

УДК 534.231.1:548

**ПОПЕРЕЧНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ АНИЗОТРОПНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

*И. А. Викторов, П. А. Пятаков*

Рассмотрено распространение поперечных поверхностных волн на цилиндрических поверхностях анизотропного твердого тела в направлении, перпендикулярном образующей цилиндра. Получены асимптотические решения, соответствующие нормальным волнам на цилиндрических поверхностях радиуса много большего длины объемной поперечной волны. Обсуждаются свойства этих волн и вопрос об их рассеянии.

В целом ряде практических случаев, например для осуществления длительной задержки радиоимпульса в ультразвуковой линии задержки или в фильтре сжатия на кристалле небольших размеров, желательно и удобно иметь возможность осуществить «спиральное» или обычное многократное распространение поверхностных волн по цилиндрической поверхности кристалла в направлении, перпендикулярном образующей. В настоящее время теоретически исследовано распространение поверхностных волн на цилиндрических поверхностях изотропного твердого тела [1, 2] и в некоторых особых срезам кристаллов, где могут существовать точные решения задачи, соответствующие поверхностным волнам, с неизменяющимися по

Система	Класс	Ориентация оси цилиндра
Моноклинная	Все классы	$x_2$
Ромбическая	»	$x_1, x_2, x_3$
Тетрагональная	$4mm, 422,$ $42m, 4/mmm$	$x_1, x_2$
Тригональная	$32, 3m$ $\bar{3}m$	$x_1$
Кубическая	Все классы	Ось типа [110]
Гексагональная	»	$x_1, x_2$

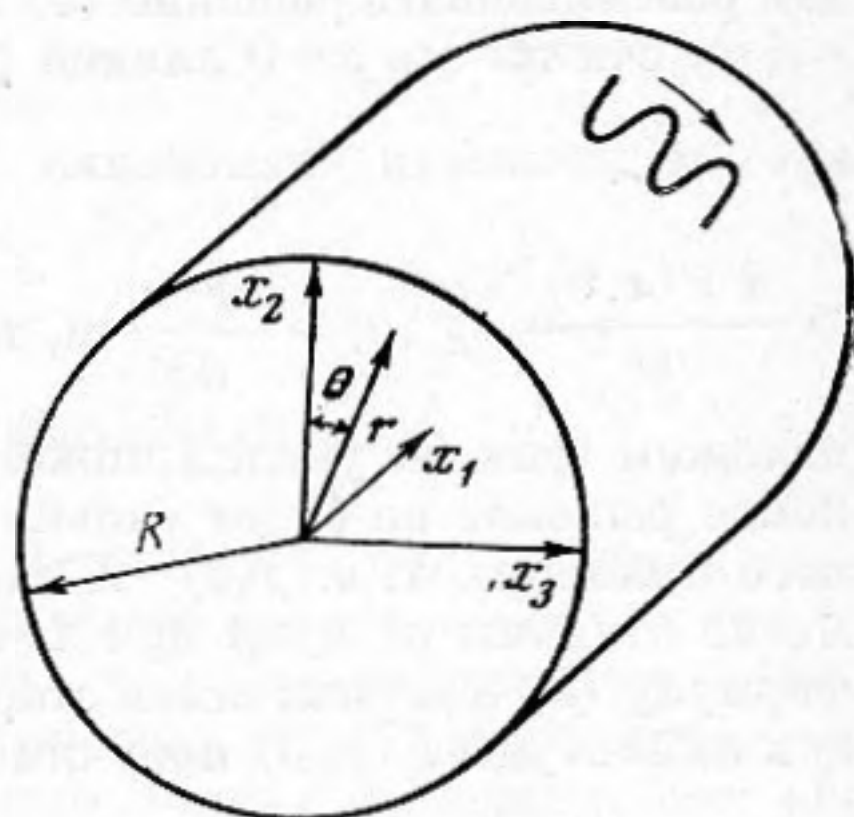
угловой координате параметрами [3, 4]. Эффекты анизотропии при распространении поверхностных волн по цилиндрическим поверхностям, насколько нам известно, теоретически не рассматривались, в то время как в практически важных случаях они весьма существенны, поскольку часто в линиях задержки используются кристаллы, поверхностные волны в которых нельзя описать указанными точными решениями [5].

Ниже проведен теоретический анализ поперечных поверхностных волн, поляризованных в направлении образующей цилиндра, на выпуклой и вогнутой цилиндрических поверхностях. Волны данного типа являются простейшим примером поверхностных волн на цилиндрических поверхностях кристаллов, в которых проявляются эффекты анизотропии. Условием их существования является такая ориентация оси цилиндра относительно кристаллографических осей, при которой любое направление в плоскости перпендикулярной оси цилиндра есть поперечная нормаль.

