с пластинами, подкреплёнными ребрами жесткости, имеют большое практическое значение. Дифракция звука на пластине с одним ребром и их периодическим набором изучалась в работах [1, 2]. Подробное обсуждение этих и других результатов содержится в монографии [3].

Во всех указанных работах общим упрощением было пренебрежение отражением звука от поверхности ребер, иначе говоря, считалось, что они не вносят возмущения в звуковую волну, а лишь влияют на условия, при которых происходят колебания несущей пластины.

Ниже исследуется влияние отражения от поверхности невысокого (в масштабе длины волны) ребра жесткости на дифракционное поле. Аналогичный вопрос в коротковолновом диапазоне может быть изучен методами работ [4, 5]. Рассмотрение проведено на простейшей модели: недеформируемое ребро жестко скреплено с пластиной. Некоторым основанием для замены реального ребра, способного к изгибу, жестким отрезком является близость диаграмм направленности короткой пластины со свободными краями и жесткого отрезка той же длины [6]. Впрочем, развитый подход, по-видимому, позволит рассчитать отражение и в случае гибкого ребра жесткости.

Пусть плоская волна $P_0 = \exp(ik\alpha_0 x - ik\beta_0 y - i\omega t)$ падает на пластину $\{-\infty < x < \infty, y=0\}$ с выступающим ребром жесткости $\{x=0, 0 < y < h\}$. Здесь $\alpha_0 = \cos \varphi_0$, $\beta_0 = \sin \varphi_0$, k — волновое число. Задача плоская, зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$ опускается. Давление $P(x, y)$ в жидкости удовлетворяет уравнению Гельмгольца при граничных условиях на пластине

$$(1) \quad LP(x, 0) = \left[\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - k_0^4 \right) \frac{\partial}{\partial y} + q^5 \right] P(x, 0) = \\ = B\delta(x) + C\delta'(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

и на жестком ребре

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, y) = 0 \quad (0 < y < h).$$

Здесь k_0 — волновое число изгибных волн в пластине, $q^5 = \rho\omega^2/\mathcal{D}$, ρ — плотность жидкости, \mathcal{D} — цилиндрическая жесткость пластины, $\delta(x)$ — функция

Дирака [7], B и C так называемые гранично-контактные постоянные, определяемые из условия состыковки ребра с пластиной. Предположим, что смещения и повороты пластины в точке скрепления с ребром отсутствуют, т. е.

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial P}{\partial y}(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}(x, 0) = 0.$$

Выделим из полного поля поле Q , отраженное от пластины с жестким точечным закреплением, т. е. то, которое получится при пренебрежении размерами ребра. Это поле может быть найдено на основании работы [1]

$$Q(x, y) = R \exp(ik\kappa_0 x + ik\beta_0 y) - ik\beta_0(1-R) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{L(\lambda)} e^{i\lambda x - \gamma(\lambda)y} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{\lambda k \kappa_0}{I_2} \right], \quad L(\lambda) = (\lambda^4 - k_0^4) \gamma - q^5,$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad R = [(k^4 \kappa_0^4 - k_0^4) ik\beta_0 - q^5] / [(k^4 \kappa_0^4 - k_0^4) ik\beta_0 + q^5].$$

Здесь через R обозначен коэффициент отражения от однородной пластины и введены интегралы

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{L(\lambda)} \gamma(\lambda) \lambda^n.$$

Выбор ветви радикала $\gamma(\lambda)$ и контура интегрирования соответствует принципу предельного поглощения [8].

Введем в рассмотрение поле $w = P - Q$, образующееся в результате рассеяния собственно на ребре. Это поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца при граничном условии (1) на пластине, условии на ребре

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, y) = -ik\kappa_0(e^{-ik\beta_0 y} + \text{Re} e^{ik\beta_0 y}) - \\ - \frac{k^2 \beta_0 \kappa_0}{I_2} (1-R) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{L(\lambda)} \lambda^2 e^{-\gamma(\lambda)y} = g(y) \quad (0 < y < h)$$

и однородных гранично-контактных условиях (2). Ниже мы построим длинноволновую асимптотику диаграммы направленности поля w .

