АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIII 1977 Вып. 2

УДК 534.2

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ШУМОВЫХ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

С. Н. Гурбатов, А. А. Дубков

Исследованы эффекты, связанные с распространением случайно-модулированного сигнала в нелинейной среде без дисперсии. На основе точного решения уравнения Бюргерса проведен анализ статистических характеристик низкочастотных составляющих, возбуждаемых интенсивной квазимонохроматической волной. Изучены спектры и вероятностные распределения для различных значений индекса амплитудной модуляции и акустического числа Рейнольдса. Отмечена возможность измерения в среде неизвестных априори параметров амплитудной модуляции исходного сигнала.

Взаимодействие спектральных компонент модулированного гармонического сигнала, распространяющегося в нелинейной среде, приводит, как известно, к параметрическому возбуждению низкочастотных составляющих спектра [1–3]. Интересно, в частности, рассмотреть случайную модуляцию высокочастотного сигнала, когда в нелинейной среде генерируются шумовые низкочастотные волны. Как и для регулярного сигнала, эффективность процесса определяется величиной акустического числа Рейнольдса Re. При $\mathrm{Re}\to\infty$, когда распространение акустической волны на начальной стадии описывается решением Римана, для анализа статистических характеристик поля применим математический аппарат, разработанный в [4–6]. Однако для определения доли энергии волны, преобразованной в низкочастотную часть спектра, необходимо учитывать диссипативные эффекты. В настоящей работе статистический анализ низкочастотных компонент проводится на основе уравнения Бюргерса.

1. Пусть на входе в нелинейную среду задана квазимонохроматическая волна

$$v_0(t)=(A_0+\sigma a(t))\sin(\omega_0 t+\varphi(t)). \tag{1}$$

Здесь $A_0^2/2$, $\sigma^2/2$ – соответственно энергия регулярной и флуктуирующей компонент сигнала, $a(t)$ – нормированные флуктуации амплитуды, $\varphi(t)$ – флуктуации фазы. Распространение акустической волны конечной амплитуды описывается уравнением Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\beta v\frac{\partial v}{\partial \tau}=\mu\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}, \tag{2}$$

где β и μ – параметры, характеризующие нелинейность и вязкость (см., например, [2]), $\tau=t-x/c$, c – скорость волны в линейной среде. Уравнение (2) заменой переменных [7]

$$v(\tau,x)=-\frac{2\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial\tau}\ln U(\tau,x) \tag{3}$$

сводится к уравнению диффузии

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}. \tag{4}$$

Учитывая малость изменения амплитуды на периоде колебаний, граничные условия для вспомогательного поля U запишем в виде

$$U(\tau,0)=\exp\{(\mathrm{Re_р}+\mathrm{Re_ф}\,a(\tau))\cos\theta(\tau)\}= \tag{5}$$

$$=I_0(\mathrm{Re_р}+\mathrm{Re_ф}\,a(\tau))+2\sum_{n=1}^{\infty}I_n(\mathrm{Re_р}+\mathrm{Re_ф}\,a(\tau))\cos n\theta(\tau).$$

Здесь $I_n(y)$ – модифицированные функции Бесселя, $\theta(\tau)=\omega_0\tau+\varphi(\tau)$, $\mathrm{Re_р}=A_0\beta/2\mu\omega_0$, $\mathrm{Re_ф}=\sigma\beta/2\mu\omega_0$ – акустические числа Рейнольдса регулярной и флуктуирующей компонент. В формуле (5) мы пренебрегли флуктуациями частоты входного сигнала, что допустимо, если $\sigma a_\tau'\gg\varphi_{\tau\tau}''(A_0+$ $+\sigma)/\omega_0$.