Можно показать, что для этого необходимо и достаточно, чтобы матрица модулей упругости в системе координат, где ось  $x_1$  совпадает с осью цилиндра имела: а) модули  $c_{52}=c_{53}=c_{54}=c_{62}=c_{63}=c_{64}=0$ , б)  $c_{55} \neq c_{66}$  (если  $c_{55}=c_{66}$ , то поперечные поверхностные волны тождественны волнам в изотропном цилиндре). Для удовлетворения условия а) достаточно совпадения оси  $x_1$  с осью симметрии второго порядка или с нормалью к плоскости симметрии. На основе этих условий составлена таблица возможных ориентаций оси цилиндра для кристаллов различных симметрий. В таблице и везде далее  $x_1, x_2, x_3$  — кристаллофизические оси координат. Влиянием пьезоэффекта в тех классах кристаллов, где он возможен, мы пренебрегали.

Система уравнений движения в кристалле при выполнении упомянутых условий а) и б) для смещений частиц  $U$  в направлении, параллельном оси цилиндра (считаем для определенности кристалл тетрагональным, ось цилиндра  $x_1$  и  $\partial/\partial x=0$ ), сводится к одному уравнению вида

$$(1) \quad \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c_{66} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + c_{44} \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}$$



Фиг. 1. Геометрия задачи при распространении волны по цилиндру

где  $\rho$  — плотность кристалла,  $c_{66}, c_{44}$  — модули упругости. Граничные условия — равенство нулю механических напряжений на поверхности цилиндра — с учетом того, что отличными от нуля являются только компоненты  $T_{12}=c_{66} \frac{\partial U}{\partial x_2}$  и  $T_{13}=c_{44} \frac{\partial U}{\partial x_3}$ , приводятся к виду

$$(2) \quad c_{66} \cos \theta \frac{\partial U}{\partial x_2} + c_{44} \sin \theta \frac{\partial U}{\partial x_3} \Big|_{r=R} = 0,$$

где  $r, \theta$  — радиальная и угловая координаты,  $R$  — радиус цилиндра (фиг. 1).

Будем рассматривать гармонические волны с циклической частотой  $\omega$ , опуская фактор  $e^{-i\omega t}$ . Учитывая геометрию задачи, уравнения (1) и (2) напишем в цилиндрической системе координат ( $x_1=z, x_2=r \cos \theta, x_3=r \sin \theta$ ), вводя безразмерную координату  $x = \omega \sqrt{\rho/c_{44}} r = kr$ ,

$$(3) \quad m(\theta) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{n(\theta)}{x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{q(\theta)}{x} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} + \frac{n(\theta)}{x} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{q(\theta)}{x^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + U = 0,$$

$$(4) \quad m(\theta) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{q(\theta)}{2x} \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = 0,$$

где

$$(5) \quad m(\theta) = \sin^2 \theta + \frac{c_{66}}{c_{44}} \cos^2 \theta, \quad n(\theta) = \frac{c_{66}}{c_{44}} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta, \\ q(\theta) = \sin 2\theta \left( 1 - \frac{c_{66}}{c_{44}} \right).$$

Решение уравнений (3) и (4) будем искать в виде волны, распространяющейся по поверхности анизотропного цилиндра с медленно изменяю-

щимися по углу амплитудой  $F(x, \theta)$  и угловым волновым числом

$$p(\theta) = \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} \equiv \varphi'(\theta),$$

$$(6) \quad U(x, \theta) = F(x, \theta) e^{i\varphi(\theta)},$$

причем, используя подход, развитый одним из авторов в работе [1], будем рассматривать решение (6) в бесконечном угловом интервале  $-\infty < \theta < +\infty$ , считая ось  $x=0$  линией разветвления бесконечного порядка. Усло-

вие медленности изменения означает  $p^2(\theta)F(x, \theta) \gg p(\theta) \frac{\partial F(x, \theta)}{\partial \theta} \gg \frac{\partial^2 F(x, \theta)}{\partial \theta^2}$ ,  $p^2(\theta) \gg \frac{dp(\theta)}{d\theta}$  и, так как  $\frac{dp}{d\theta} \sim \frac{\pi}{2} p$ ,  $p \gg 1$ . Априорно пред-

положим (как мы увидим ниже, это предположение подтвердится), что искомое решение не будет сильно отличаться от аналогичного для изотропного цилиндра, т. е.  $p(\theta) \sim X \gg 1$ , и при этом смещения в волне будут заметно отличны от нуля при  $x \sim X$  ( $X = k_1 R$ ). Подставим выражение (6) в формулу (3) и ограничимся старшими по порядку малости членами. Тогда для амплитуды  $F(x, \theta)$  получим уравнение

$$(7) \quad m(\theta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, \theta) + \frac{1+iq(\theta)p(\theta)}{x} \frac{\partial}{\partial x} F(x, \theta) + \left[ 1 - \frac{n(\theta)p^2(\theta)}{x^2} \right] F(x, \theta) = 0$$

