

УДК 534.16:624.072.4

СВОБОДНЫЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРУЖИНЕ
С МАЛЫМ ШАГОМ

А. В. Бунчук

Рассмотрено распространение свободных волн в тонком стержне, свитом в цилиндрическую пружину с малым шагом. Исследованы свойства крутильно-изгибных и продольно-изгибных волн в такой пружине в широком диапазоне частот; в частности, найдена дисперсия продольных и крутильных волн, бегущих вдоль оси симметрии пружины.

Рассмотрим аналитически волны, распространяющиеся в цилиндрической пружине с малым шагом. До сих пор такие волны изучались либо численными и экспериментальными методами [1–13], либо в ограниченных частотных диапазонах [3, 10, 11, 14, 15].

Пусть в невозмущенном состоянии пружина представляет собой бесконечный стержень круглого сечения радиусом a , свитый в цилиндрическую спираль с радиусом R и шагом h . Обозначим через \mathbf{t} , \mathbf{n} и \mathbf{b} единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали невозмущенной оси стержня; смещения точек оси вдоль этих векторов обозначим ξ , η и ζ , а углы поворота нормальных сечений относительно этих векторов — через φ , α и β соответственно.

Будем в дальнейшем пренебрегать вкладом сдвиговых напряжений в перерезывающие силы и инерцией вращения поперечных сечений вокруг осей \mathbf{n} и \mathbf{b} . Кроме того, ограничимся случаем $\kappa/\sigma \ll 1$, $\sigma a \ll 1$, $\kappa a \ll 1$ и будем пренебрегать квадратами указанных величин, а также величиной κa по сравнению с единицей. Здесь $\sigma = 1/R$ и $\kappa = h/2\pi R^2$ — соответственно кривизна и кручение невозмущенной оси стержня в указанном приближении, $k = \omega/c_0$ — волновое число продольных (юнговских) волн в прямом стержне, скорость которых равна c_0 , ω — круговая частота. В последующем окажется, что в рассматриваемом частотном диапазоне ($\kappa a \ll 1$) длины всех волн, распространяющихся по стержню, велики по сравнению с радиусом его сечения (наименьшей длиной обладают изгибные волны в прямом стержне). В силу этого приведенные неравенства являются достаточным условием для того, чтобы стержень можно было считать тонким, а его невозмущенную ось — плоской кривой с указанной кривизной.

Линейные уравнения движения такого стержня можно получить из уравнений, приведенных в работах [9, 15], если воспользоваться условием равенства углов наклона касательных к возмущенной оси стержня соответствующим углам поворота поперечных сечений вокруг векторов \mathbf{n} и \mathbf{b} :

$$(1) \quad \beta = \sigma \xi + \eta_s,$$

$$(2) \quad \alpha = -\zeta_s.$$

В результате уравнения движения стержня примут вид

$$(3) \quad \begin{cases} \rho A \ddot{\xi} = AE (\xi_{ss} - \sigma \eta_s) + 1/2 JE \sigma (\sigma^2 \eta_s + \eta_{sss}), \\ \rho A \ddot{\eta} = AE \sigma (\xi_s - \sigma \eta) - 1/2 JE (\sigma^2 \eta_{ss} + \eta_{ssss}), \\ \rho J \ddot{\varphi} = J \mu (\varphi_{ss} + \sigma \zeta_{ss}) + 1/2 JE \sigma (\zeta_{ss} - \sigma \varphi), \\ \rho A \ddot{\zeta} = J \mu \sigma (\varphi_{ss} + \sigma \zeta_{ss}) + 1/2 JE (\sigma \varphi_{ss} - \zeta_{ssss}), \end{cases}$$

где E и μ — соответственно модуль Юнга и модуль сдвига, ρ — погонная плотность стержня, $A = \pi a^2$ — площадь и $J = \pi a^4/2$ — момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси t . Точками над буквой обозначено дифференцирование по времени, индексом s — дифференцирование по длине дуги s невозмущенной оси стержня.

