

УДК 534.26

**О РАСПРОСТРАНЕНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ
В ТОНКОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ**

В. А. Вешев, И. И. Клюкин, Д. П. Коузов, В. Д. Лукьянов

Проведено теоретическое исследование волновых процессов в упругой пластине постоянной ширины. Исследовано влияние поглощения энергии на спектр нормальных волн. Определено количество энергии, переносимой отдельными волнами при возбуждении пластины силой постоянной линейной плотности, приложенной в некотором перпендикулярном сечении пластины.

Исследованию вопроса о возбуждении нормальных волн в тонкой упругой пластине, две кромки которой свободны от напряжений, посвящены работы [1-3]. В [1] получены дисперсионные уравнения для симметричных и антисимметричных колебаний и рассмотрены распространяющиеся волны первых номеров. В работе [2] рассмотрены колебания тонкой упругой полосы при возбуждении некоторой линейной силой, симметрично распределенной в перпендикулярном сечении пластины, и при возбуждении точечной силой, приложенной в центре пластины. В работе [3] проведено исследование волновых чисел неоднородных волн в полосе постоянной ширины, получены выражения для потока колебательной энергии, переносимой нормальными волнами, и соотношение типа ортогональности для нормальных волн. Найдено выражение для поля изгибных смещений упругой полосы при возбуждении произвольной силой.

Ниже определяется поле смещений упругой полосы, вызванное действием силы постоянной линейной плотности, действующей в некотором перпендикулярном сечении пластины.

Разместим ось Oy декартовой системы координат вдоль средней линии пластины шириной $2a$. Пластина возбуждается источником постоянной линейной плотности F , действующим в сечении $|x| \leq a, y=0$.

Искомое смещение пластины $V=V(x, y)$ должно удовлетворять неоднородному уравнению Кирхгофа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 V(x, y) - \kappa^4 V(x, y) = \frac{F}{D} \delta(y)$$

$$(-a < x < a; -\infty < y < +\infty),$$

принципу предельного поглощения и граничным условиям

$$(1) \quad \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 V(x, y)}{\partial x^3} + (2-\sigma) \frac{\partial^3 V(x, y)}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

$(x = \pm a; -\infty < y < +\infty),$

Здесь $\kappa = (\omega^2 \rho / D)^{1/4}$ — волновое число изгибных волн в пластине, E — модуль Юнга, h — толщина пластины, $2a$ — ширина пластины, ω — круговая частота. Множитель $\exp(-i\omega t)$, определяющий зависимость процессов от времени t , всюду опущен. Условия (1) означают отсутствие на кромках пластины перерезывающей силы и изгибающего момента.

Представление поля $V(x, y)$ в виде суммы нормальных волн может быть найдено известными способами [2, 3]. Оно имеет вид

$$(2) \quad V(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l(x) \exp(i\mu_l |y|),$$

$$w_l(x) = K_1(\mu_l) \operatorname{ch}[\gamma_1(\mu_l)x] - K_2(\mu_l) \operatorname{ch}[\gamma_2(\mu_l)x],$$

$$K_{1,2}(\mu) = iF\sigma\mu^2\gamma_{2,1}A_{1,2} \operatorname{sh}(\gamma_{2,1}x) / D\gamma_1^2\gamma_2^2 \frac{d\Delta(\mu)}{d\mu},$$

$$\Delta(\mu) = \gamma_2 A_1^2 \operatorname{sh}(\gamma_2 a) \operatorname{ch}(\gamma_1 a) - \gamma_1 A_2^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 a) \operatorname{ch}(\gamma_2 a),$$

$$A_1 = (1-\sigma)\mu^2 - \kappa^2, \quad A_2 = (1-\sigma)\mu^2 + \kappa^2,$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\mu^2 - \kappa^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\mu^2 + \kappa^2}.$$

Суммирование здесь производится по тем корням уравнения $\Delta(\mu_l)$, для которых $0 \leq \arg \mu_l < \pi$.