Введем функцию $f(x) = w_y(x, 0)$, описывающую с точностью до постоянного множителя смещения пластины. Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(3) \quad f''''(x) - k_0^4 f(x) + q^5 w(x, 0) = B\delta(x) + C\delta'(x)$$

при условиях

$$(4) \quad f(0) = f'(0) = 0.$$

Поле давлений $w(x, y)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца при граничных условиях

$$(5) \quad w_y(x, 0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty), \\ w_x(0, y) = g(y) \quad (0 < y < h).$$

Задачи (3) и (5) являются взаимосвязанными. Возможность их совместного решения существенно связана с тем, что условия (5) соответствуют жесткой границе. Для задачи дифракции на жесткой границе удастся построить простую длинноволновую асимптотику.

Выделим из поля w поле v ($H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля, звездочка означает свертку [7])

$$v(x, y) = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} ds f(s) H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-s)^2 + y^2}) = -\frac{i}{2} H_0^{(1)} * f.$$

Поле $u = w - v$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца при граничных условиях

$$(6) \quad u_y(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad u_x(0, y) = \\ = g(y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{i\lambda}{\gamma(\lambda)} e^{-\gamma(\lambda)y} \int_{-\infty}^{\infty} ds f(s) e^{-is\lambda} = g_1(y) \quad (0 < y < h).$$

Уравнение (5) примет вид (свертка вычислена при $y=0$)

$$(7) \quad f''''(x) - k_0^4 f(x) - \frac{i}{2} q^5 H_0^{(1)} * f + q^5 u(x, 0) = B\delta(x) + C\delta'(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Можно доказать, что поле $u(x, y)$ является нечетной функцией x . Будем искать его в виде разложения по плоским волнам [8]:

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} d\lambda p(\lambda) \cos \lambda y e^{-\gamma(\lambda)|x|} \operatorname{sgn} x.$$

Неизвестную функцию $p(\lambda)$ следует искать на основании граничных условий (6), которые приводят к парным уравнениям

$$(8) \quad \int_0^{\infty} d\lambda p(\lambda) \gamma(\lambda) \cos \lambda y = -g_1(y) \quad (0 < y < h), \\ \int_0^{\infty} d\lambda p(\lambda) \cos \lambda y = 0 \quad (h < y < \infty).$$

Для их решения в длинноволновом диапазоне положим $\gamma(\lambda) = \lambda + \varepsilon(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 0$). При $\varepsilon(\lambda) \equiv 0$ уравнения (8) можно решить точно, используя результаты работы [9]. Этот же метод применительно к общему случаю $\varepsilon(\lambda) \neq 0$ позволяет преобразовать парные уравнения к уравнению второго рода (J_0 — функция Бесселя)

$$(9) \quad p(\lambda) = -h^2 \int_0^{\infty} d\mu p(\mu) \varepsilon(\mu) \int_0^1 d\xi \xi J_0(\lambda h \xi) J_0(\mu h \xi) - \\ - \frac{h^2}{\pi} \int_0^1 d\xi \xi J_0(\lambda h \xi) \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} g_1(\xi \eta h).$$

Введем функцию $\psi(y) = u(+0, y)$, описывающую распределение давления w на ребре. Применим к уравнению (9) косинус-преобразование. Входящее в выражение (6) для функции $g_1(y)$ преобразование Фурье функции $f(x)$ найдем из интегродифференциального уравнения (7) при граничных условиях (4). В результате получим интегральное уравнение второго рода для давления $\psi(y)$:

$$(10) \quad \psi(y) = \int_0^h ds K(y, s) \psi(s) + \psi_0(y) \quad (0 < y < h),$$