(при оценке производных по  $x$  мы полагали  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \sim \frac{\partial F}{\partial x} \sim F$ ). Решение уравнения (7), удовлетворяющее принципу погашаемости [6], имеет вид [7]

$$(8) \quad F(x, \theta) = A(\theta) x^\alpha J_\nu(\beta x),$$

где  $J_\nu(\beta x)$  — функция Бесселя порядка  $\nu$ ,  $\alpha(\theta) = \pm \frac{i}{2} \sqrt{c_{11}/c_{33}} q(\theta) \nu(\theta)$ ,

$\beta = m^{1/2}$ . Неизвестное  $\nu(\theta)$  определится из граничного условия (4), которое после подстановки в него выражения (8) и отбрасывания малых членов примет вид

$$(9) \quad J'_\nu[\beta(\theta)x] |_{x=X} = 0.$$

Корни этого уравнения можно определить по таблицам функции Бесселя или воспользовавшись асимптотическим выражением, справедливым при  $X \gg 1$ ,  $|\nu(\theta) - X| = O(X^{1/2})$  [8]

$$(10) \quad \nu_l(\theta) = \beta(\theta)X + g_l \left( \frac{\beta(\theta)X}{2} \right)^{1/3} + \left( \frac{g_l^2}{60} - \frac{1}{10g_l} \right) \left( \frac{2}{\beta(\theta)X} \right)^{1/3} + O(X^{-1}),$$

где  $g_l$  —  $l$ -й корень производной функции Эйри. Таким образом,  $F(x, \theta)$  определена с точностью до произвольной медленно изменяющейся функции  $A(\theta)$ , которую можно найти, потребовав выполнение закона сохранения энергии в отдельно взятой нормальной волне. Закон сохранения энергии в данном случае сводится к условию нулевого потока энергии через любую дугу границы цилиндра и постоянству потока через радиальное сечение при произвольном  $\theta$ . Эти требования позволяют найти функцию  $A(\theta)$  с точностью до постоянного множителя  $C$ , определяемого

условиями возбуждения. Окончательное решение принимает вид

$$(11a) \quad U(x, \theta) = C \left( \frac{x}{X} \right)^{\alpha(\theta)} \frac{J_{\nu_l(\theta)}[\beta(\theta)x] e^{i \int_{\theta_0}^{\theta} p_l(s) ds}}{\beta(\theta)^{1/2} \left\{ J_{\nu_l(\theta)}[\beta(\theta)X] \frac{\partial J_{\nu'}[\beta(\theta)x]}{\partial \nu} \Big|_{\substack{x=X \\ \nu=\nu_l(\theta)}} \right\}^{1/2}},$$

где

$$(11b) \quad p_l(\theta) = \pm \sqrt{\frac{c_{44}}{c_{66}}} m(\theta) \nu_l(\theta),$$

$$\alpha_l(\theta) = \mp \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c_{44}}{c_{66}}} q(\theta) \nu_l(\theta), \quad \beta(\theta) = m(\theta)^{1/2}.$$

При каждом фиксированном значении  $X = k_l R$ , т. е. при заданных частоте и радиусе  $R$  цилиндра, уравнение (9) имеет конечное число вещественных положительных корней  $\nu_1(\theta), \nu_2(\theta), \dots, \nu_n(\theta)$ , являющихся функциями угла  $\theta$ . Каждый корень соответствует двум распространяющимся в противоположных направлениях нормальным волнам определенного номера, характеризующимся своим законом дисперсии — связью  $p$  с  $k_l R$  и распределением смещений по глубине. Угловое волновое число  $p_l(\theta)$  и комплексная амплитуда  $F_l(x, \theta)$  каждой нормальной волны являются периодическими, с периодом  $\pi$ , функциями угловой координаты. Условию медленности изменения  $F(\theta)$  и  $p(\theta)$ , положенному в основу использованного приближения, удовлетворяют нормальные волны в тех областях изменения  $p_l(X)$ , где  $p_l \gg 1$ . Это требование выполняется, если  $X \gg 1$ , поскольку  $p_l \ll X$ , и, вследствие уменьшения  $p_l$  с ростом  $l$ , для нормальных волн не очень больших номеров при фиксированном  $X$ . Выше при оценке величин  $p(\theta)$  и  $X$  мы неявно предполагали, что  $(1 - c_{66}/c_{44})$  — конечная величина, т. е. анизотропия не мала. Следует заметить, что по мере приближения  $c_{66}/c_{44} \rightarrow 1$ , условие медленности изменения будет удовлетворяться для все большего числа нормальных волн при фиксированном  $X$ , или для меньшего  $X$  при фиксированном числе нормальных волн, и в пределе  $c_{66}/c_{44} = 1$  выражение (11) будет описывать все поперечные нормальные волны для изотропного цилиндра при любом  $X$ . Это подтверждается тем фактом, что все отброшенные члены в уравнении (7) пропорциональны  $(1 - c_{66}/c_{44})$ .