В дальнейшем окажется целесообразным сравнить найденное волновое поле $V(x, y)$ с полем $v_0(y)$ изгибных волн, возбужденных бесконечно протяженным линейным источником той же плотности в безграничной пластине

$$v_0(y) = \frac{F}{4D\kappa^3} [i \exp(i\kappa|y|) - \exp(-\kappa|y|)].$$

В дальней от места приложения силы зоне имеем

$$v_0(y) \sim \frac{F}{4D\kappa^3} \exp(i\kappa|y|).$$

Значения μ_l , при которых $\Delta(\mu_l) = 0$, представляют собой волновые числа нормальных волн в рассматриваемом механическом волноводе [1]. При комплексных κ ($\operatorname{Im} \kappa > 0$) все эти волновые числа являются комплексными. При $\operatorname{Im} \kappa = +0$ некоторые из μ_l становятся вещественными. Они соответствуют распространяющимся нормальным волнам. Прочие μ_l являются волновыми числами нормальных волн, сосредоточенных вблизи источника возбуждения.

Для исследования корней дисперсионного уравнения

$$\Delta(\mu) = 0$$

введем безразмерные величины $\xi = \mu/\kappa$ и $\alpha = \kappa a$. В этих переменных уравнение (3) примет вид

$$(3) \quad \Delta_0(\xi) = \kappa^5 \Delta(\mu) = [1 - \xi^2(1-\sigma)]^2 \operatorname{ch}(\sqrt{\xi^2 - 1}\alpha) \operatorname{sh}(\sqrt{\xi^2 + 1}\alpha) - [1 + \xi^2(1-\sigma)]^2 \operatorname{ch}(\sqrt{\xi^2 + 1}\alpha) \operatorname{sh}(\sqrt{\xi^2 - 1}\alpha) = 0.$$

