

УДК 534.121.1

НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ДВУТАВРОВОМ СТЕРЖНЕ

Ю. И. Бобровицкий

Приведены точные дисперсионные уравнения нормальных волн в тонкостенном стержне двутаврового сечения и обсуждена их связь с приближенными теориями. Для изгибных колебаний построена наилучшая по дисперсионным свойствам двухволновая модель.

Тонкостенные стержни повсеместно применяются в инженерных конструкциях и их колебания интенсивно исследуются. Стержни двутаврового сечения относятся к одному из наиболее распространенных типов тонкостенных стержней открытого профиля. Их колебания рассчитываются в настоящее время исключительно с помощью приближенных теорий. Ниже рассматривается распространение волн в однородных двутавровых стержнях более точно, чем это делалось до сих пор. Двутавровый стержень здесь представляется конструкцией, состоящей из трех тонких полос, жестко соединенных вдоль двух линий. Полосы могут совершать изгибные колебания, которые описываются уравнением Жермен — Лагранжа, и продольно-поперечные, подчиняющиеся динамическим уравнениям плоского напряженного состояния. Применимость полученных результатов, таким образом, ограничивается частотным диапазоном, в котором длина сдвиговой волны материала много больше толщины каждой полосы, но необязательно больше ее ширины, определяющей размеры поперечного сечения стержня.

Используемый метод расчета [1, 2] состоит в следующем. При распространении по стержню нормальной волны вида $u(\xi, \eta) \cdot \exp(ikx - i\omega t)$, где k — постоянная распространения по продольной координате x , ω — круговая частота, $u(\xi, \eta)$ — вектор смещений, зависящий от поперечных координат ξ и η , на линиях соединения полос возникнут силы и моменты сил реакций, которые также экспоненциально зависят от координаты x . Разъединяя стержень на отдельные полосы и заменяя их взаимодействие этими силами и моментами, исходную задачу можно свести к более простым задачам на вынужденные колебания полос под действием экспоненциально распределенных по линиям сил и моментов сил. Как показано в работе [1], решения этих задач удобно выразить через линейные динамические жесткости, представляющие собой не зависящие от x отношения линейной плотности сил или моментов сил к смещению или углу поворота. Стыковка таких решений для отдельных полос по линиям их соединения немедленно приводит к дисперсионным уравнениям нормальных волн в рассматриваемом тонкостенном стержне. Некоторые из необходимых линейных динамических жесткостей получены в работе [1], остальные могут быть выведены аналогично. Можно показать, что все они выражаются через дисперсионные уравнения нормальных волн в полосах с различными граничными условиями на кромках.

Двутавровый стержень с одинаковыми полками имеет две продольные плоскости зеркальной симметрии, поэтому в нем существуют независимо друг от друга четыре типа нормальных волн: продольные, т. е. симметрич-

ные относительно обеих плоскостей симметрии, два типа изгибных волн, симметричных относительно одной из плоскостей и антисимметричных относительно другой, и крутильные, характеризующиеся антисимметричным движением относительно обеих плоскостей симметрии. Опустив несложные выкладки, приводим дисперсионные уравнения для крутильных

$$(1) \quad |B^a| + B_{ii}^a B_{\alpha\alpha}' + B_{\alpha\alpha}^a C_{nn}' + B_{\alpha\alpha}' C_{nn}' = 0$$