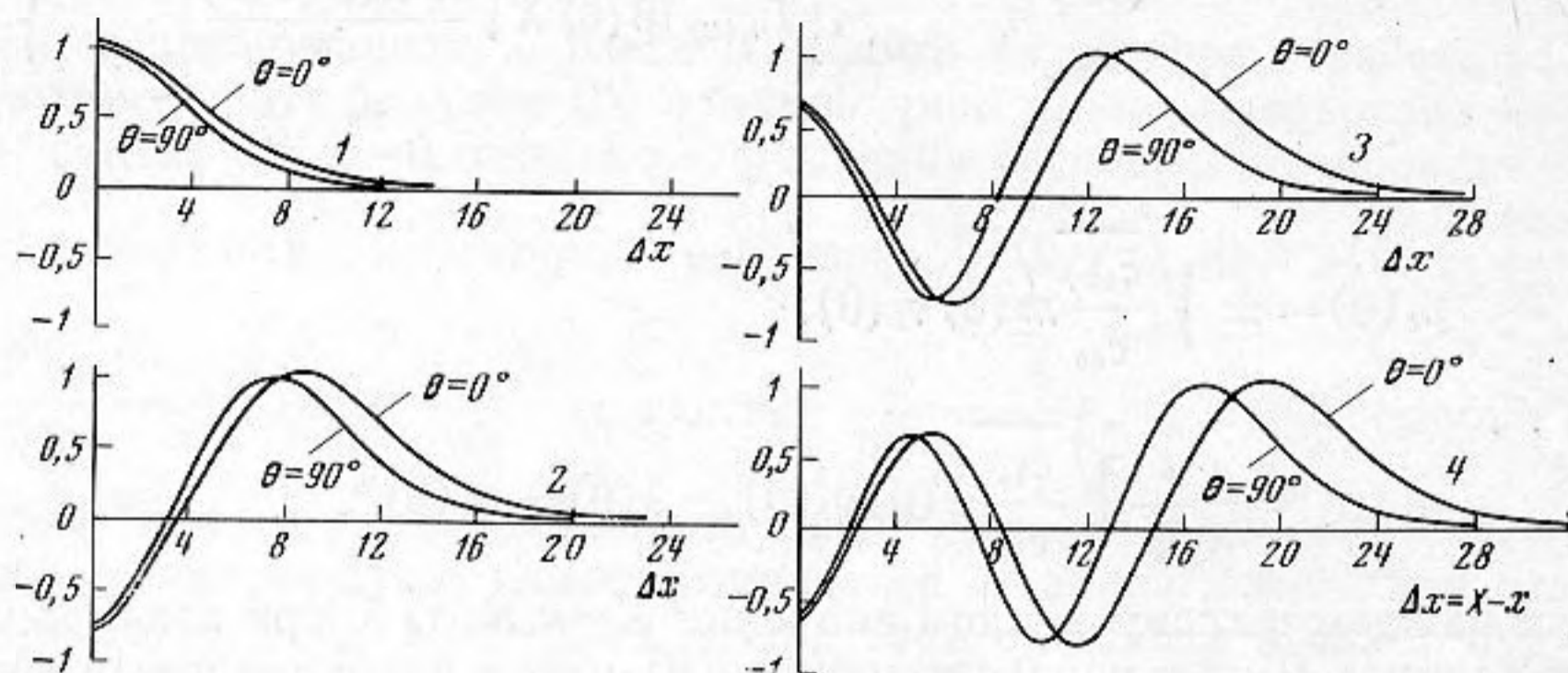
Обратимся к анализу структуры нормальных волн. При фиксированном  $\theta$  модуль амплитуды смещения  $|F_l(x, \theta)|$  для нормальной волны определенного номера совпадает по форме с амплитудой смещения в соответственной волне в изотропном цилиндре, но характеризуется зависимостью от угловой координаты как значений функции  $|F_l(x, \theta)|$  в своих экстремумах (амплитудная модуляция), так и глубины проникновения волны. На фиг. 2 представлены функции  $|F_l(x, 0)|, |F_l(x, \pi/2)|$  для первых четырех нормальных волн цилиндра ( $X = 64$ ) из кристалла гексагональной симметрии — рутила, класса  $4/m\bar{m}2$ , для которого  $c_{66}/c_{44} = 0,656$  [9]. При  $\theta = 0, \pi/2$  зависимости амплитуды смещения от глубины максимально отличны. Как видно, смещения в волнах локализованы у поверхности. Амплитуда нормальной волны номера  $l$  имеет  $l-1$  нулей. Воспользовавшись асимптотическим представлением функции Бесселя через функцию Эйри [10]

