АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 1

УДК 534.6:621.317.77

ОБ ИЗМЕРЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ СИГНАЛОВ С ФЛУКТУИРУЮЩИМ УРОВНЕМ В ПРИСУТСТВИИ ПОМЕХ

В. П. Демкин, Ю. И. Тужилкин

Получены асимптотические выражения для плотности вероятности максимумов нормированной взаимной корреляции исходных сигналов с принятыми в акустическом канале при распространении по многим путям, стационарной аддитивной помехе и гауссовском распределении сигналов в каждом из путей.

В практике акустических измерений для определения коррелированности сигналов широко используются нормирующие коррелометры [1, 2]. Их показания существенно зависят от дисперсии мешающего шума, но легко поддаются необходимой коррекции, если сигнал и шум стационарны. В противном случае положение осложняется. В самом деле, если при распространении сигнала по одному пути и «медленной» нестационарности обычно легко измерить текущее значение отношения сигнала к помехе, то в случае распространения по многим путям, когда более ранние и более поздние сигналы сами являются нестационарной помехой, возможности измерения этого отношения не всегда очевидны. Часто предположение о медленном изменении сигналов не выполняется, и их уровни сильно флуктуируют на интервале между соседними циклами измерений. Если эти флуктуации стационарны, имеет смысл говорить о статических характеристиках результатов измерений, например о плотности вероятности измеренных значений коэффициента корреляции. Однако чтобы определить корреляцию выбранного сигнала, необходимо знать его дисперсию, а если используются нормирующие коррелометры, — его энергетическую долю по отношению к помехе и остальным сигналам. Получение этих данных обычно связано с большими сложностями. Тем не менее в ряде случаев близкие к действительности математические модели сигналов могут быть обусловлены физическими соображениями.

Ниже мы получим выражения для асимптотической плотности вероятности величины корреляционных максимумов на выходе нормирующего коррелометра при измерении коэффициента взаимной корреляции исходного сигнала $s_0(t)$ с ним же после прохождения некоторого акустического канала. Сигнал $u(t)$ на его выходе представим в виде суммы запаздывающих и сдвинутых по фазе сигналов $s_i(t)$ с действительными безразмерными независимыми случайными коэффициентами α_i и стационарного шума $n(t)$:

$$u(t)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i s_i(t-t_i,\varphi_i)+n(t). \tag{1}$$

Будем считать, что время интегрирования выходного напряжения коррелометра достаточно велико (асимптотический случай), а уровни и фазы φ_i сигналов изменяются лишь от реализации к реализации. Коэффициенты корреляции R_{0i} и R_{ij} сигналов $s_0(t)$, $s_i(t)$ и, соответственно, $s_i(t)$ и $s_j(t)$

могут быть любыми, но постоянными в пределах всего эксперимента. Поскольку в большинстве корреляционных измерений определяется огибающая и производится перебор возможных значений задержки эталона с целью нахождения «центральной части» корреляционной функции, соответствующей t_i, то эти времена мы будем считать известными.

Нормирование в каждом цикле измерения корреляции производится на квадрат $u(t)$, проинтегрированный по длине цикла. В соответствии с нашими предположениями

$$\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt=\sum_{i,j}^{N}\alpha_i\alpha_j p^2 R_{ij}(t_i-t_j,\varphi_i-\varphi_j)+\sigma_n^2, \tag{2}$$

где σ_n^2 — дисперсия помех, p^2 — мощность исходного сигнала. Если используется относительно узкополосный сигнал и число путей его распространения велико, то при больших по сравнению с периодом сигнала разностях t_i-t_j двойная сумма в формуле (2) в большинстве практических случаев близка к сумме ее диагональных членов. В дальнейшем мы будем пренебрегать недиагональными членами, что, строго говоря, оправдано лишь тогда, когда t_i-t_j превосходят интервал корреляции сигналов.

При сильно развитых флуктуациях сигналы в каждом из путей являются суммой большого числа сигналов с относительно близкими значениями времен распространения. Пусть фаза таких сигналов распределена равномерно, а мгновенные значения — по нормальному закону. В этом случае коэффициенты α распределены по закону Релея

$$W(\alpha)=\frac{\alpha}{\sigma_\alpha^2}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma_\alpha^2}\right). \tag{3}$$

Параметр σ_α^2 является дисперсией исходного нормального распределения. Она определяется плотностью рассеивателей, порождающих флуктуации в каждом из путей распространения сигнала. Поэтому, если эти плотности известны, мы можем считать известными и дисперсии $\sigma_{\alpha i}^2$.