и для изгибных волн в плоскости стенки

$$(2) \quad |C^a| + C_{ii}^a B_{ii}' + C_{nn}^a C_{ii}' + B_{ii}' C_{ii}' = 0.$$

Здесь изгибные линейные динамические жесткости $B_{ii}^a = (D/H^3) \theta_a / \delta_a$, $B_{\alpha\alpha}^a = (D/H) \gamma_a / \delta_a$, $|B^a| = B_{ii}^a B_{\alpha\alpha}^a - B_{i\alpha}^a B_{\alpha i}^a = (D^2/H^4) \lambda_a / \delta_a$ относятся к стенке при антисимметричном возбуждении ее кромок экспоненциально распределенными перерезывающей силой и изгибающим моментом [1], $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость стенки, $2h$ и $2H$ — ее толщина и ширина, δ_a , γ_a , θ_a , λ_a — левые части дисперсионных уравнений антисимметричных нормальных волн в зажатой по кромкам полосе (стенке), в шарнирно опертой полосе, в полосе со скользящей заделкой и в свободной полосе [3]. Такой же вид имеют и линейные динамические жесткости полки $B_{ii}' = (2D'/H'^3) \theta / \delta$ и $B_{\alpha\alpha}' = (2D'/H') \gamma / \delta$, рассчитанные для перерезывающей силы и изгибающего момента, приложенных вдоль средней линии. Величины δ , γ , θ и λ — левые части дисперсионных уравнений нормальных волн в полосе (полке), у которой указанные выше граничные условия заданы на средней линии, а кромки свободны от напряжений. Ширина полки равна $4H'$, толщина — $2h'$. Остальные величины в уравнениях (1) и (2) представляют собой продольно-поперечные линейные динамические жесткости отдельных полос и имеют аналогичную структуру [1]. Дисперсионные уравнения для продольных нормальных волн и изгибных волн второго типа могут быть получены из уравнений (1) и (2) заменой антисимметричных линейных динамических жесткостей стенки соответствующими жесткостями, относящимися к симметричному возбуждению.

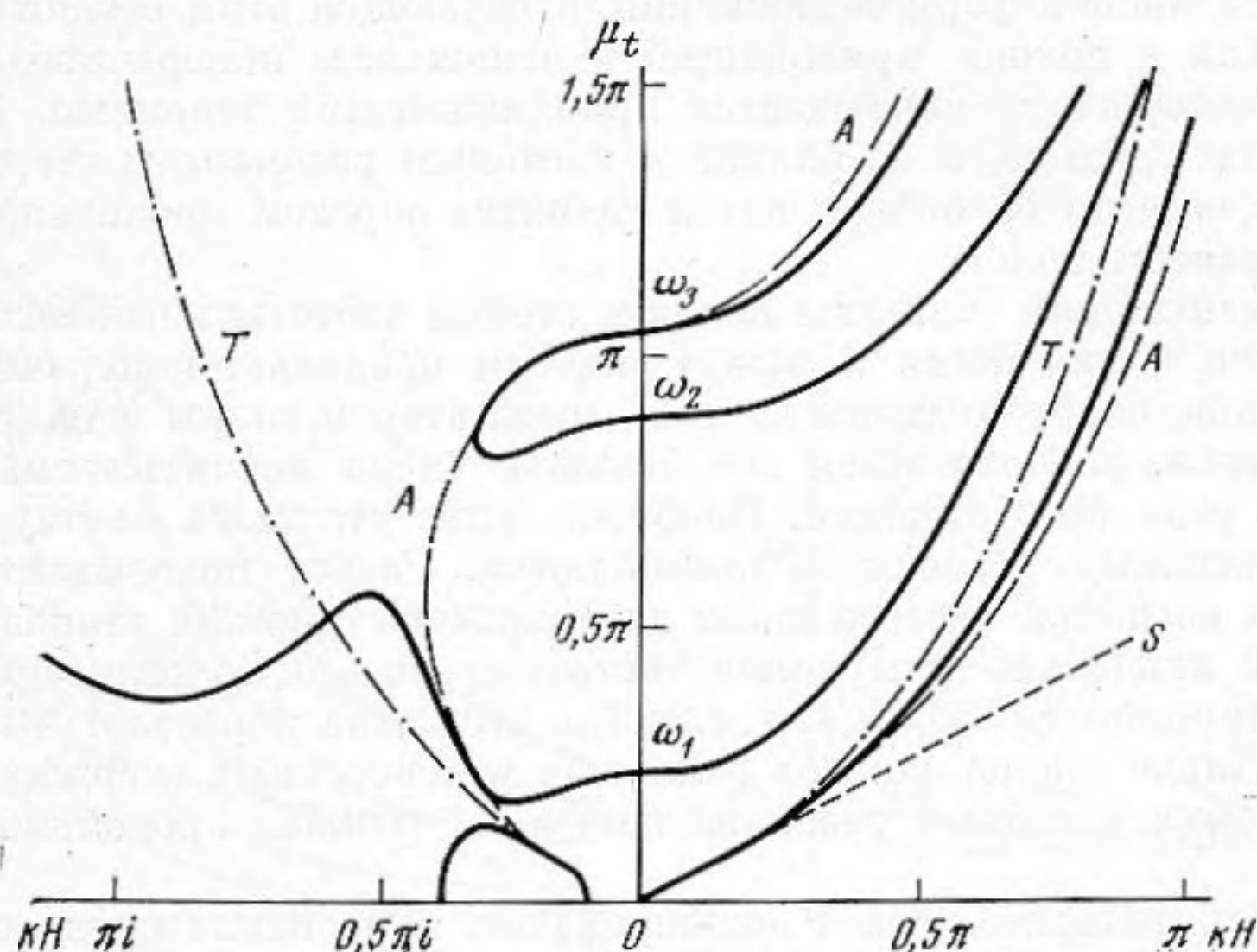
Левые части уравнений (1) и (2) представляют собой целые функции первого порядка от постоянной распространения k . Нетрудно показать, что их действительные и мнимые корни встречаются парами $\pm k$, а комплексные корни четверками $\pm k$, $\pm \bar{k}$. Из общих теорем теории аналитических функций [4] следует, что число корней счетно и они не имеют точек сгущения в конечной части комплексной плоскости. Число нормальных волн каждого типа в двутавровом стержне, таким образом, бесконечно, и модуль их постоянной распространения монотонно возрастает с увеличением номера волны. Можно доказать также более сильное утверждение: на любой частоте дисперсионные уравнения (1) и (2) имеют конечное число действительных и мнимых корней и бесконечное число комплексных корней.