$$(12) \quad J_\nu(\beta x) = \left( \frac{2}{\beta x} \right)^{1/3} \text{Ai} \left[ (\nu - \beta x) \left( \frac{2}{\beta x} \right)^{1/3} \right] + O(X^{-2/3})$$

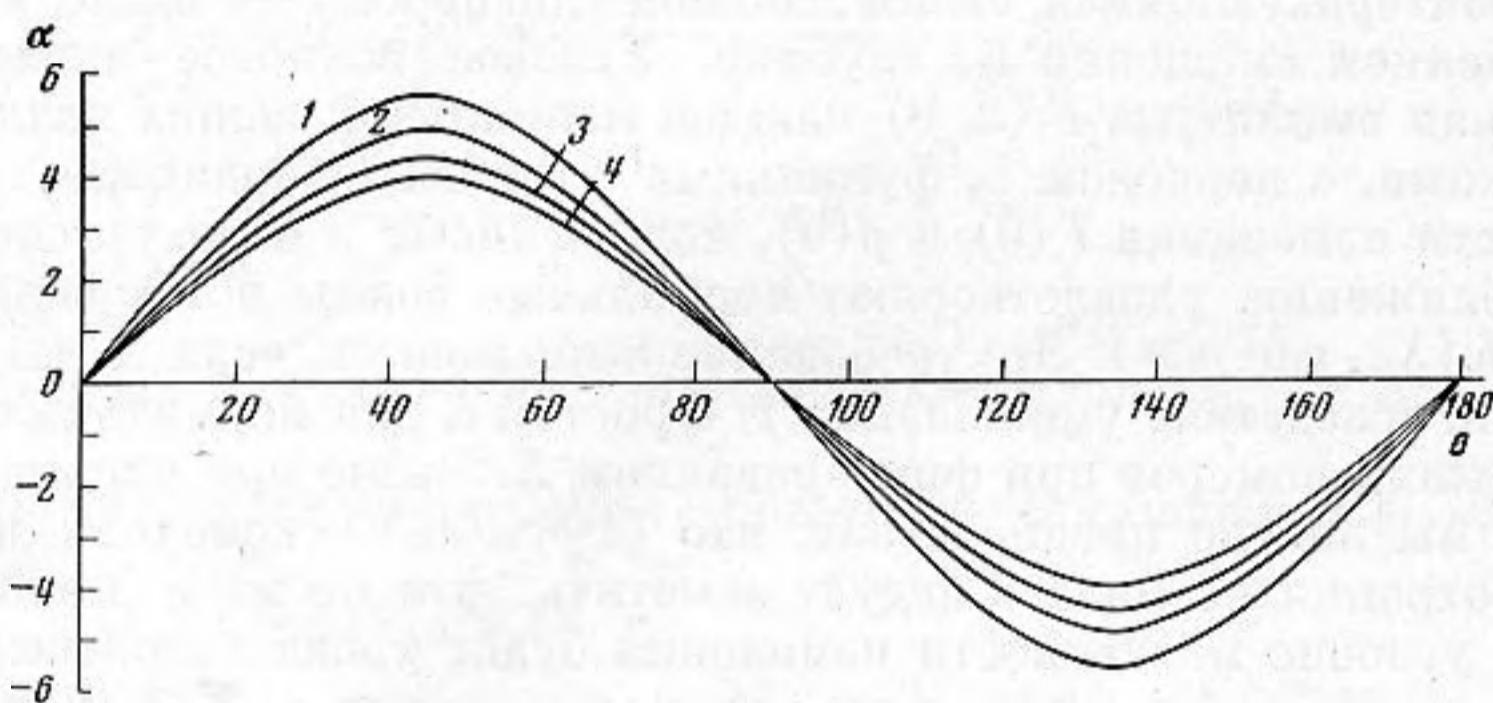
справедливым при  $X \gg 1$  и  $|\nu - X| = O(X^{1/3})$ , найдем первый член асимптотического разложения в законе модуляции амплитуды  $F_l(\theta) = \text{const} [\beta(\theta)^{-1/6} + O(X^{-2/3})]$ . Относительная глубина модуляции амплиту-

ды для всех нормальных волн одинакова и составляет для цилиндра из рутила  $\approx 3,5\%$ .