Система (3) распадается на две независимые системы, связывающие между собой двойки переменных ξ и η (первые два уравнения системы (3)) и φ и ζ (два последние уравнения) и описывающие соответственно продольно-изгибные и крутильно-изгибные волны.

Бегущую крутильно-изгибную волну представим в виде

$$\varphi = \varphi_0 e^{i\delta s}; \quad \zeta = \zeta_0 e^{i\delta s}, \quad \alpha = \alpha_0 e^{i\delta s},$$

где δ — неизвестное волновое число (общий временной множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опущен). Подставив эти выражения в уравнения (3), получим

$$(4) \quad \begin{cases} [\delta^2 - q^2 + (1+\nu)\sigma^2] \varphi_0 + (2+\nu)\sigma \delta^2 \zeta_0 = 0, \\ \frac{2+\nu}{1+\nu} \sigma \delta^2 \varphi_0 + \left(\delta^4 + \frac{1}{1+\nu} \sigma^2 \delta^2 - p^4 \right) \zeta_0 = 0, \end{cases}$$

где ν — коэффициент Пуассона, $q = (\rho \omega^2 / \mu)^{1/2} = [2(1+\mu)]^{1/2}$, k — волновое число сдвиговых волн в материале стержня. Приравнявая нулю определитель системы (4), найдем дисперсионное уравнение крутильно-изгибных волн:

$$(5) \quad \delta^6 - (q^2 + 2\sigma^2) \delta^4 + (\sigma^4 - p^4) \delta^2 + p^4 [q^2 - (1+\nu)\sigma^2] = 0,$$

где $p = (2k/a)^{1/2}$ — волновое число изгибных волн в прямом стержне.

В «высокочастотной» области ($p \gg \sigma$), отбрасывая квадраты и более высокие степени величины $(\sigma/p)^2$, уравнение (5) можно представить в виде

$$(6) \quad [\delta^2 - q^2 + (1+\nu)\sigma^2] [\delta^4 - (3+\nu)\sigma^2 \delta^2 - p^4] = 0.$$

Отсюда следует, что существуют два независимых типа волн: крутильно-изгибные волны крутильного типа

$$(7) \quad \delta^2 = q^2 - (1+\nu)\sigma^2$$

(переходящие при $\sigma \rightarrow 0$ в крутильные волны в прямом стержне) и крутильно-изгибные волны изгибного типа (при $\sigma \rightarrow 0$ переходящие в изгибные волны в прямом стержне)

$$(8) \quad \delta^2 = \pm p^2 + \frac{3+\nu}{2} \sigma^2.$$

Влияние кривизны стержня на волны изгибного типа мало, очевидно, во всей высокочастотной области; по отношению же к волнам крутильного типа это влияние несущественно только при $q \gg \sigma$.

При $q \sim \sigma$ крутильно-изгибные волны крутильного типа обладают интересными особенностями. Из формулы (7) видно, что частота $\omega_0 = \sigma c_0 / \sqrt{2}$,

при которой $q^2 = (1+\nu)\sigma^2$, является критической для этого типа волн. При $\omega = \omega_0$ смещения в стержне чисто крутильные, причем все точки стержня движутся синфазно и с одинаковыми амплитудами, а все нормальные сечения поворачиваются в одну сторону по отношению к вектору t . На одном витке стержня укладывается при этом $1/(1+\nu)^{1/2}$ часть крутильной волны в прямом стержне; концы же витка можно жестко соединить между собой без изменения движения. Это — известный «крутильный резонанс» кольца. На частотах выше ω_0 ($q^2 > (1+\nu)\sigma^2$) волна крутильного типа распространяющаяся, на частотах же ниже ω_0 ($q^2 < (1+\nu)\sigma^2$) все точки стержня снова движутся синфазно, но амплитуды их смещений изменяются вдоль стержня по экспоненциальному закону.