$$\begin{aligned}
K(y, s) = & -\frac{2h^2}{\pi} \int_0^\infty d\mu \varepsilon(\mu) \int_{y/h} d\zeta \zeta J_0(\mu\zeta h) \frac{1}{\sqrt{h^2\zeta^2 - y^2}} \cos \mu s - \\
& -\frac{2h^2 q^5}{\pi^2 I_2} \int_{y/h} d\zeta \zeta \frac{1}{\sqrt{h^2\zeta^2 - y^2}} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\lambda \lambda^2}{L(\lambda)} e^{-\gamma(\lambda)\zeta\eta h} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\mu \mu^2}{L(\mu)} e^{-\gamma(\mu)s} + \\
& +\frac{2h^2 q^5}{\pi^2} \int_{y/h} d\zeta \zeta \frac{1}{\sqrt{h^2\zeta^2 - y^2}} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\lambda}{L(\lambda)} \frac{\lambda^2}{\gamma(\lambda)} e^{-\gamma(\lambda)(\zeta\eta h + s)}, \\
\psi_0(y) = & -\frac{2h^2}{\pi} \int_{y/h} d\zeta \zeta \frac{1}{\sqrt{h^2\zeta^2 - y^2}} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} g(\zeta\eta h).
\end{aligned}$$

Уравнение (10) является точным и позволяет производить численные расчеты дифракционного поля. Приведем выражение для поля давлений в жидкости через функцию $\psi(y)$

$$\begin{aligned}
(11) \quad P(x, y) = & P_0(x, y) + Q(x, y) + \frac{q^5}{\pi} \int_{-\infty}^\infty d\eta e^{i\eta x - \gamma(\eta)y} \times \\
& \times \frac{-i\eta}{L(\eta)} \left[-\frac{1}{I_2} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\lambda \lambda^2}{L(\lambda)} \int_0^h ds \psi(s) e^{-\gamma(\lambda)s} + \frac{1}{\gamma(\eta)} \int_0^h ds \psi(s) e^{-\gamma(\eta)s} \right] + \\
& + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \cos \lambda y e^{-\gamma(\lambda)|x|} \operatorname{sgn} x \int_0^h ds \psi(s) \cos \lambda s.
\end{aligned}$$

Интересуясь длинноволновым приближением, отметим, что интегральное уравнение (10) может быть решено итерациями при $\varepsilon = kh \ll 1$. Можно показать, что итерационный процесс будет сходиться со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем порядка $O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$.

На большом расстоянии от пластины дифракционная часть поля P_s приобретает характер расходящейся цилиндрической волны. Применяя к интегралам в выражении (11) метод перевала ($kR = k(x^2 + y^2)^{1/2} \gg 1$), найдем

$$P_s(x, y) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i\pi/4} \Psi(\varphi, \varphi_0).$$

Функция $\Psi(\varphi, \varphi_0)$ имеет смысл диаграммы направленности:

$$\begin{aligned}
(12) \quad \Psi(\varphi, \varphi_0) = & \frac{\beta\beta_0}{U_0} \left\{ 2b \left[\frac{1}{i_{0,1}} + \frac{\kappa\kappa_0}{i_{2,1}} \right] - \right. \\
& - \frac{\varepsilon^2}{2} \kappa\kappa_0 \left\langle SS_0 - \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\frac{b}{2i_{2,1}} \left(d - \frac{1}{4} - \ln \frac{\varepsilon}{2} \right) (S+S_0) + \right. \right. \\
& + \frac{1}{4} [S\beta_0^2(\kappa_0^4 - a) + S_0\beta^2(\kappa^4 - a)] + \\
& \left. \left. + 2SS_0 \left[-\frac{3}{16} - i\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln \frac{\gamma\varepsilon}{4} - \frac{b}{4} \left(i_{2,-1} - \frac{i_{2,0}}{i_{2,1}} \right) \right] \right\rangle + O(\varepsilon^6 \ln^2 \varepsilon) \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь φ — угол наблюдения, отсчитываемый от полуоси $x > 0$,

$$\begin{aligned} \beta &= \sin \varphi, \quad \kappa = \cos \varphi, \quad b = q^5/k^5, \quad a = k_0^4/k^4, \\ l &= i\beta(\kappa^4 - a) + b, \quad l_0 = i\beta_0(\kappa_0^4 - a) + b, \\ S &= \kappa^4 - a - bi_{2,0}/i_{2,1}, \quad S_0 = \kappa_0^4 - a - bi_{2,0}/i_{2,1}, \\ d &= (-i_{2,0} + \pi i + ai_{0,0} + bi_{0,-1} - 2 \ln \gamma + 2 \ln 2 + 3)/2, \\ \ln \gamma &= 0,5772 \dots - \text{постоянная Эйлера,} \end{aligned}$$

$$i_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda \lambda^m (\lambda^2 - 1)^{n/2}}{(\lambda^4 - a) (\lambda^2 - 1)^{1/2} - b}.$$

В выражении (12) явно учтено второе приближение для решения уравнения (10).