Будем понимать под глубиной проникновения величину  $H=X-x_0$ , где  $x_0$  выбирается на участке экспоненциального спада  $|F_e(x)|$  и соответствует нулевому значению аргумента функции Эйри в выражении (12). Тогда,



Фиг. 2. Модуль амплитуды смещения  $|F_l(x, \theta)|$  при углах  $\theta=0, \pi/2$  для первых четырех ( $l=1, 2, 3, 4$ ) нормальных волн цилиндра, выполненного из рутила ( $k_l R=64$ )



Фиг. 3. Угловая зависимость показателя изменения фазы с глубиной  $\alpha_i(\theta)$  для первых четырех ( $l=1, 2, 3, 4$ ) нормальных волн цилиндра, выполненного из рутила ( $k_l R=64$ )

учитывая формулу (10), мы найдем асимптотическое выражение для  $H(\theta)$ :

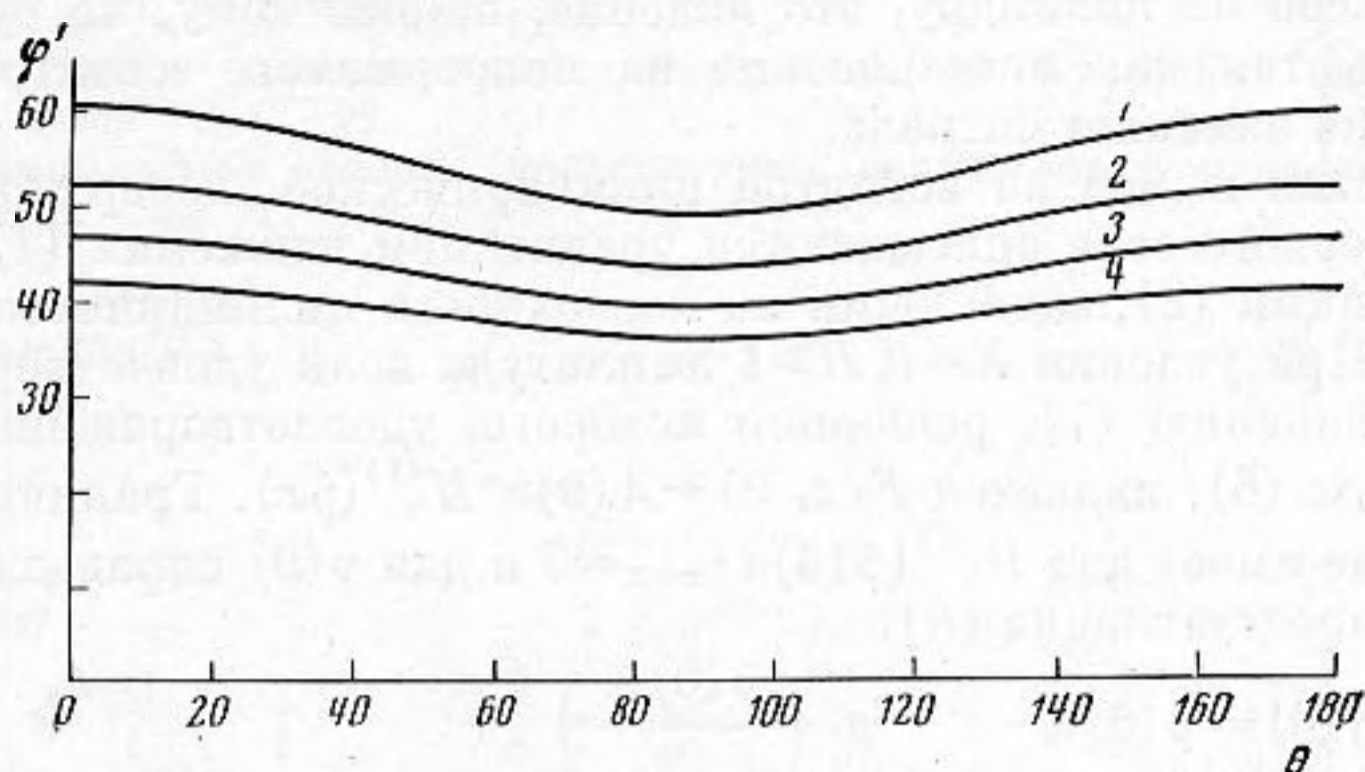
$$(13) \quad H(\theta) = -g_l \left( \frac{X}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{\beta(\theta)^{2/3}} + O(X^{-1/3}),$$

справедливое при тех же условиях, что и формула (12). Выражение (13) показывает порядок величины глубины проникновения  $H \sim X^{1/3}$ , и дает закон изменения  $H(\theta)$ , объясняя увеличение  $H(0) - H(\pi/2)$  на фиг. 2 с возрастанием номера нормальной волны ( $|g_l|$  возрастает с увеличением номера  $l$ ).