На частоте $\omega = (2+\nu/1+\nu)^{1/2}\omega_0$ на одном витке стержня укладывается ровно одна длина волны крутильного типа ($\delta^2 = \sigma^2$). Поскольку (как это следует из формул (2) и (4)) и в этом случае данная волна вызывает в стержне только чисто крутильные смещения, то концы каждого витка стержня опять можно жестко соединить друг с другом без изменения картины распространения волны.

Из рассмотренного высокочастотного диапазона колебаний стержня будем теперь смещаться в сторону более низких частот. В работе [3] показано, что при $p \sim \sigma$ существует частотный интервал, внутри которого уравнение (5) имеет лишь два действительных корня. Границы этого интервала определяются решениями x_1 и x_2 уравнения, получающегося приравниванием нулю дискриминанта бикубического уравнения (5):

$$4x^2 - \left[27 \left(\nu + \frac{5}{3} \right)^2 - 4 \right] x + 4(\nu + 2) = 0,$$

где $x = p^4/\sigma^4$. Соответствующие этим решениям границы частотного интервала ω_1 и ω_2 находятся по формуле $\omega_j = \sigma^2 a c_0 x_j^{1/2}/2$, $j=1, 2$, причем $x_1^{1/2} \approx 4,20 + 2,66\nu$, $x_2^{1/2} \approx 0,34 - 0,10\nu$. Ввиду комплексности корней уравнения (5) в указанном интервале частот получить для них простые аналитические формулы не удастся (их численный анализ выполнен в работе [3] для случая $\nu=0$).

Легко показать, однако, что при $p/\sigma < x_2^{1/4} \approx 0,58 - 0,10\nu$ все корни (5) действительные, поэтому здесь рассмотрим лишь этот случай («низкие» частоты). Пренебрегая в формуле (5) членами порядка $(k/\sigma)^2$ по сравнению с единицей, получим уравнение *

$$(9) \quad \delta^6 - 2\sigma^2\delta^4 + (\sigma^4 - p^4)\delta^2 - (1+\nu)p^4\sigma^2 = 0.$$

Ограничиваясь четвертыми степенями малого отношения p/σ , напомним корни (9):

$$(10) \quad \delta_1^2 = (1+\nu) \frac{p^4}{\sigma^2} \left[1 + (3+2\nu) \frac{p^4}{\sigma^4} \right],$$

$$(11) \quad \delta_{2,3}^2 = \sigma^2 \left[1 \pm \sqrt{2+\nu} \frac{p^2}{\sigma^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{p^4}{\sigma^4} \right].$$

Из формулы (10) находим фазовую и групповую скорости соответствующих низкочастотных крутильно-изгибных волн

$$(12) \quad c_1 = \frac{\sigma a}{2\sqrt{1+\nu}} c_0 \left(1 - \frac{3+2\nu}{2} \frac{p^4}{\sigma^4} \right),$$

$$u_1 = \frac{\sigma a}{2\sqrt{1+\nu}} c_0 \left(1 - \frac{2}{3(3+2\nu)} \frac{p^4}{\sigma^4} \right),$$

* В работе [3] уравнение (9) получено при $\nu=0$ для продольно-изгибных волн (см. ниже формулу (20)). Вопреки сделанному в [3] утверждению, в области $p \ll \sigma$ учитывать отбрасываемые здесь члены не нужно ввиду их малости.

откуда следует, что $c_1 \ll c_0$, $u_1 \ll c_0$. Эти волны впервые рассматривались в работе [15] (однако без учета дисперсии, представленной вторым членом в скобках (12)), где указано, что их можно интерпретировать как продольные волны, бегущие вдоль оси симметрии цилиндрической пружины с малым шагом. Это видно из соотношений $|\sigma\zeta_0| \gg |\alpha_0| \gg |\varphi_0|$, следующих из формул (2) и (4) и показывающих, что в этих волнах преобладают смещения бинормали \mathbf{b} стержня. Таким образом, в указанном смысле пружина с шагом h ($\sigma h \ll 1$) эквивалентна прямому стержню с эффективным модулем Юнга $E_{\text{эфф}} = 2\pi r c_1^2 / \sigma h$.