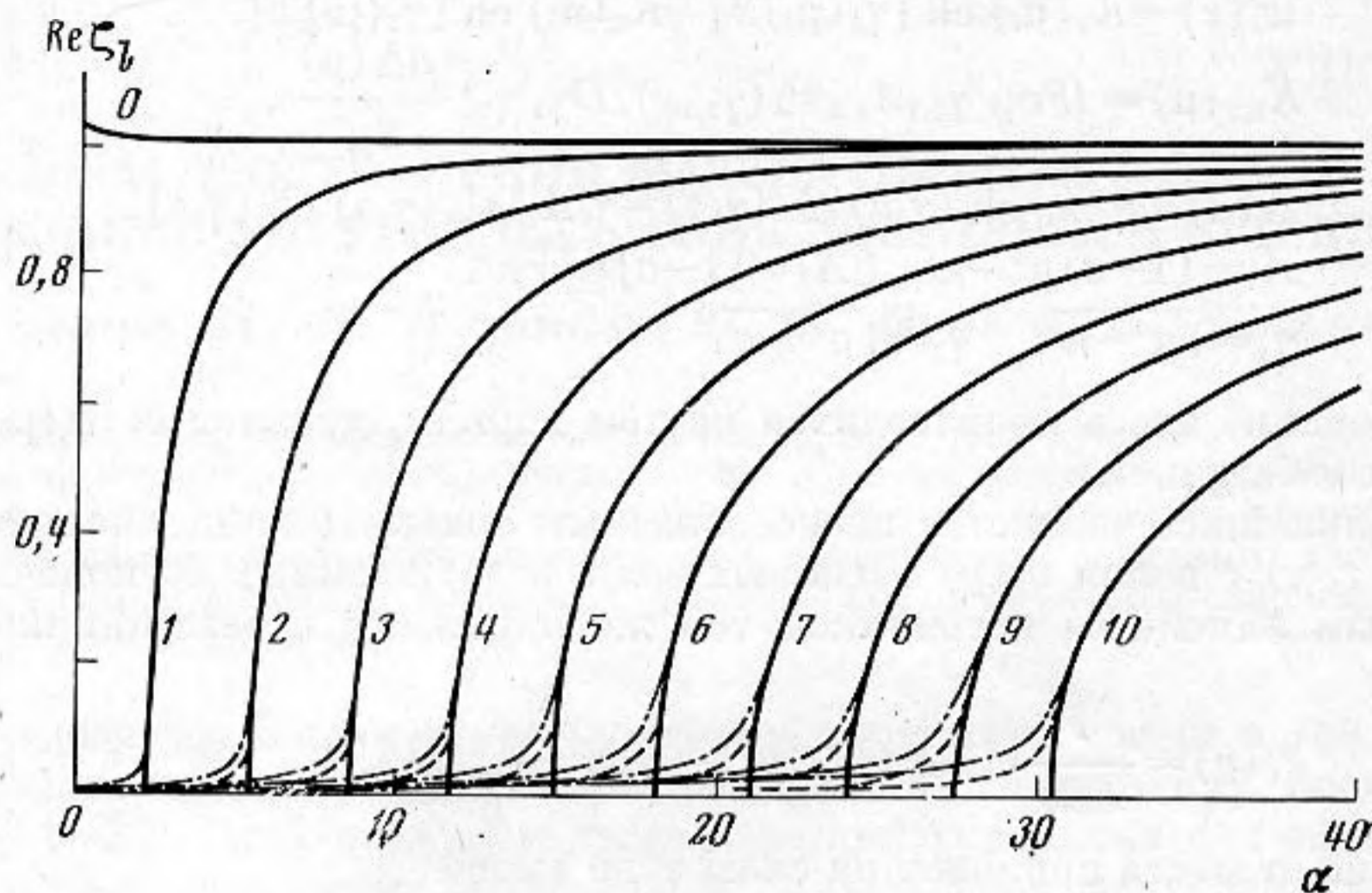
Для учета поглощения энергии в материале пластины будем считать модуль Юнга комплексным $E = E_0(1 - i\eta)$; η имеет смысл коэффициента потерь. Тогда для волнового числа изгибных волн в пластине получим $\kappa \approx \kappa_0(1 + i0,25\eta)$.

Результаты вычислений корней $\xi_l(\alpha)$ для стальной пластины ($\sigma = 0,3$) с учетом потерь приведены на фиг. 1, 2. Цифровой индекс l означает порядковый номер распространяющейся нормальной волны в полосе.