Приведем еще формулы для звукового давления w на поверхности ребра. В первом приближении имеем

$$(13) \quad w_1(+0, y) = -\frac{2\varepsilon\beta_0\kappa_0}{l_0} S_0 \sqrt{1 - y^2/h^2},$$

во втором приближении

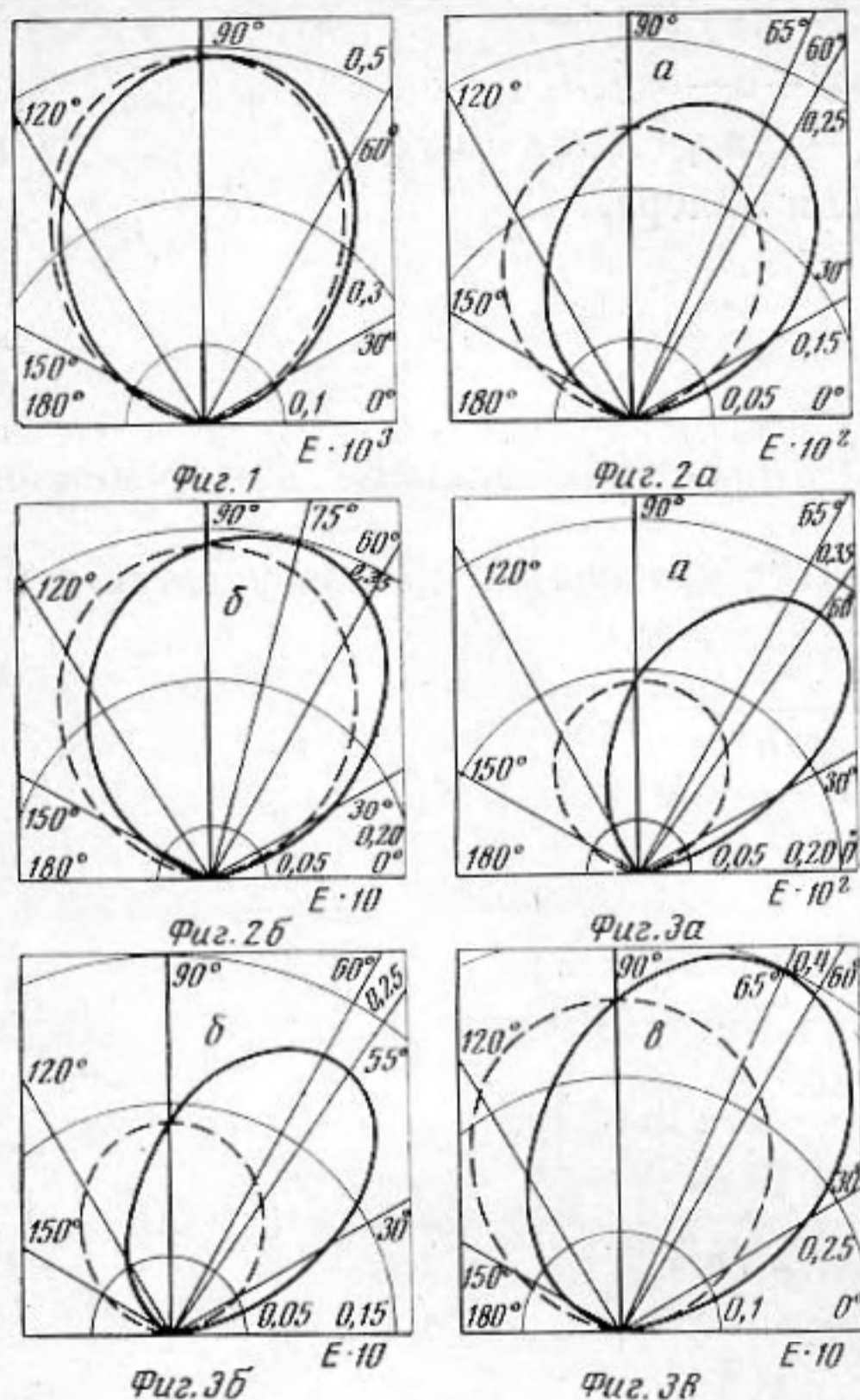
$$\begin{aligned} w_2(+0, y) &= w_1(+0, y) + \frac{2\varepsilon^3\beta_0\kappa_0}{l_0} \left\{ -S_0 \frac{b}{4} \left(i_{2,-1} - \frac{i_{2,0}^2}{i_{2,1}} \right) + \right. \\ &+ \frac{1+2y^2/h^2}{12} \left[\beta_0^2(\kappa_0^4 - a) + \frac{2b}{i_{2,1}} (d - \ln \varepsilon) \right] - \\ &- \frac{b}{i_{2,1}} \left[y^3/3h^3 \times \arccos y/h (1 - y^2/h^2)^{-1/2} + \right. \\ &+ \left. \frac{1-4y^2/h^2}{36} - \frac{\ln 2}{6} \times (1+2y^2/h^2) \right] + \\ &+ \left. S_0 \left[\frac{-5+2y^2/h^2}{24} - i \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln \frac{\gamma\varepsilon}{4} \right] \right\} \times \sqrt{1 - y^2/h^2}. \end{aligned}$$