Фазовые $c_{2,3}$ и групповые $u_{2,3}$ скорости низкочастотных крутильно-изгибных волн (11) будут

$$(13) \quad c_{2,3} = \frac{k}{\sigma} \left(1 \pm \frac{\sqrt{2+\nu}}{2} \frac{p^2}{\sigma^2} \right) c_0, \quad u_{2,3} = \frac{\sigma a}{\sqrt{2+\nu}} \left(\mp 1 + \frac{4+3\nu}{2\sqrt{2+\nu}} \frac{p^2}{\sigma^2} \right) c_0,$$

откуда следует, что $c_{2,3} \ll c_0$ и $|u_{2,3}| \ll c_0$. Направления этих скоростей совпадают у волны с меньшей фазовой скоростью и противоположны у волны с большей фазовой скоростью. При стремлении частоты к нулю фазовые скорости (13) стремятся к нулю, а групповые скорости — к пределам, равным $\mp \sigma a c_0 / (2+\nu)^{1/2}$. Наконец, длины рассматриваемых волн будут

$$(14) \quad \lambda_{2,3} = \frac{2\pi}{\delta_{2,3}} = 2\pi R \left(1 \pm \frac{\sqrt{2+\nu}}{2} \frac{p^2}{\sigma^2} + \frac{8+5\nu}{8} \frac{p^4}{\sigma^4} \right)$$

и при $\omega \rightarrow 0$ стремятся к конечному пределу — длине одного витка стержня. Пользуясь соотношениями, получаемыми в данном случае из формул (2) и (4): $|\sigma\zeta_0| \approx |\varphi_0| \approx |\alpha_0|$, а также формулами (14), нетрудно показать, что при прохождении рассматриваемых низкочастотных крутильно-изгибных волн (11) по цилиндрической пружине с малым шагом плоскости витков этой пружины будут поворачиваться, не изменяя своей формы, относительно плоскости своего невозмущенного положения. Отличие длин бегущих по пружине волн от длины ее витка (14) приведет к различию в направлениях осей, вокруг которых поворачиваются соседние витки. Угловая скорость поворота осей вращения витков пружины

$$(15) \quad \Omega_{2,3} = \frac{\lambda - 2\pi R}{2\pi R} \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{2+\nu}}{4\pi} \frac{p^2}{\sigma^2} \left(\pm 1 + \frac{8+5\nu}{4\sqrt{2+\nu}} \frac{p^2}{\sigma^2} \right) \omega,$$

откуда видно, что $|\Omega_{2,3}| \ll \omega$ (здесь $T = 2\pi/\omega$ — период волны). Этот поворот осей в свою очередь порождает на поверхности пружины квазипериодическую картину (фиг. 1), пространственный квазипериод которой H связан с шагом пружины формулой

$$(16) \quad H = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2+\nu} p^2} \left(1 \pm \frac{8+5\nu}{4\sqrt{2+\nu}} \frac{p^2}{\sigma^2} \right) h$$

откуда следует, что $H \gg h$ (в первом порядке пружина останется цилиндрической). Указанная периодическая картина будет со временем «накручиваться» на пружину, причем направление накручивания будет совпадать с направлением закрутки невозмущенной пружины, если направления фазовой и групповой скоростей у волны бегущей по пружине, противоположны (при этом $\lambda > 2\pi R$ (14)), и наоборот.