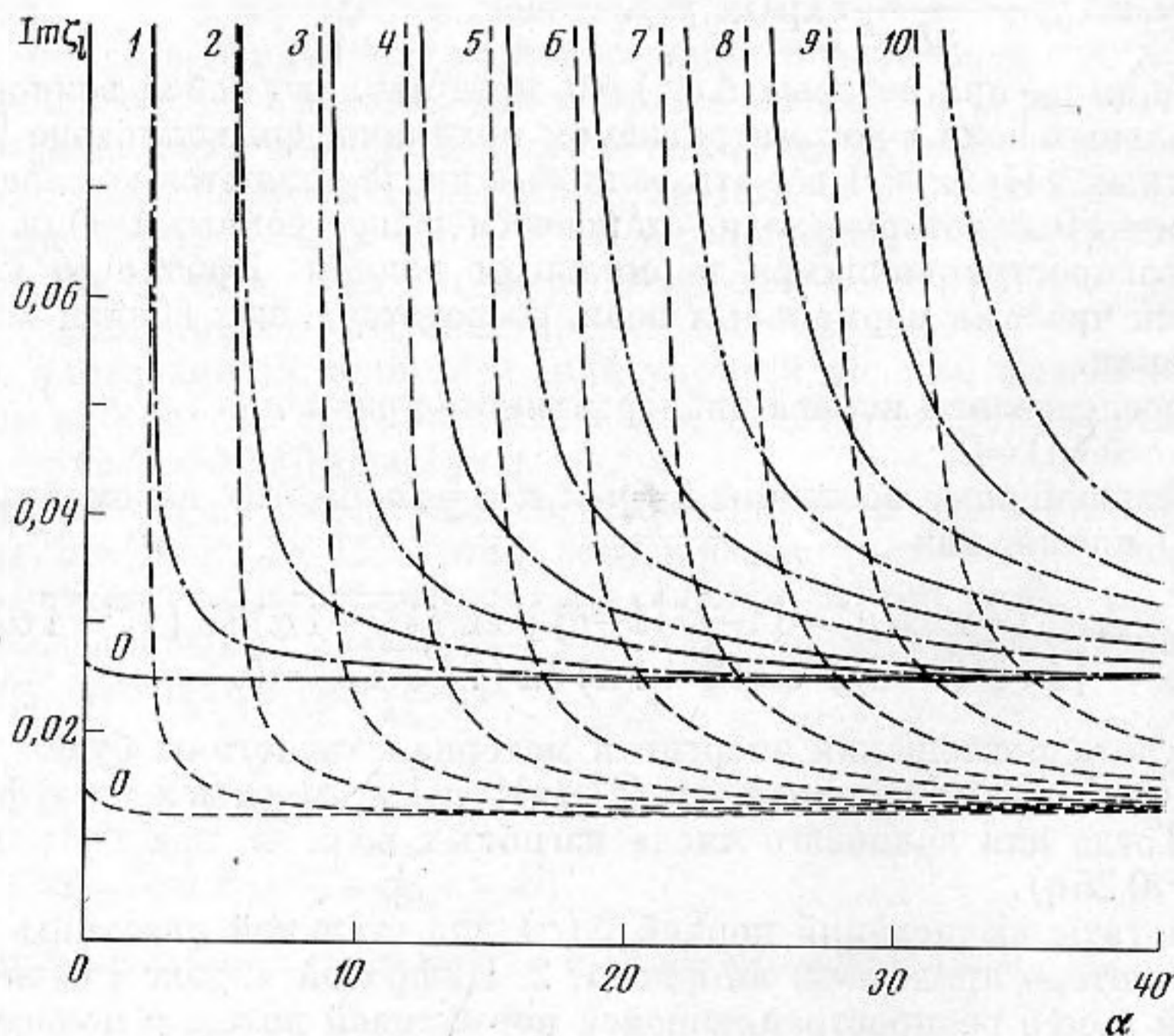
Фигура 1 показывает зависимость $\operatorname{Re} \xi_l$ от безразмерной ширины волновода. Сплошная линия относится к случаю отсутствия поглощения ($\eta = 0$), штриховая и штрихпунктирная соответствуют значениям $\eta = 0,05$ и $\eta = 0,1$. Отметим, что для малых η значения $\operatorname{Re} \xi_l$ близки к соответственным значениям вещественных корней уравнений (3). Исключение составляют лишь участки зарождения нормальных волн (малые $\operatorname{Re} \xi_l$).

Зависимость $\operatorname{Im} \xi_l(\alpha)$ приведена на фиг. 2. Для каждой нормальной волны в полосе в момент зарождения волны их затухание $\operatorname{Im} \xi_l(\alpha)$ наиболее сильно, с ростом α $\operatorname{Im} \xi_l(\alpha)$ уменьшается таким образом, что затухание уже «зародившихся» мод выравнивается.