На фиг. 1 сплошными линиями изображено несколько первых мнимых и действительных ветвей дисперсии крутильных нормальных волн в двутавровом стержне, построенных по уравнению (1). Стенка и полки стержня сделаны из одинакового материала (коэффициент Пуассона $\nu = 1/3$) и имеют одинаковую толщину $h' = h$, которая составляет 0,15 высоты стенки, а ширина полки вдвое меньше высоты стенки. В левой половине фиг. 1 расположены мнимые ветви, в правой — действительные. По оси ординат отложена безразмерная величина $\mu_t = k_t H$, пропорциональная частоте, k_t — сдвиговое волновое число в тонкой пластине.

На низких частотах имеется одна длинноволновая ветвь в действительной плоскости, выходящая из начала координат. При возрастании частоты эта ветвь искривляется и стремится к параболе, соответствующей дисперсии изгибной рэлеевской волны. Кроме того, на низких частотах имеются

четыре мнимых корня (два из них расположены за пределами фиг. 1), остальные корни комплексные.

С увеличением частоты два первых мнимых корня сближаются и сливаются (максимум кривой), после чего они превращаются в два комплексных корня, не изображенных на фиг. 1, которые в свою очередь также сливаются и превращаются в два мнимых корня (минимум кривой). Затем правая мнимая ветвь на так называемой частоте среза ω_1 дает нулевое значение постоянной распространения ($k=0$). Это резонансная частота двутаврового стержня. Выше частоты ω_1 эта ветвь становится действительной, стремясь в пределе к дисперсионной кривой изгибных волн и тонкой пластине. Вторая мнимая ветвь после слияния с третьей и повторного



Фиг. 1. Дисперсионные кривые крутильных нормальных волн в двутавровом стержне, построенные согласно точной теории (сплошные линии) и приближенным теориям Б. Сен-Венана (S), С. П. Тимошенко (T) и Аггарвала — Крэнча (A)

превращения в комплексные ветви и обратно на критических частотах, соответствующих экстремумам мнимых ветвей, дает частоту среза ω_2 , после которой она целиком располагается в действительной области, стремясь также к дисперсионной кривой изгибных волн в пластине, и т. д.