Перейдем теперь к рассмотрению продольно-изгибных волн, описываемых уравнением (1) и первыми двумя уравнениями системы (3). Решения этих уравнений примем в виде

$$\xi = \xi_0 e^{i\delta s}, \quad \eta = \eta_0 e^{i\delta s}, \quad \beta = \beta_0 e^{i\delta s},$$

что после подстановки в систему (3) приводит к следующей системе уравнений относительно ξ_0 и η_0 :

$$(17) \quad \begin{cases} 4(k^2 - \delta^2) \xi_0 - i\sigma\delta(4 - \sigma^2 a^2 + \delta^2 a^2) \eta_0 = 0, \\ -4i\sigma\delta \xi_0 + (\delta^4 a^2 - \sigma^2 \delta^2 a^2 + 4\sigma^2 - 4k^2 \pi) \eta_0 = 0. \end{cases}$$

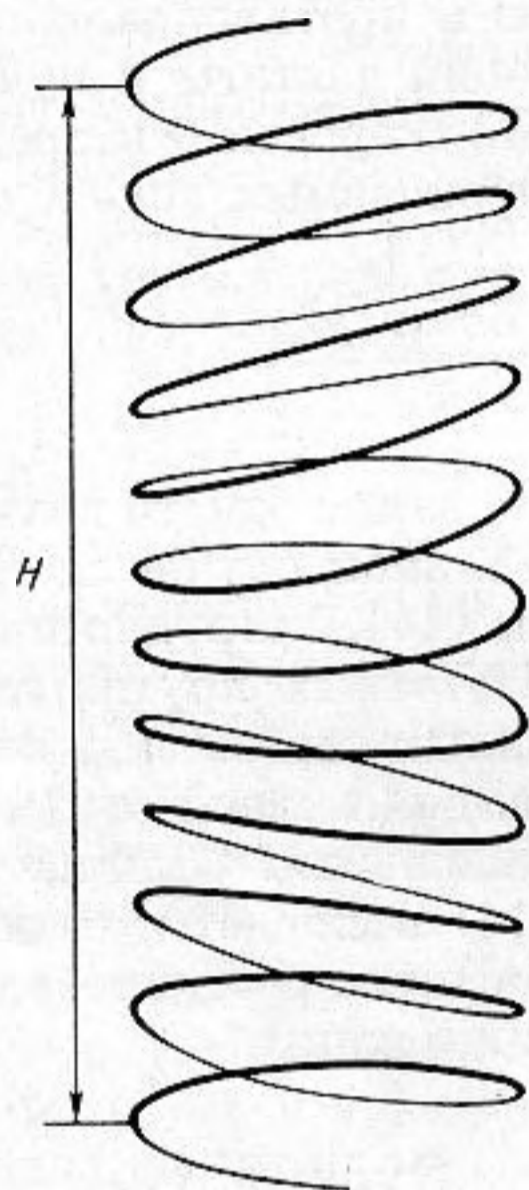
Положив равным нулю определитель этой системы, мы получим дисперсионное уравнение продольно-изгибных волн

$$(18) \quad \delta^6 - (2\sigma^2 + k^2) \delta^4 + (\sigma^4 - p^4) \delta^2 + p^4 (k^2 - \sigma^2) = 0.$$

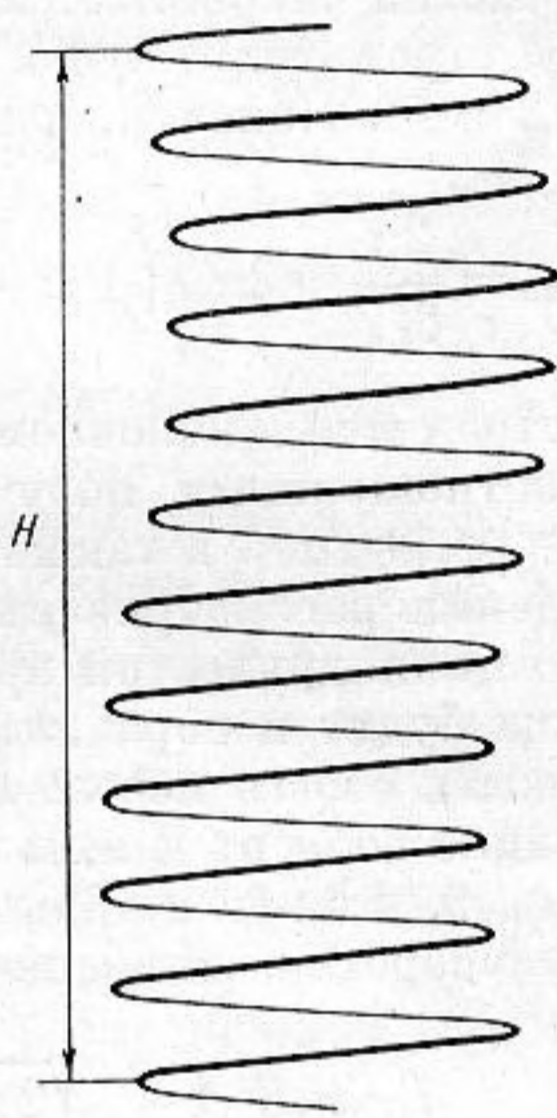
В области «высоких» частот это уравнение можно представить в виде