Особый интерес представляет волна с номером $l=0$. Она до некоторой степени аналогична нулевой (поршневой) волне в акустическом волноводе с идеально жесткими стенками. Как и поршневая волна, она существует (т. е. является распространяющейся) при любой ширине волновода, однако она имеет ту принципиальную отличительную особенность, что фазовая скорость ее меньше скорости изгибной волны в пластине. Ее без-



Фиг. 1. Зависимость $\text{Re } \zeta_l$ от α

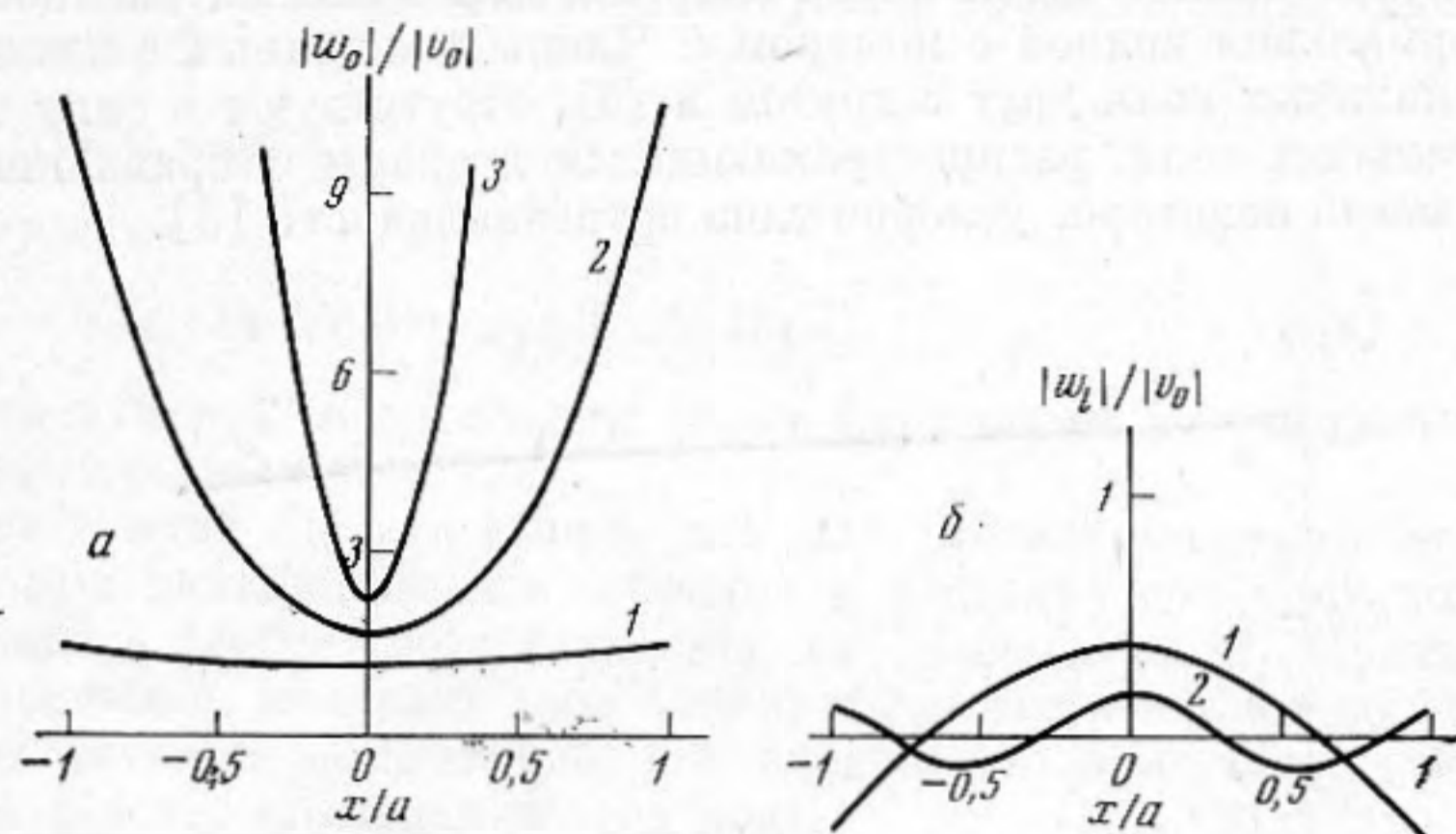


Фиг. 2. Зависимость $\text{Im } \zeta_l$ от α

размерное волновое число ζ_0 при отсутствии поглощения или $\text{Re } \zeta_0$ при наличии потерь, как видно из фиг. 1, все время превосходит единицу.