Последние формулы находятся в соответствии с условием Майкснера «на ребре» [10]. Выражение типа (13) было получено в работе [6] при исследовании дифракции длинных волн на упругой пластине. Сходная формула получается и для жесткой пластины. В рассматриваемой модели влияние несущей пластины на распределение давления по ребру сводится (в первом приближении) к изменению множителя при квадратном корне.

На основании формулы (12) была рассчитана для стальной пластины в воде диаграмма направленности дифракционного поля по энергии, т. е. функция $E(\varphi, \varphi_0) = |\Psi(\varphi, \varphi_0)|^2$. Результаты вычислений приведены на фиг. 1—3.

Диаграмма (12) образована наложением двух полей: поля, рассеянного на пластине с точечным закреплением, и поля, рассеянного собственно на ребре. Вклад последнего поля для длинных волн ($\varepsilon = kh \ll 1$) невелик по сравнению с первым.

Излучение полностью отсутствует в горизонтальном направлении, а излучение ребра отсутствует и в вертикальном направлении. В рассматриваемом низкочастотном диапазоне диаграммы представляют собой плавные кривые без резких максимумов. Влияние ребра на рассеянное поле сводится к повороту диаграммы в сторону, противоположную падающей волне. Взаимодействие этого поля с плоской волной, отраженной от пластины в целом, приводит к некоторой компенсации общего акустического поля в зоне, где сказывается теневой эффект ребра. Угол между направлениями максимального излучения диаграмм для $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon > 0$ уменьша-



Фиг. 1-3

Фиг. 1. Диаграмма направленности по энергии (сплошные линии). Безразмерная толщина пластины $\delta = kH = 0,05$, безразмерная высота ребра $\epsilon = kh = 0,25$, угол падения $\varphi_0 = 10^\circ$. Штриховыми линиями показаны диаграммы для поля, рассеянного на точечном закреплении ($\epsilon = 0$)

Фиг. 2. Диаграмма направленности по энергии (сплошные линии); $\delta = 0,1$, $\epsilon = 0,5$, $\varphi_0 = 10$ и 60° соответственно; штриховыми линиями показаны диаграммы для поля, рассеянного на точечном закреплении ($\epsilon = 0$)

Фиг. 3. Диаграмма направленности по энергии (сплошные линии); $\delta = 0,1$, $\epsilon = 0,7$, $\varphi_0 = 10, 30$ и 60° соответственно; штриховыми линиями показаны диаграммы для поля, рассеянного на точечном закреплении ($\epsilon = 0$)