Сравним теперь эти кривые с дисперсионными зависимостями, рассчитанными по известным приближенным теориям. Существуют три основных приближенных уравнения крутильных колебаний стержней. Простейшее из них — уравнение второго порядка Б. Сен-Венана. Оно учитывает инерцию поворота и упругость стержня при чистом кручении, т. е. однородной деформации [5]. Крутящий момент при этом прямо пропорционален производной угла закручивания. На фиг. 1 этому уравнению соответствует прямая S, совпадающая с точной кривой на низких частотах. Более точным является уравнение С. П. Тимошенко [6], которое дополнительно к теории Б. Сен-Венана учитывает изгиб полок (неоднородность деформации) согласно элементарной теории. Зависимость между крутящим моментом и углом закручивания здесь более сложная и включает в себя также третью производную от угла [7]. Поэтому уравнение С. П. Тимошенко имеет четвертый порядок и описывает, таким образом, две крутильные волны. На фиг. 1 ему соответствуют дисперсионные кривые, помеченные буквой T. Третьим является уравнение четвертого порядка Аггарвала — Крэнча [8], которое помимо упомянутых эффектов учитывает инерцию деформации и сдвиговые деформации при изгибе полок. На

фиг. 1 ему соответствуют кривые А. Отметим, что во всех этих приближенных теориях поперечное сечение стержня предполагается недеформируемым.

Из фиг. 1 видно, что два последних уравнения удовлетворительно описывают дисперсию первой нормальной волны (в действительной области) вплоть до сравнительно высоких частот ($\mu_1 \approx \pi$) и первую мнимую ветвь на низких частотах. Кроме того, дисперсия второй волны в теории Аггарвала — Крэнча хорошо совпадает на высоких частотах с дисперсией четвертой нормальной волны двутаврового стержня. В то же время приближенные теории «не замечают» второй и третьей действительных ветвей дисперсии, рассчитанной по точной теории. Причина этого состоит в том, что преобладающей формой движения, отвечающей этим ветвям, является изгиб стенки и полка, приводящий к искажению поперечного сечения стержня, который не учитывается приближенными теориями. В частности, частоты среза ω_1 и ω_2 близки к изгибным резонансам стержня, в то время как частота ω_3 определяется главным образом продольно-поперечным резонансом полки.

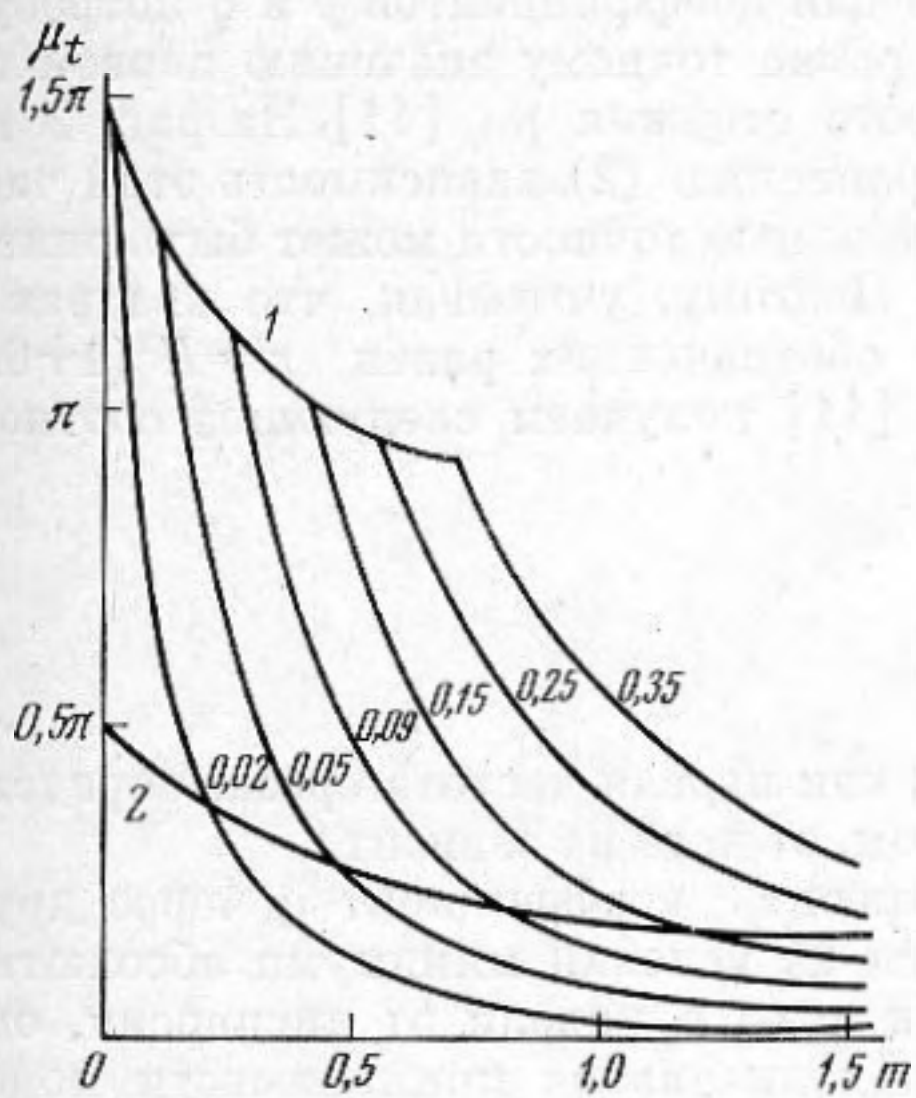
При уменьшении толщины полки и стенки частоты изгибных резонансов стержня понижаются и между первым продольно-поперечным резонансом полки, определяющим частоту среза второй волны в теории Аггарвала — Крэнча, располагается все большее число неучитываемых ветвей дисперсии реального стержня. Наоборот, если утолщать стенку и полки, частоты изгибных резонансов повышаются. Расчет показывает, однако, что первая изгибная частота среза двутаврового стержня становится равной первой продольно-поперечной частоте среза при толщине полки, сравнимой с шириной ($h' \approx 0,6H'$), т. е. когда стержень перестает быть тонкостенным. Иначе говоря, во всех реальных тонкостенных стержнях двутаврового сечения изгибный резонанс наступает раньше продольно-поперечного.