На фиг. 3а приведены профили этой волны ($\eta=0$) для стальной пластины с безразмерной шириной $2\alpha=2,0, 8,0, 20,0$ (соответственно кривые 1, 2, 3). Из приведенных графиков следует, что нормальная волна, подобно поршневой волне в акустическом волноводе с идеально жесткими стенками, не имеет узлов и при малых α профиль ее близок к профилю

поршневой волны. Однако при росте безразмерной ширины волновода 2α профиль ее начинает сильно изменяться. Для достаточно широкого волновода (или, что то же самое, для достаточно высокой частоты) нулевая волна приобретает отчетливо выраженный кромочный характер, т. е. ее распространение сопровождается все более интенсивными колебаниями краев по сравнению с колебаниями серединой области пластины.



Фиг. 3. Профили нормальных волн: а — нулевой, б — первой и второй

Полезно рассмотреть следующие предельные переходы: $\alpha \rightarrow 0$, при этом $\zeta_0 = (1 - \sigma^2)^{-1/4}$, что соответствует волновому числу изгибных колебаний стержня; $\alpha \rightarrow \infty$, при этом

$$\zeta_0 = [(1 - \sigma)(3\sigma - 1 + 2\sqrt{1 - 2\sigma + 2\sigma^2})]^{-1/4},$$

что соответствует волновому числу кромочной волны «релеевского типа», указанного в работе [4]. В силу этого обстоятельства мы будем для нулевой волны использовать также термин «кромочная волна», оправданный для достаточно больших величин α .

На фиг. 3, б приведены профили распространяющихся нормальных волн с номерами $l=1, 2$ при значении безразмерной ширины волновода $2\alpha=20$.

Обратимся теперь к вопросу о колебательной энергии, переносимой вдоль пластины различными нормальными волнами. Выяснение этого важно, в частности, для выбора оптимального демпфирования вибраций, распространяющихся в упругой полосе, поскольку целесообразно воздействовать в первую очередь на те волны, которые переносят большую часть колебательной энергии.

Для усредненного по времени потока колебательной энергии $\langle \Pi \rangle$, переносимого вдоль пластины, мы имеем [3] выражение