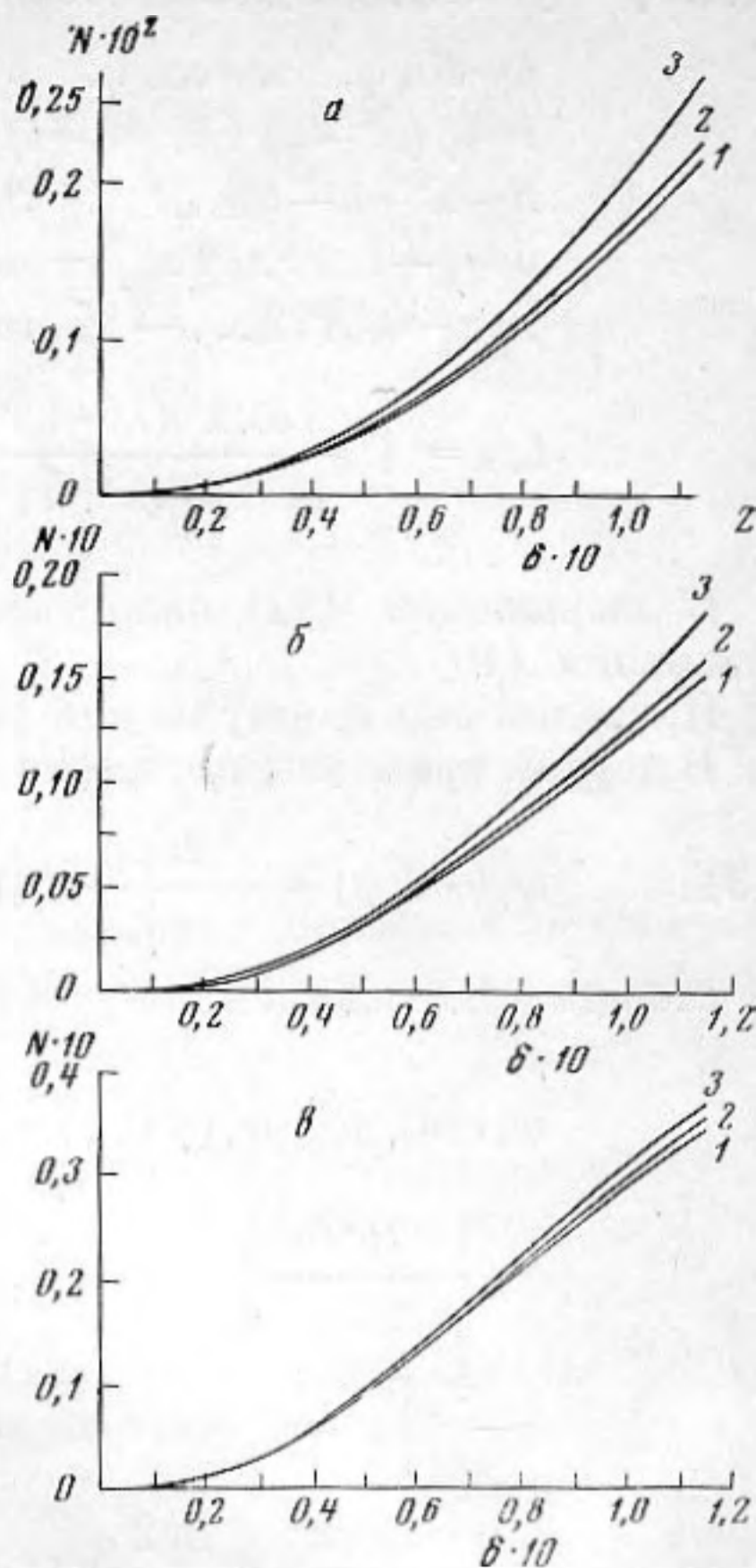
Фиг. 4. Зависимость безразмерной полной энергии, излученной в жидкость, от толщины пластины $\delta = kH$. Кривые 1 относятся к точечному закреплению ($\epsilon = 0$), кривые 2 и 3 построены для ребер с безразмерной высотой $\epsilon = 0,5$ и $0,7$ соответственно

ется при приближении падения к нормальному и увеличивается с ростом ϵ . При $\epsilon \leq 0,25$ различие между диаграммами в направлении максимального излучения мало и ребро можно не учитывать.