Таким образом, искомые выражения должны быть справедливы для достаточно (но не слишком) коротких узкополосных сигналов, передаваемых по каналам с существенно различающимися временами распространения. Последнее требование смягчается, если путей распространения много. Пауза между последовательными посылками должна быть достаточно большой.

Выражение для нормированной корреляционной функции сигналов $s_0(t)$ и $u(t)$ легко написать, воспользовавшись равенствами (1) и (2):

$$R_{0u}(\tau)=\sum_{i}^{N}\left(\sum_{j}^{N}\alpha_j^2p^2+\sigma_n^2\right)^{-1/2}\alpha_i pR_{0i}(\tau-t_i). \tag{4}$$

Нас интересует корреляция R_{0i} исходного сигнала с пришедшим по i-му пути. Ее можно получить из результатов измерения i-го слагаемого функции $R_{0u}(\tau)$, если заранее определить плотность вероятности значений сложного коэффициента при $R_{0i}(\tau-t_i)$. Обозначим его через ρ_i и выразим через отношение независимых случайных величин

$$\rho_i=\left[1+\frac{1}{\alpha_i^2}\left(\sum_{j\neq i}^{N}\alpha_j^2+\frac{\sigma_n^2}{p^2}\right)\right]^{-1/2}. \tag{5}$$

Здесь α_i^2 не входит в сумму по j в качестве слагаемого и поэтому оказывается по отношению к ней независимой величиной. Дальнейшие выкладки не представляют затруднений. По известному $W(\alpha_i)$ находится распределение α_i^2 и суммы α_j^2.

Распределение $W(\eta)$ отношения случайной величины ξ_2 к независимой случайной величине ξ_1 может быть получено в соответствии с общими правилами [3]

$$(6)\qquad W(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi_1}(v)\,W_{\xi_2}(v\eta)\,|v|\,dv,$$

где W_{ξ_1} и W_{ξ_2} — плотности распределения ξ_1 и ξ_2 соответственно. (Индексы при W будем ставить лишь при замене аргумента распределения). Искомая величина ρ_i связана с η нелинейным преобразованием $\rho_i=f(\eta)$. Ее распределение находится из соотношения [3]

$$(7)\qquad W(\rho_i)=W_\eta[\varphi(\rho_i)]\left|\frac{d\varphi(\rho_i)}{\alpha\rho_i}\right|,$$

где $\eta=\varphi(\rho_i)$ — функция, обратная по отношению к $f(\eta)$.

Применим эти правила к нашей задаче. Начнем со случая канала с одним путем:

$$(8)\qquad \rho=\left(1+\frac{\sigma_n^2}{p^2\alpha^2}\right)^{-1/2}.$$

Как известно, квадрат ξ_1 релеевской случайной величины α распределен по экспоненциальному закону

$$(9)\qquad W(\xi_1)=\frac{1}{2\sigma_\alpha^2}\exp\left(-\frac{\xi_1}{2\sigma_\alpha^2}\right),\qquad \xi_1\geqslant 0.$$

использовав формулу (7), получим

$$(10)\qquad W(\rho)=\frac{2a\rho}{(1-\rho^2)^2}\exp\left(-a\frac{\rho^2}{1-\rho^2}\right),\qquad 0\leqslant\rho\leqslant 1,$$

где $a=\sigma_n^2/2p^2\sigma_\alpha^2$ — энергетическое отношение помехи к сигналу.