Аргумент комплексной амплитуды ( $\arg F_l(x, \theta) = |\alpha(\theta)| \ln x/X \simeq |\alpha(0)| \frac{X-x}{X}$ ) описывает изменение фазы волны с глубиной, которое эквивалентно искривлению фронта волны — явление, не имеющее места в случае изотропного цилиндра. На фиг. 3 приведены зависимости  $\alpha_i(\theta)$ ,  $l=1, \dots, 4$ . Уместно отметить, что  $\alpha_i(\theta)$  пропорциональны  $q(\theta) = dm(\theta)/d\theta$  и поэтому равны нулю в экстремумах функций  $p_l(\theta)$ , графики которых даны на фиг. 4. Искривленность фронта волны периодически изменяется, исчезая при  $\theta=0, \pi/2, \pi, \dots$ , где  $\alpha_i(\theta)$  обращается в нуль.

Отметим также, что в нормальных волнах имеются радиальные потоки энергии, которые, очевидно, появляются в результате изменения глубины проникновения волн.

Для практики важен вопрос о рассеянии нормальных волн, возникающем вследствие неоднородности по  $\theta$  условий распространения. Сделаем



Фиг. 4. Угловое волновое число  $p_l(\theta) = \varphi_l'(\theta)$  для первых четырех ( $l=1, 2, 3, 4$ ) нормальных волн цилиндра, выполненного из рутила ( $k_l R = 64$ )

оценку амплитуд рассеянных волн, основываясь на следующем приближении в уравнении (3). Воспользовавшись подходом, развитым в методе поперечных сечений [11], найдем систему уравнений, связывающих амплитуды  $A_m(\theta)$  нормальных волн:

$$(14) \quad (p_m n)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \theta} [(p_m n)^{1/2} A_m(\theta)] = \sum_{l \neq m} \left\{ \left[ -p_l n \int_0^x \frac{1}{x} \frac{\partial F_l}{\partial \theta} F_m dx + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i(n-1)}{2} \int_0^x \frac{\partial F_l}{\partial x} F_m dx + \frac{i}{2} q \int_0^x \frac{\partial^2 F_l}{\partial x \partial \theta} F_m dx \right] A_l(\theta) + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} q \frac{\partial A_l(\theta)}{\partial \theta} \int_0^x \frac{\partial F_l}{\partial x} F_m dx \right\} e^{i \int (p_l - p_m) d\theta}.$$

Здесь  $F_l(x, \theta) = |F_l(x, \theta)|$ . Полагая  $A_l = 0$  ( $l \neq l_0$ ),  $A_{l_0} = 1$ , оценим в первом приближении амплитуду  $A_m(\theta)$   $m$ -й нормальной волны при рассеянии  $l_0$ -й:

$$(15) \quad A_m(\theta) = \frac{\left(1 - \frac{c_{66}}{c_{44}}\right) \sin 2\theta}{i(p_l - p_m)} e^{i \int (p_{l_0} - p_m) d\theta} \Big|_{\theta_0}^{\theta_1} + O[(p_l - p_m)^{-2}].$$

Это выражение показывает, что  $A_m \sim \left(1 - \frac{c_{66}}{c_{44}}\right) / (p_l - p_m) \sim \left(1 - \frac{c_{66}}{c_{44}}\right) / X^{1/2}$ ,

если рассеяние попутное, и  $\sim (1 - c_{66}/c_{44})/X$  — если рассеяние обратное, при этом амплитуда распространяющейся нормальной волны может уменьшиться на величину  $\sim \left(1 - \frac{c_{66}}{c_{44}}\right)^2 \ln^2(X^{2/3}) X^{-2/3}$ . Из выражения (15)

следует, что по мере распространения волны  $l_0$ , амплитуды рассеянных волн осциллируют не «накапливаясь». Исключение составляют дискрет-

ные частоты, на которых  $\int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} (p_{l_0} - p_m) d\theta = 2\pi n$ . Можно показать, что при

этом волны, генерируемые на последовательных витках распространения ( $\theta \rightarrow \infty$ ), складываются в фазе и дают в данном приближении эффект неограниченного роста амплитуды рассеянной волны. Фактически это означает, что на данных частотах запрещен режим бегущей плоской волны. (Происходит перекачка энергии из  $l_0$ -й в  $m$ -ю нормальную волну и обратно.) Заметим, что с точки зрения применимости теории к распространению импульсов по цилиндру, это явление, по-видимому, не будет сильно сказываться, так как исчезновение из непрерывного спектра дискретных частот не изменяет сигнала.