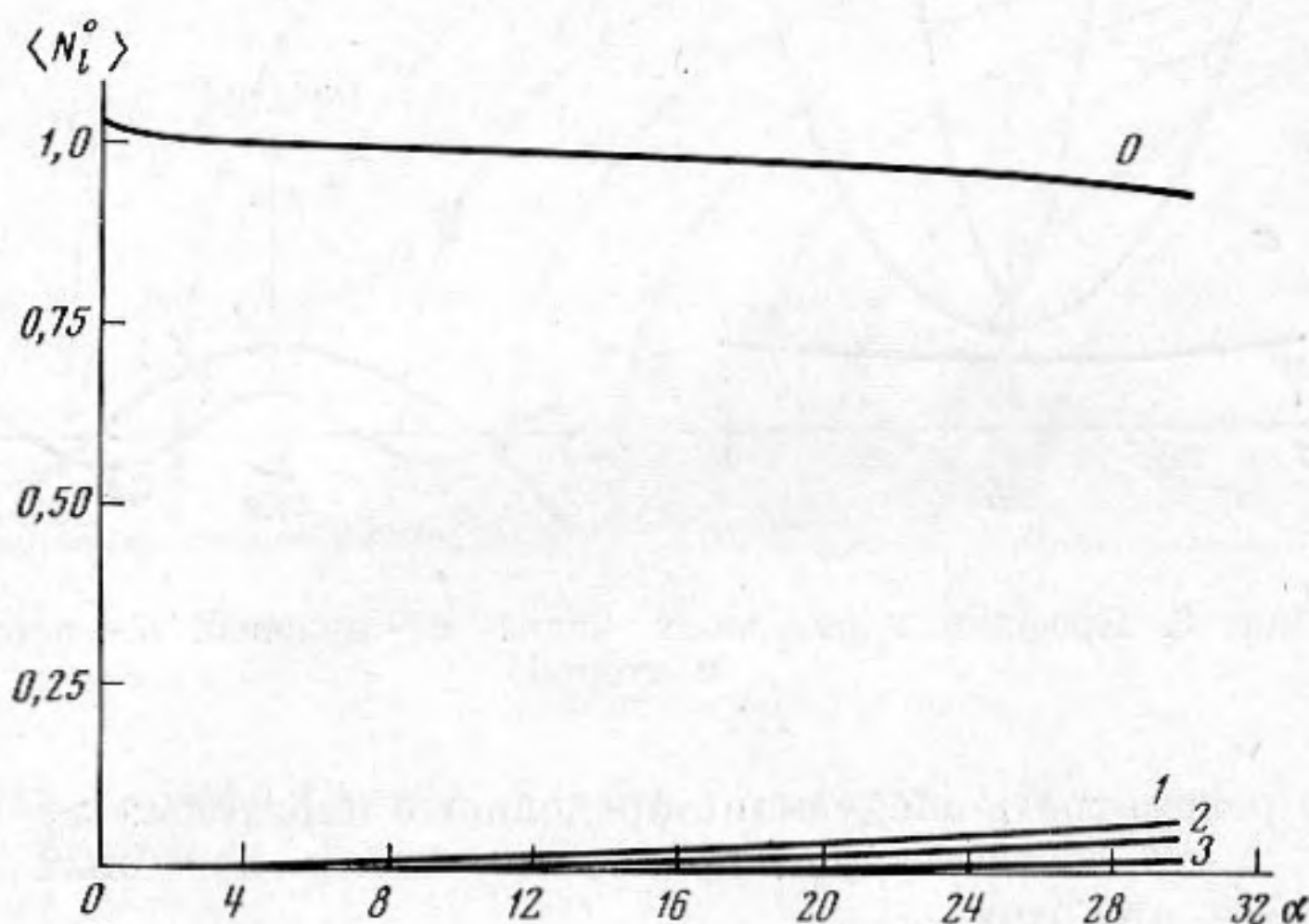
$$(4) \quad \langle \Pi \rangle = D\omega(1 - \sigma) \operatorname{Im} \bar{V} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \\ - \frac{1}{2} D\omega \operatorname{Im} \int_{-a}^a \left\{ \bar{V} \left[\frac{\partial^3 V}{\partial y^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 V}{\partial y \partial x^2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial \bar{V}}{\partial y^2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] \right\} dx.$$

Черта сверху означает знак комплексного сопряжения.

Если полное поле $V(x, y)$ представлено в виде разложения по нормальным волнам, то общий поток энергии может быть определен по формуле

$$\langle \Pi \rangle = \sum_l \langle N_l \rangle,$$

где $\langle N_l \rangle$ представляет собой поток энергии, переносимый распространяющейся нормальной волной с номером l . Члены, связанные с взаимодействием нормальных волн друг с другом в (4), отсутствуют в силу того, что для нормальных волн, распространяющихся в одном направлении, должно иметь место некоторое условие типа ортогональности [3].