$$(19) \quad (\delta^2 - k^2 + \sigma^2) (\delta^4 - 3\sigma^2 \delta^2 - p^4) = 0,$$

где отброшены квадраты и более высокие степени величины $(\sigma/p)^2$. Из формулы (19) следует, что аналогично крутильно-изгибным волнам, в высокочастотной области существуют два невзаимодействующих между со-



Фиг. 1. Низкочастотная крутильно-изгибная волна длиной $\lambda < 2\pi R$ (14), бегущая по пружине



Фиг. 2. Низкочастотная продольно-изгибная волна длиной $\lambda < 2\pi R$ (14'), бегущая по пружине

бой типа волн: продольно-изгибные волны продольного типа (переходящие при $\sigma \rightarrow 0$ в продольные волны в прямом стержне) и продольно-изгибные волны изгибного типа (при $\sigma \rightarrow 0$ эти волны переходят в обычные изгибные волны в прямом стержне). Эти волны проанализированы в работе [14]. Экспериментальные данные о распространении волн продольного и крутильного типов в цилиндрической пружине с малым шагом опубликованы в работах [10–13], где проведено также сопоставление эксперимента и теории, подтвердившее выводы последней.

В работе [3] показано, что в интервале частот, удовлетворяющих неравенству $0,58 < p/\sigma < 2,05$, уравнение (18) имеет лишь два действительных корня. При увеличении частоты они, как нетрудно показать, переходят в корни $\delta^2 = p^2 + \frac{3}{2}\sigma^2$, соответствующие продольно-изгибным волнам изгибного типа (или «квазиизгибным» волнам в терминологии работы [3]). При $p/\sigma < 0,58$ все корни (18) действительны, поэтому, как и при анализе крутильно-изгибных волн, ограничимся «низкими» частотами, для которых

уравнение (18) можно свести к виду

$$(20) \quad \delta^6 - 2\sigma^2\delta^4 + (\sigma^4 - p^4)\delta^2 - p^4\sigma^2 = 0,$$

совпадающему с уравнением (9) при $\nu=0$. В дальнейшем для сокращения записи будем пользоваться уже приведенными формулами, причем ссылка на номер формулы, снабженная штрихом, будет означать, что имеется в виду формула с тем же номером без штриха, в которой следует положить $\nu=0$ (например, формулу (20) можно обозначить (9')).

Отбрасывая пятые и более высокие степени отношения p/σ , корни (20) можно представить в виде (10') и (11'). Волны (10') распространяются с фазовыми и групповыми скоростями (12'), слабо зависящими от частоты. Впервые эти волны (без учета дисперсии) рассматривались в работе [15], где указано, что их можно интерпретировать как крутильные волны в цилиндрической пружине, рассматриваемой в целом как прямой стержень. Действительно, смещения в этих волнах связаны соотношениями $\beta_0 = \sigma\xi_0(1 - p^4/\sigma^4)$, $|\eta_0| = (p^2/\sigma^2)|\xi|$, означающими, что каждый виток стержня, не изменяя своей формы, поворачивается вокруг своей оси симметрии, перпендикулярной плоскости витка. Эффективный модуль сдвига прямого стержня, эквивалентного в указанном смысле цилиндрической пружине с малым шагом h , равен $\mu_{\text{эфф}} = 2\pi r c_1^2 / \sigma h$, где c_1 находится по формуле (12').