Первое слагаемое в (5) описывает низкочастотные компоненты вспомогательного поля U, а остальные – спектральные составляющие U на кратных частотах $\omega=n\omega_0$. В силу нелинейной связи v и U (3) высшие гармоники U дают в общем случае вклад и в низкочастотную область спектра $v(\tau,\ x)$. На основе (5) нетрудно показать, что ширина спектра низкочастотной части U равна γ – ширине спектра амплитудных флуктуаций исходного колебания $v_0(t)$ при $\mathrm{Re_ф}\ll1$ и равна $\gamma\,\mathrm{Re_ф}$ при $\mathrm{Re_ф}\gg1$. Таким образом, при условии $\max\{\gamma,\ \gamma\,\mathrm{Re_ф}\}\ll\omega_0$ спектр низкочастотной компоненты U не перекрывается с высшими гармониками. Следовательно, при

$$(\mu\omega_0^2)^{-1}\ll x\ll\min\{(\mu\gamma^2)^{-1},\ (\mu\gamma^2\mathrm{Re_ф}^2)^{-1}\} \tag{6}$$

высшие гармоники $U(\tau,\ x)$ и соответственно $v(\tau,\ x)$ уже сильно подавлены за счет затухания (4), а низкочастотные компоненты U еще не изменяются. Физически это означает, что область формирования низкочастотной части v и область, где происходит ее искажение за счет нелинейных или диссипативных эффектов, пространственно разнесены. Поле $v(\tau,\ x)$ при этом практически не зависит от расстояния от входа в нелинейную среду и, как видно из (3) – (5), связано с амплитудой падающей волны соотношением

$$v(\tau,x)=-\frac{2\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial\tau}\ln(I_0(\mathrm{Re_р}+\mathrm{Re_ф}\,a(\tau)))=-\frac{\sigma a_\tau'}{\omega_0}f(\mathrm{Re_р}+\mathrm{Re_ф}\,a(\tau)), \tag{7}$$

где $f(y)=I_1(y)/I_0(y)$ ($f(y)\approx y/2$ при $y\ll1$; $f(y)\approx1$ при $y\gg1$).

2. При малых индексах амплитудной модуляции, когда $\mathrm{Re_ф}/\mathrm{Re_р}\ll1$, из (7) имеем

$$v(\tau,x)=-\frac{\sigma a_\tau'}{\omega_0}f(\mathrm{Re_р}). \tag{8}$$

Следовательно, спектр и вероятностное распределение медленных составляющих поля совпадают по форме с аналогичными характеристиками производной от амплитуды исходной квазимонохроматической волны. Относительная доля энергии флуктуирующих компонент, преобразованная в низкочастотную часть спектра, пропорциональна квадрату относительной ширины спектра пьедестала начального поля и определяется величиной числа Рейнольдса регулярной компоненты. При $\mathrm{Re_р}\ll1$ перенос энергии в низкочастотную часть спектра осуществляется за счет однократного взаимодействия гармоник пьедестала с дискретной линией на $\omega=\omega_0$, и $\sigma_v=\sigma\,\mathrm{Re_р}\,\gamma/2\omega_0$. При $\mathrm{Re_р}\gg1$ энергия продетектированного сигнала не зависит от амплитуды регулярной волны и величины нелинейных и диссипативных параметров среды β и μ и существенно больше, чем при $\mathrm{Re}_\text{р} \ll 1$.

3. В случае перемодуляции ($\mathrm{Re}_\text{ф} \geqslant \mathrm{Re}_\text{р}$) статистика низкочастотных составляющих волны уже не совпадает со статистикой производной от амплитуды падающей волны. Определим сначала вероятностное распределение продетектированного сигнала, считая, что регулярная компонента поля отсутствует ($\mathrm{Re}_\text{р}=0$). Воспользовавшись (7) и учитывая четность функции Бесселя нулевого порядка, выразим вероятностное распределение поля $W(v, x)$ через совместную плотность вероятности нормированной огибающей и ее производной $W_{a, a'}(\xi, \eta)$:

$$W(v,x)=\frac{\omega_0}{\sigma}\int\limits_0^\infty W_{a,a'}\left(\xi, \frac{-\omega_0 v}{\sigma f(\mathrm{Re}_\text{ф}\,\xi)}\right)\frac{d\xi}{f(\mathrm{Re}_\text{ф}\,\xi)}. \tag{9}$$