Фиг. 4. Зависимость безразмерной величины потока энергии $\langle N_l^0 \rangle$, переносимой нормальной волной с номером l , от α

В интересующем нас случае возбуждения пластины силой постоянной линейной плотности

$$\langle N_l \rangle = D\omega\mu_l \{ K_2^2(\mu_l) R_1(\mu_l) - K_1^2(\mu_l) R_2(\mu_l) - K_1(\mu_l) K_2(\mu_l) [r_1(\mu_l) + r_2(\mu_l)] \},$$

$$R_n(\mu) = a\kappa^2 + \frac{\text{sh}(2\gamma_n a) [\kappa^2 - 2(-1)^n (1-\sigma)\gamma_n^2]}{2\gamma_n}, \quad n=1, 2,$$

$$r_{1,2}(\mu) = 2(1-\sigma)\gamma_{1,2} \text{sh}(\gamma_{1,2} a) \text{ch}(\gamma_{2,1} a).$$

Результаты вычисления потоков колебательной энергии для различных нормальных волн при отсутствии затухания приведены на фиг. 4, где изображена зависимость безразмерной величины потока энергии $\langle N_l^0 \rangle$, переносимой волной с номером l , от безразмерной полуширины волновода α . Здесь

$$\langle N_l^0 \rangle = \langle N_l \rangle / 2a \langle n_0 \rangle,$$

$\langle n_0 \rangle$ представляет собой линейную плотность потока энергии, переносимой волной $v_0(y)$ в пластине бесконечной ширины:

$$\langle n_0 \rangle = F^2 \omega / 16\kappa^3 D.$$

Как видно из фиг. 4, поршневая волна оказывается в общем потоке колебательной энергии доминирующей. Однако следует подчеркнуть, что для иного способа возбуждения указанная картина может существенно измениться, поскольку тот факт, что на частоте своего «зарождения» мода, отличная от поршневой, не участвует в переносе энергии, является спе-

цифическим для данного случая. Для сравнения полезно вспомнить, что в акустическом волноводе с абсолютно жесткими стенками сила, равномерно распределенная по поперечному сечению волновода, вообще не возбудила бы волн, отличных от поршневой.

На основании формулы (4) можно точно учесть влияние поглощения в материале пластины на распространение колебательной энергии. Из фиг. 2 видно, что для частот, достаточно превосходящих частоту зарождения данной волны

$$\operatorname{Im} \mu_i \approx \operatorname{Im} \kappa$$

и, следовательно,

$$\langle N_i(y) \rangle \approx \langle N_i(0) \rangle \exp(-2y \operatorname{Im} \kappa),$$

причем для нулевой моды обеими этими формулами можно пользоваться практически при всех частотах.

В целом можно сделать вывод, что для рассматриваемого вида возбуждения при демпфировании вибрации в пластине конечной ширины в первую очередь следует воздействовать на нулевую моду. Прочие моды могут существенно проявить себя (ввиду того, что реальное возбуждение всегда отличается от рассматриваемого идеального) лишь вблизи резонансных частот (частот зарождения этих мод).

На низких частотах нулевая волна имеет поршневой характер, и демпфировать поэтому следует всю поверхность пластины равномерно. Для более высоких частот нулевая волна сопровождается интенсивными колебаниями краев пластины, поэтому в таком случае при демпфировании целесообразно более сильно воздействовать на края пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. К. Коненков. О нормальных волнах при изгибных колебаниях пластинки. Акуст. ж., 1960, 6, 1, 57-64.
2. Ю. К. Коненков, Н. И. Наумкина, Б. Д. Тартаковский. Исследование вынужденных изгибных колебаний упругой полосы. Акуст. ж., 1965, 11, 3, 341-350.
3. Ю. И. Бобровицкий, М. Д. Генкин. Колебания упругой полосы. Сб. Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций. М., «Наука», 1975, 12-42.
4. Ю. К. Коненков. Об изгибной волне рэлеевского типа. Акуст. т., 1960, 6, 1, 124-126.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова, физический факультет
Научно-исследовательский физический институт

Поступила
1 декабря 1975 г.
После исправления
10 мая 1976 г.