Это обстоятельство играет большую роль при оценке пределов применимости приближенных теорий. Игнорирование «изгибных» ветвей дисперсии ведет к большим ошибкам в расчетах, поэтому в качестве верхней границы применимости двухволновых приближенных теорий естественно считать первую критическую частоту, соответствующую первому максимуму мнимой ветви дисперсии. Она расположена несколько ниже «изгибной» частоты среза ω_1 . Но поскольку в двутавровом стержне она меньше частоты продольно-поперечного резонанса, то пределы применимости уравнений С. П. Тимошенко и Аггарвала — Крэнча оказываются примерно одинаковыми. Отсюда следует, что в практических расчетах предпочтительнее использовать более простое уравнение С. П. Тимошенко. Уравнение Аггарвала — Крэнча целесообразно применять при расчете двутавров с повышенной изгибной жесткостью составляющих его полос, например сделанных из композитных материалов, или двутавровых стержней с поперечными ребрами жесткости.

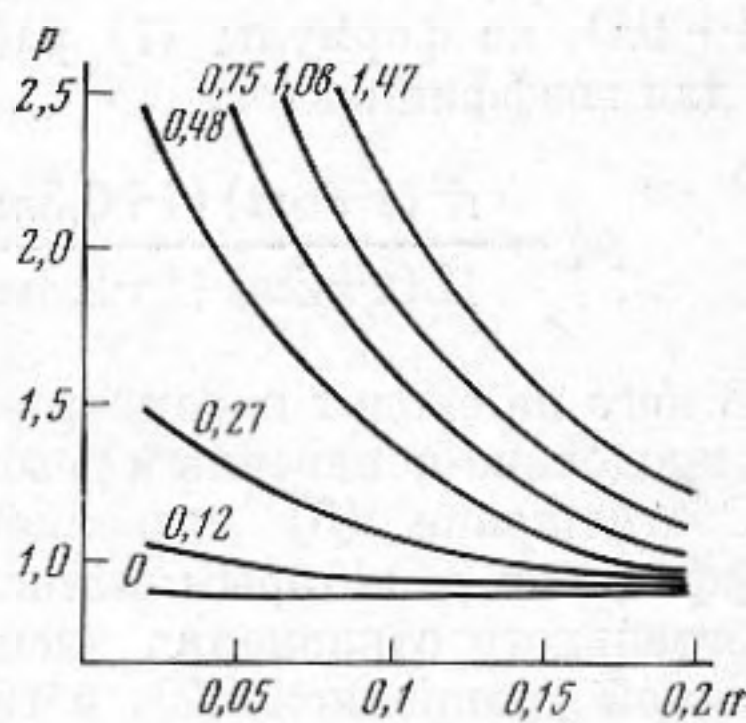
Рассмотрим теперь изгибные волны двутаврового стержня в плоскости стенки. Дисперсионное уравнение (2) на низких частотах дает две длинноволновые ветви, которые для любых параметров поперечного сечения совпадают с дисперсионными кривыми волн в классической модели Бернулли — Эйлера, и бесконечное число комплексных ветвей. При отсутствии полки ($H' = 0$) оно превращается в известное уравнение Рэлея — Лэмба [9]. Как и в случае крутильных волн, при $H' \neq 0$ большую роль в формировании нормальных волн играют изгибные колебания полки, приводящие к искажению сечения. Общая картина дисперсионных зависимостей для этого типа волн во многом аналогична изображенной на фиг. 1: при возрастании частоты в критических точках (экстремумах) комплексные ветви переходят в мнимые и наоборот, мнимые ветви на частотах среза переходят в действительные, которые в пределе стремятся к дисперсионной кривой изгибных волн в полках (параболе), кроме первой