Формула (9) позволяет, в частности, найти вероятностное распределение низкочастотных компонент волны для гауссовой статистики входного сигнала $v_0(t)$ *. В этом случае огибающая $a(\tau)$ и ее производная $a_\tau'(\tau)$ статистически независимы, причем a имеет релеевское, а a_τ' гауссово распределение [8]. При $\mathrm{Re}_\text{ф} \ll 1$ можно разложить в формуле (9) $f(\mathrm{Re}_\text{ф}\,\xi)$ в ряд по степеням $\mathrm{Re}_\text{ф}$ и, ограничиваясь первым членом, получить

$$W(v,x)=\frac{\omega_0}{\sigma\,\mathrm{Re}_\text{ф}\,\gamma}\exp\left\{-\frac{2|v|\omega_0}{\sigma\,\mathrm{Re}_\text{ф}\,\gamma}\right\},$$

где γ — ширина энергетического спектра исходного поля. Таким образом, продетектированная компонента при $\mathrm{Re}_\text{ф} \ll 1$ имеет экспоненциальное распределение, а энергия ее равна $\sigma^2\,\mathrm{Re}_\text{ф}^2\,\gamma^2/2\omega_0^2$.

В противоположном случае больших чисел Рейнольдса профиль медленных составляющих совпадает с профилем производной от огибающей, за исключением областей, где амплитуда волны обращается в нуль (7) (ширина этих областей пропорциональна $(\gamma\,\mathrm{Re}_\text{ф})^{-1}$). Для $W(v, x)$ в этом случае находим из (9)

$$W(v,x)=\frac{\omega_0}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\gamma}\exp\left\{-\frac{v^2\omega_0^2}{2\sigma^2\gamma^2}\right\},$$

где поправки к $W(v, x)$ пропорциональны $\mathrm{Re}_\text{ф}^{-1}$. Итак, при $\mathrm{Re}_\text{ф} \gg 1$ медленные компоненты имеют нормальное распределение, а доля энергии квазимонохроматической волны, перенесенной в низкочастотную область спектра, равна $\sigma^2\gamma^2/\omega_0^2$. Отметим, что в отличие от начальной стадии распространения волны, когда вероятностное распределение поля при $\mathrm{Re}_\text{ф} \gg 1$ определяется статистикой амплитуды квазимонохроматической волны [9], на достаточно больших расстояниях форма и дисперсия распределения $W(v, x)$ зависят от статистических характеристик производной от огибающей.

4. Для определения спектрального состава низкочастотных волн, параметрически возбуждаемых при распространении квазимонохроматической волны, целесообразно воспользоваться первой из формул (7), представляющей $v(\tau, x)$ через производную от некоторого процесса $z(\tau)$, связанного с огибающей $a(\tau)$ нелинейным преобразованием

$$z(\tau)=\ln I_0(\mathrm{Re}_\text{ф}\,a(\tau)). \tag{10}$$

Соответственно для спектра $S_v(\omega, x)$ имеем

$$S_v(\omega,x)=\frac{4\mu^2}{\beta^2}\,\omega^2 S_z(\omega). \tag{11}$$

---

* Можно показать, что влияние частоты на статистику низкочастотных компонент поля в этом случае несущественно.

Рассмотрим случай гауссовой статистики входного поля $v_0(t)$. Для определения спектра $S_z(\omega)$ воспользуемся двумерным вероятностным распределением огибающей квазимонохроматического сигнала [8], разлагая которое по полиномам Лаггера $L_n^{(0)}(y)$, можно представить корреляционную функцию $B_z(\rho)$ в виде ряда по степеням $B_0(\rho)$ — огибающей коэффициента корреляции исходного поля:

$$B_z(\rho)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 B_0^{2n}(\rho), \tag{12}$$

где

$$c_n=\int_0^{\infty} y \ln I_0(\mathrm{Re}_\Phi y) L_n^{(0)}(y^2/2) e^{-y^2/2}\, dy = \tag{13}$$

$$=\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} y^n e^{-y} \frac{d^n}{dy^n} [\ln I_0(\mathrm{Re}_\Phi \sqrt{2y})]\, dy.$$