Известно, что цилиндрические пружины используются в качестве линий задержки в приборах искусственной реверберации [16], причем расчет таких линий до сих пор проводился с помощью теории фильтров. Результаты, полученные с помощью этой теории для волн, интерпретируемых как крутильные волны в пружинах [16], хорошо совпадают с точными результатами, полученными здесь. В частности, «частота среза» пружины, рассматриваемой как низкочастотный фильтр крутильных колебаний, $f_{\text{ср}} = ac_0 / 4\pi^2 R^2$, практически совпадает с верхней границей «низкочастотной области» $f_v = 1,06 f_{\text{ср}}$ (f_v получается из уравнения $p^2/\sigma^2 = 0,58^2$), а время пробега крутильной волны вдоль одного витка стержня, получаемое с помощью (12'), $t = 2\pi R / u_1 = (1 + 0,46 f^2 / f_{\text{ср}}^2) / \pi f_{\text{ср}}$ (здесь $f = 2\pi\omega$), почти не отличается от величины $t = (1 + f^2 / 2f_{\text{ср}}^2) / \pi f_{\text{ср}}$ [16].

В работах [17, 18] были сделаны попытки с помощью чисто качественных рассуждений найти соотношение между числом витков спирали и длиной крутильной волны (10') на частоте среза, которое авторы этих работ использовали для физической интерпретации волны (10'). Учитывая качественный характер рассуждений авторов [17, 18], а также возникшие разногласия, представляется интересным найти точное значение указанного соотношения.

Обозначив через n искомое число витков спирали, на частоте среза получим соотношение $\lambda_1 = 2\pi R n = 2\pi n / \sigma$, где длина крутильных волн λ_1 находится по формуле $\lambda_1 = 2\pi / \delta_1$ (для определения δ_1 см. (10')), а частота среза — из условия $p^4/\sigma^4 = 0,11$. Из этого соотношения получаем $n = \sigma\lambda_1 / 2\pi = (\sigma^2/p^2)(1 - 3p^4/2\sigma^4) = 2,47$ (в работах [17, 18] для n приведены соответственно значения 4 и 2).

Переходя к рассмотрению продольно-изгибных волн (11'), отметим, что они обладают теми же особенностями, что и соответствующие им низкочастотные крутильно-изгибные волны (11). В частности, их длины находятся по формулам (14'), а фазовые и групповые скорости — по формулам (13'). Внешнюю картину поведения стержня при прохождении по нему низкочастотных продольно-изгибных волн (11') можно представить себе, если принять во внимание соотношения, получаемые из (1) и (17). Они показывают, что каждый виток стержня смещается как целое в плоскости своей невозмущенной оси, причем отличие длин рассматриваемых волн от длины дуги витка (14') приводит к различию в направлениях, вдоль которых смещаются соседние витки. Угловая скорость поворота этих направлений Ω может быть найдена по формуле (15').

На фиг. 2 показана «мгновенная фотография» пружины, по которой бежит одна из низкочастотных продольно-изгибных волн (11'), длина которой $\lambda < 2\pi R$, а фазовая скорость $c_3 = (\omega/\sigma)(1 - p^2/\sqrt{2}\sigma^2)$. Направление закрутки «винта», создаваемого волной на пружине (фиг. 2), будет зависеть от длины волны: направления закруток винта и пружины совпадают для волн с $\lambda > 2\pi R$ и противоположны для волн с $\lambda < 2\pi R$ (14'). Шаг H создаваемого винта связан с шагом пружины формулой (16').