действительной ветви, которая стремится к дисперсионной кривой изгибных волн рэлеевского типа.

Существует большое число приближенных теорий изгибных колебаний стержня. Наибольшее практическое значение имеют двухволновые уравнения Бернулли — Эйлера и С. П. Тимошенко [10]. Первое верно только на самых низких частотах, однако часто используется из-за своей простоты. Уравнение С. П. Тимошенко, учитывающее эффекты сдвиговых деформаций и инерции вращения сечений, имеет гораздо более широкую частотную область применимости. Оно содержит произвольный коэффициент q (коэффициент сдвига), правильный выбор которого существенно влияет на степень приближения теории. В работе [11] показано, что модель



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимость первых частот среза нормальных волн в двутавровом стержне от геометрических параметров поперечного сечения. Кривые 1, 2 соответствуют продольно-поперечным, остальные — изгибным резонансам стержня

Фиг. 3. Зависимость оптимального значения корректирующего коэффициента p от параметров поперечного сечения двутаврового стержня

С. П. Тимошенко может быть улучшена путем введения в уравнение второго корректирующего коэффициента p . Особенно заметно это улучшение в случае рассматриваемого здесь стержня двутаврового сечения. Ниже производится выбор оптимальных значений коэффициентов p и q и, таким образом, строится наилучшая по дисперсионным свойствам двухволновая модель изгибных колебаний двутаврового стержня.

Рассмотрим двутавровый стержень, у которого стенка и полки сделаны из одинакового материала ($\nu = 1/3$) и имеют одинаковую толщину $h' = h$. Поперечное сечение в этом случае характеризуется двумя геометрическими параметрами: отношением ширины полки к высоте стенки $m = 2H'/H$ и отношением толщины стенки к ее высоте $n = h/H$.

Прежде всего установим пределы применимости двухволновых моделей. Естественно положить, что верхняя граница частотного диапазона их применимости определяется второй частотой среза, выше которой становится действительной постоянной распространения третьей нормальной волны, не учитываемой в приближенных теориях. Для стенки без полок ($m = 0$) вторая частота среза равна $\mu_{12} = 3\pi/2$. При увеличении m значение μ_{12} понижается, но не зависит от параметра n , так как определяется в основном продольно-поперечным резонансом в стержне. Однако, начиная с некоторого значения m , зависящего от n , вторая частота среза будет

определяться уже изгибом полок. На фиг. 2 приведены графики зависимости первых трех частот среза от параметров m и n , рассчитанные по уравнению (2).

Верхняя пологая кривая 1 соответствует зависимости второго продольно-поперечного резонанса от параметра m . Она не зависит от n . Семейство кривых, помеченных десятичными числами, равными значениям параметра n , показывает зависимость первой изгибной частоты среза от параметра m . Для конкретного двутаврового стержня с параметрами сечения m_0 и n_0 верхняя частота диапазона применимости модели определяется наименьшей из точек пересечения прямой $m=m_0$ с кривой 1 и кривой, помеченной числом n_0 .