На основании диаграммы направленности (12) была рассчитана также безразмерная полная энергия, излученная в жидкость пластиной с ребром

$$N = \int |\Psi(\varphi, \varphi_0)|^2 d\varphi.$$

На фиг. 4 представлены зависимости величин N от безразмерной толщины пластины $\delta = kH$. Эти кривые позволяют по известной частоте и толщине пластины определять долю энергии, излученной в жидкость за счет рассеяния на поверхности ребра.



Фиг. 4

Обратимся к вопросу о возможности импедансного описания протяженного ребра, т. е. выясним, нельзя ли в рассматриваемом низкочастотном диапазоне заменить протяженное ребро точечным дефектом пластины в виде локального импеданца. При этом гранично-контактные условия (2) заменятся на следующие [1]:

$$\begin{aligned} Z_1 P_y(0, 0) &= P_{yxxx}(+0, 0) - P_{yxxx}(-0, 0), \\ Z_2 P_{yx}(0, 0) &= P_{yx}(+0, 0) - P_{yx}(-0, 0), \end{aligned}$$

причем величины $Z_{1, 2}$ пропорциональны импеданцам по смещению и изгибу. Диаграмма направленности поля, возникающего при падении плоской волны на описанную пластину, может быть найдена методом работы [1]. Сравнение диаграммы с формулой (12) показывает, что их можно отождествить, если пренебречь в этой последней членами порядка $O(\varepsilon^4 \ln \varepsilon)$ и считать $|a + bi_{2,0}/i_{2,1}| \gg 1$. (Можно показать, что при малых $\delta = kH$ левая часть неравенства имеет порядок $O((kH)^{-2})$, т. е. неравенство выполнено для тонких пластин.) При этом диаграммы направленности совпадут, если положить импеданц по отношению к смещению $Z_1 = \infty$, а импеданц по отношению к изгибу

$$Z_2 = 2i \frac{i_{3,1}}{i_{2,1}} \left[1 - \frac{4b}{\varepsilon^2 (a + bi_{2,0}/i_{2,1})^2} \right].$$

В заключение отметим, что нами рассмотрено влияние на рассеянное поле одиночного ребра жесткости; резонансы набора не учитывались. Однако использованный метод допускает исследование и этого вопроса. Далее, при больших значениях $\varepsilon = kh$ необходим другой подход, так как нулевое приближение — пластина с точечным закреплением — становится некорректным. Ясно, в частности, что импедансное описание протяженного ребра в коротковолновом диапазоне невозможно, так как диаграмма рассеяния на пластине с локальным импеданцем существенно отличается от многолепестковой диаграммы рассеяния на пластине с протяженным ребром. Расчет соответственных дифракционных явлений может быть произведен с помощью метода факторизации по схеме работ [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Коновалюк, В. Н. Красильников. Влияние ребра жесткости на отражение плоской звуковой волны от тонкой пластины. Сб. Дифракция и излучение волн. Изд-во ЛГУ, 1965, вып. 4, 149—165.
2. И. П. Коновалюк. Дифракция плоской звуковой волны на бесконечной пластине, подкрепленной ребрами жесткости. Акуст. ж., 1968, 14, 4, 554—560.
3. Е. Л. Шендеров. Волновые задачи гидроакустики. Л., «Судостроение», 1972.
4. Б. П. Белинский. Дифракция коротких волн на протяженном ребре жесткости в упругой пластине. Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, 1974, вып. 12, 26—31.
5. Б. П. Белинский. О методе факторизации в задачах упругой и акустической дифракции. Канд. дис., ЛГУ, 1972.
6. Е. Л. Шендеров. Дифракция звука на тонкой упругой полосе. Акуст. ж., 1972, 18, 4, 608—619.
7. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции. М., Физматгиз, 1958, вып. 1.
8. Д. П. Коузов. О решении уравнения Гельмгольца для полуплоскости при граничных условиях, содержащих производные высокого порядка. Прикл. матем. и механ., 1967, 31, 1, 164—170.
9. Ю. Я. Иоссель. Смешанная плоская задача стационарной теплопроводности для цилиндра. Инж.-физ. ж., 1971, 21, 3, 476—479.
10. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова, физический факультет
Научно-исследовательский физический
институт

Поступила
1 марта 1976 г.