При малых числах Рейнольдса преобразование (10) эквивалентно квадратичному детектору $z=\mathrm{Re}_\Phi^2 a^2/4$, и в разложении (12) отличны от нуля только первые два члена. Для спектра поля $S_v(\omega, x)$ при этом имеем из (11)–(13)

$$S_v(\omega, x)=\frac{\sigma^2 \mathrm{Re}_\Phi^2}{4} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} S_0(\omega) \otimes S_0(\omega),$$

где $S_0(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} B_0(\rho)\cos\omega\rho\, d\rho$. Таким образом, при $\mathrm{Re}_\Phi \ll 1$ спектр медленных составляющих продетектированного гауссова шума пропорционален свертке спектра исходного колебания, поскольку в среде с сильным затуханием существенны лишь однократные процессы нелинейного взаимодействия гармоник.

При $\mathrm{Re}_\Phi \gg 1$ и $a > \mathrm{Re}_\Phi^{-1}$ для преобразования (10) справедлива аппроксимация $z=\mathrm{Re}_\Phi |a|$. Спектр поля $v(\tau, x)$ при этом можно представить в виде

$$S_v(\omega, x)=\frac{\sigma^2\omega^2}{\omega_0^2}\left\{\frac{\pi}{8} S_0(\omega)\otimes S_0(\omega) + \right. \tag{14}$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 (\mathrm{Re}_\Phi) S_0(\omega) \underbrace{\otimes \ldots \otimes}_{2n} S_0(\omega)\right\}.$$

Коэффициенты c_n близки к соответствующим коэффициентам ряда для линейного детектора [8]. Разложение (14) сходится достаточно быстро: так, первый член ряда (14) содержит 78,5% полной энергии волны, преобразованной в низкочастотную область спектра. Из-за наличия крутых фронтов в профиле продетектированной компоненты (в областях, где амплитуда обращается в нуль (7)) спектр поля S_v будет спадать достаточно медленно. Закон спадания спектра определяется высшими слагаемыми в разложении (14). При $\mathrm{Re}_\Phi \to \infty$ спектр S_v был бы пропорционален ω^{-2}, конечность же числа Рейнольдса приводит к конечной ширине ударного фронта волны, и, следовательно, степенной закон спадания спектра справедлив лишь до некоторой частоты $\omega_* \sim (\gamma\, \mathrm{Re}_\Phi)$, выше которой спектр S_v быстро уменьшается. В заключение отметим, что на достаточно больших расстояниях существенным станет нелинейное искажение медленных составляющих и $S_v(\omega, x)$ будет расширяться в обе стороны от центральной частоты $\omega \approx \gamma$.

Авторы благодарны А. Н. Малахову, А. И. Саичеву за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. А. Наугольных, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов.* О нелинейном взаимодействии звуковых волн в поглощающей среде. Акуст. ж., 1963, *9*, 2, 192–197.
2. *О. В. Руденко, С. И. Солуян.* Теоретические основы нелинейной акустики, М., «Наука», 1975.
3. Второе Всесоюзное научно-техническое совещание. Нелинейная гидроакустика. Тезисы докладов. Таганрог, 1976.
4. *О. В. Руденко, А. С. Чиркин.* О нелинейной трансформации спектров случайных волновых полей. Докл. АН СССР, 1974, *214*, 5, 1045–1048.
5. *А. Н. Малахов, А. И. Саичев.* К вопросу о кинетических уравнениях в теории случайных волн. Изв. вузов. Радиофизика, 1974, *17*, 5, 699–709.
6. *А. Н. Малахов, А. И. Саичев.* О вероятностном описании случайных полей, удовлетворяющих простейшим уравнениям гидродинамического типа. ЖЭТФ, 1974, *67*, 3, 940–950.
7. *E. Hopf.* The Partial Differential Equation: $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. Comm. Pure Appl. Math., 1950, *3*, 3, 201–230.
8. *Б. Р. Левин.* Теоретические основы статистической радиотэхники, кн. 1. М., «Советское радио», 1969.
9. *О. В. Руденко, А. С. Чиркин.* О статистике шумовых разрывных волн в нелинейных средах. Докл. АН СССР, 1975, 225, *3*, 520–523.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила
5 июля 1976 г.