Поперечные волны на вогнутой цилиндрической поверхности анизотропного твердого тела описываются уравнением движения (1) и граничными условиями (2), заданными на поверхности цилиндрической полости радиуса  $R$ . При условии  $X = k_l R \gg 1$  амплитуда волн удовлетворяет укороченному уравнению (7), решением которого, удовлетворяющим условию погашаемости (6), является  $F(x, \theta) = A(\theta) x^\alpha H_{\nu}^{(1)}(\beta x)$ . Граничное условие в этом случае имеет вид  $H_{\nu}^{(1)}[\beta(\theta)x]_{x=X} = 0$  и для  $\nu(\theta)$  справедливо асимптотическое представление [8]:

$$(16) \quad \nu_l(\theta) = \beta(\theta) X - e^{i\pi/3} g_l \left( \frac{\beta(\theta) X}{2} \right)^{1/3} + \\ + \left( \frac{g_l^2 e^{2i\pi/3}}{60} - \frac{e^{2i\pi/3}}{10g_l} \right) \left( \frac{2}{\beta(\theta) X} \right)^{1/3} + O(X^{-1}),$$

где  $g_l$  — корни функции  $A_l'(g)$ , справедливое при  $|\nu - X| = O(X^{1/2})$ ,  $X \gg 1$ .

Нормированное решение, описывающее  $l$ -ю нормальную волну, имеет вид

$$(17) \quad U(x, \theta) = C \left( \frac{x}{X} \right)^{\alpha_l(\theta)} \frac{H_{\nu_l(\theta)}^{(1)}[\beta(\theta)x] e^{-i \int_{\theta_0}^{\theta} p_e(s) ds}}{\beta(\theta)^{1/2} \left\{ H_{\nu_l(\theta)}^{(1)}[\beta(\theta)X] \frac{\partial H_{\nu}^{(1)}[\beta(\theta)x]}{\partial \nu} \Big|_{\substack{x=X \\ \nu=\nu_l(\theta)}} \right\}^{1/2}},$$

где  $p_l(\theta)$  и  $\alpha_l(\theta)$  определяются соотношениями (11б) и (16), причем  $p_l(\theta)$  и  $\alpha_l(\theta)$  — комплексны. В данном случае (17) представляет  $l$ -ю экспоненциально затухающую по  $\theta$  нормальную волну из бесконечного набора ( $l=1, 2, \dots, \infty$ ) волн. Затухание обуславливается излучением энергии в пространство. Мнимая часть описывает, как и в случае выпуклой цилиндрической поверхности изменение фазы по координате  $x$ , а реальная часть дает свой вклад в амплитудную модуляцию по  $\theta$ , изменяющуюся с изменением  $x$ . В отличие от случая выпуклого цилиндра применимость решения (17) не ограничена нормальными волнами каких-либо номеров. Анализ рассеяния волн вследствие неоднородности по  $\theta$  в данном случае не имеет большого практического значения ввиду сильного радиационного затухания и здесь не проводится.

В заключение авторы благодарят А. Д. Лапина за полезные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Викторов. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М., «Наука», 1966.
2. Л. М. Бреховских. О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы. Акуст. ж., 1967, 13, 4, 541–555.
3. И. А. Викторов. Поверхностные волны на цилиндрических поверхностях кристаллов. Акуст. ж., 1974, 20, 2, 199–206.
4. С. L. Chen. On the electroacoustic waves guided by a cylindrical piezoelectric interface. J. Appl. Phys., 1973, 44, 9, 3841–3847.

5. *F. Cho, B. Hunsinger, R. Lowson.* Surface waves circulating on piezoelectric substrates. *Appl. Phys. Lett.*, 1971, 18, 7, 298–299.
6. *Г. Д. Малюжинец.* Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции синусоидальных волн. Докт. дис. М., 1950.
7. *И. Г. Градштейн, Н. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, суммы, рядов и произведений. М., «Наука», 1962.
8. *W. Streifer, R. D. Kodis.* On the solution of a transcendental equation in scattering theory. *Quart. Appl. Math.*, 1965, 23, 1, 27–38.
9. *О. Андерсон.* Определение и некоторые применения изотропных упругих постоянных поликристаллических систем. В кн. Физическая акустика, под ред. У. Мэзона, т. III, часть В, М., «Мир», 1968, 62–121.
10. *В. А. Фок.* Новое асимптотическое выражение для бесселевых функций. Докл. АН СССР, 1934, 1, 3, 97–99.
11. *Б. З. Каценеленбаум.* Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М., Изд-во АН СССР, 1961.

Акустический институт  
Академии наук СССР

Поступила  
19 апреля 1976 г.