Отметим, что в работе [19] описаны «поляризационные» эксперименты с пружиной, в качестве которой использовалась американская игрушка «slinky». Судя по способу возбуждения пружины и словесному описанию возникающей на ней при этом винтовой картины, в работе [19] рассматривались низкочастотные продольно-изгибные волны (11'). Можно показать, однако, что эти волны (а также волны (11)) не являются волнами, поляризованными по кругу по отношению к оси пружины, что, казалось бы, следует из приведенных рассуждений и фиг. 1 и 2. По этой причине при одновременном возбуждении в пружине двух волн (11') с одинаковыми амплитудами, но разными длинами (14') «суммарная» волна не будет линейно поляризованной, а самой пружине нельзя в строгом смысле приписывать гиrotропных свойств, так что эксперименты, описанные в работе [19], носят чисто иллюстративный характер.

В заключение автор благодарит М. А. Исаковича, М. А. Миронова и Э. И. Копыл, советами которых автор воспользовался.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Kagawa. On the dynamic properties of helical springs of finite length with small pitch. J. Sound Vibr., 1968, 8, 1-15.
2. K. K. Pujara, Y. Kagawa. Phase velocities and displacement characteristics of free waves along a helical spring. J. Acoust. Soc. Japan, 1970, 26, 12, 555-561.
3. В. А. Смирнов, Б. Д. Тартаковский. К вопросу о распространении колебаний в изогнутых стержнях. Шестая Всесоюзная акустическая конференция. М., 1968, МИИ6.
4. K. F. Graff. Elastic wave propagation in a curved sonic transmission lines. IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics, 1970, 17, 1, 1-6.
5. G. H. Hubner, D. Mewes, K. Palow. Propagation of structure borne waves in helical springs for reverberation devices. Proc. 7-th Int. Acoust. Cong., v. 2, Budapest, 1971, 669-672.
6. J. W. Phillips, F. B. Crowley III. On the theory of pulse propagation in curved beams. J. Sound Vibr., 1972, 24, 2, 247-258.
7. D. W. Haines, C. H. Huang. Dispersion of elastic waves in a helical coil. Proc. 7-th Int. Acoust. Cong., v. 4, Budapest, 1971, 321-324.
8. D. W. Haines, C. H. Huang. Wave propagation in elastic rings and helical coils of small pitch. J. Acoust. Soc. America, 1974, 55, 6, 1138-1143.
9. D. W. Haines. Approximate theories for wave propagation and vibrations in elastic rings and helical coils of small pitch. Int. J. Solids Structures, 1974, 10, 12, 1405-1416.
10. N. P. Suh. Helical coils as impact load dispersers. J. Eng. Ind. Trans. ASME, 1970, 92 (ser. B), 1, 197-207.
11. L. Filipczynski. Propagation of ultrasonic waves in spirals. Proc. Vibr. Probl. (Warsaw), 1962, 3, 3 (12), 241-251.
12. W. G. Britton, G. O. Langley. Stress pulse dispersion in curved mechanical waveguides. J. Sound Vibr., 1968, 7, 3, 417-430.
13. W. G. Britton, G. O. Langley. Stress pulse dispersion in helical springs. J. Sound Vibr., 1971, 18, 2, 247-259.
14. М. А. Исакович, Л. Н. Комарова. Продольно-изгибные волны в тонких стержнях. Акуст. ж., 1967, 13, 4, 579-583.
15. W. H. Wittrick. On elastic wave propagation in helical springs. Int. J. Mech. Sci., 1966, 8, 1, 24-47.
16. Ю. А. Индлин. Новая модель пружинного ревербератора. Техника кино и телевидения, 1966, 4, 39-43.
17. H. E. Meineta, H. A. Johnson, W. C. Laube. A new reverberation device for high fidelity systems. J. Audio Eng. Soc., 1961, 9, 4, 287.
18. Ю. А. Индлин. О выборе электрического аналога пружинного ревербератора. Техника кино и телевидения, 1967, 12, 36.
19. Ф. Крауфорд. Волны (Берклевский курс физики, т. 3). М., «Наука», 1974, гл. 8.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
10 ноября 1975 г.
После переработки
19 апреля 1976 г.