При выборе наилучших значений для коэффициентов p и q потребуем, чтобы частота среза в модели была равна точному значению первой продольно-поперечной частоты двутаврового стержня μ_{11} [11]. На фиг. 2 кривая 2 определяет посчитанную по уравнению (2) зависимость этой частоты от параметра m . Она с большой степенью точности может быть описана функцией $\mu_{11} = \pi [0,5 - m / (1 + 2,3m)]$. Поэтому, учитывая, что квадрат радиуса инерции сечения в наших обозначениях равен $r^2 = H^2(1 + 6m) / 3(1 + 2m)$, из формулы (7) работы [11] получаем следующее соотношение для коэффициентов:

$$(3) \quad pq = \frac{\pi^2(1+6m)(1+0,3m)^2}{12(1+2m)(1+2,3m)^2}.$$

В него не входит параметр n , так как первая частота среза, определяемая продольно-поперечным резонансом, от него не зависит.

Соотношение (3) позволяет выразить коэффициент q через другой коэффициент p , который вычисляется из условия минимума абсолютного интегрального отклонения дисперсии волн в модели от дисперсии, определяемой уравнением (2), в пределах диапазона применимости модели. Результаты расчетов приведены на фиг. 3. Кривые на фиг. 3 помечены числами, равными значениям параметра m , пропорционального ширине полок. При увеличении толщины полос значения коэффициента p уменьшаются, стремясь к прямой $p=0,9$. Случай $p=1,0$ соответствует «чистой» модели С. П. Тимошенко. Разница между двумя моделями, как видно из фиг. 3, особенно заметна для стержней с нетолстыми, но широкими полками, в которых большое значение имеют изгибные колебания полок и соответствующие им искажения поперечного сечения.

Среди всех возможных двухволновых уравнений изгибных колебаний двутавровых стержней уравнение (5) из работы [11], в котором корректирующие коэффициенты p и q выбраны на основе соотношения (3) и графиков фиг. 3, имеет наилучшие дисперсионные свойства и, следовательно, приводит к наименьшим ошибкам в инженерных расчетах собственных частот ограниченных стержней двутаврового профиля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Бобровицкий, М. Д. Генкин, В. П. Маслов, А. В. Римский-Корсаков. Распространение волн в конструкциях из тонких стержней и пластин. М., «Наука», 1974.
2. И. И. Артоболевский, Ю. И. Бобровицкий, М. Д. Генкин. Колебания однородных структур из тонких полос. Докл. АН СССР, 1974, 219, 5, 1083–1084.
3. Ю. И. Бобровицкий. Дисперсия изгибных нормальных волн в тонкой полосе. Акуст. ж., 1977, 23, 1, 34–40.
4. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций, т. 2. М., «Наука», 1968.
5. Б. Сен-Венан. Мемуары о кручении и об изгибе призм. М., Физматгиз, 1961.
6. J. M. Gere. Torsional vibrations of beams of thin-walled open section. J. Appl. Mech. (Trans. ASME), 1954, 76, 4, 381–387.
7. С. П. Тимошенко. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки под влиянием сил, действующих в плоскости ее наибольшей жесткости (1905 г.).

В кн. С. П. Тимошенко. Устойчивость стержней, пластин и оболочек (избранные работы). М., Физматгиз, 1971.

8. Х. Р. Аггарвал, Е. Т. Крэнч. Теория крутильных и изгибно-крутильных волн в тонкостенных балках открытого поперечного сечения. Прикладная механика, 1967, 89, 2, 90–97.
9. Ю. И. Бобровицкий, М. Д. Генкин. Колебания упругой полосы. Сб. Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций. М., «Наука», 1975, 12–42.
10. Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Серия Механика твердых деформируемых тел, т. 5. М., ВИНТИ, 1973.
11. Ю. И. Бобровицкий. Об акустической модели изгибно-колеблющегося стержня. Акуст. ж., 1975, 21, 4, 646–648.

Государственный научно-исследовательский
институт машиноведения им. А. А. Благонравова

Поступила
23 апреля 1976 г.