Переходя к каналу со многими путями, заметим, что величина $\xi_2=\sum_{j\neq i}^{N}\alpha_j^2+\frac{\sigma_n^2}{p^2}$ должна быть распределена по обобщенному закону Эрланга $(n-1)$-го порядка (у нас $n=N-1$) со сдвигом на постоянную σ_n^2/p^2:

$$(11)\qquad W(\xi_2)=(-1)^{N-2}\prod_{l=1}^{N-1}\frac{1}{2\sigma_{\alpha l}^2}\sum_{m=1}^{N-1}\frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{\alpha m}^2}\left(\xi_2-\frac{\sigma_n^2}{p^2}\right)\right]}{\prod\limits_{k\neq m}^{N-1}\left(\frac{1}{2\sigma_{\alpha m}^2}-\frac{1}{2\sigma_{\alpha k}^2}\right)},$$

$$k,\ l,\ m\neq i,\ N>1;\quad \xi_2\geqslant\sigma_n^2/p^2.$$

Распределение всего второго члена в квадратных скобках (5) легко находится почленным интегрированием в соответствии с формулами (6), (9) и (11):

$$(12)\qquad W(\eta)=\frac{(-1)^{N-2}}{2\sigma_{\alpha i}^2}\exp[-(N-1)a_i]\prod_{l=1}^{N-1}\frac{1}{2\sigma_{\alpha l}^2}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{N-1}\frac{\exp a_m(1-\eta)}{\prod\limits_{k\neq m}^{N-1}\left(\frac{1}{2\sigma_{\alpha m}^2}-\frac{1}{2\sigma_{\alpha k}^2}\right)}\cdot\frac{1+a_i+a_m\eta}{\left(\frac{1}{2\sigma_{\alpha i}^2}+\frac{\eta}{2\sigma_{\alpha m}^2}\right)^2},$$

$$k,\ l,\ m\neq i;\ N>1;\ \eta\geqslant 0.$$

Наконец, нелинейное преобразование типа единицы, деленной на квадратный корень из бинома (5), может быть учтено в соответствии с формулой (7) умножением выражения (12) на $2/\rho_i^3$ и подстановкой $(1-\rho_i^2)/\rho_i^2$ вместо η. Обозначив отношение помехи к сигналу для i-го пути через $a_i = \sigma_n^2/2p^2\sigma_{\alpha i}^2$, получим искомое выражение:

$$W(\rho_i)=\frac{(-1)^{N-2}}{\rho_i^3\sigma_{\alpha i}^2}\exp[-(N-1)a_i]\prod_{l=1}^{N-1}\frac{1}{2\sigma_{\alpha l}^2}\times \tag{13}$$

$$\times\sum_{m=1}^{N-1}\frac{\exp\left[-a_m\frac{1-2\rho_i^2}{\rho_i^2}\right]}{\prod\limits_{k\neq m}^{N-1}\left(\frac{1}{2\sigma_{\alpha m}^2}-\frac{1}{2\sigma_{\alpha k}^2}\right)}\frac{1+a_i+a_m\frac{1-\rho_i^2}{\rho_i^2}}{\left(\frac{1}{2\sigma_{\alpha i}^2}+\frac{1}{2\sigma_{\alpha m}^2}\frac{1-\rho_i^2}{\rho_i^2}\right)^2},$$

$$k,\ l,\ m\neq i;\ N>1;\ 0\leqslant\rho_i\leqslant 1.$$

Более простые выражения могут быть получены в частных случаях. Например, если дисперсии уровней сигналов по каждому из путей распространения одинаковы, следует воспользоваться необобщенным распределением Эрланга. Тогда вместо формулы (11) получим

$$W(\xi_2)=\left(\frac{1}{2\sigma_\alpha^2}\right)^{N-1}\frac{(\xi_2-\sigma_n^2/p^2)^{N-2}}{(N-2)!}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\alpha^2}\left(\xi_2-\frac{\sigma_n^2}{p^2}\right)\right], \tag{14}$$

$$N>1;\quad \xi_2\geqslant\sigma_n^2/p^2.$$

При отыскании $W(\eta)$ можно воспользоваться табличным интегралом [4] и выразить результат через функцию Уиттекера с индексами $(3-N)/2$, $-N/2$. В последующих преобразованиях возникает возможность представить ее многочленом Лягерра, который при данной комбинации индексов выражается через элементарные функции [5]. Окончательное выражение для распределения $W(\rho_i)$, соответствующего одному из статистически одинаковых корреляционных максимумов, имеет вид

$$W(\rho_i)=2\rho_i(1-\rho_i^2)^{N-3}[a+(N-1)(1-\rho_i^2)]\exp\left(-\frac{a\rho_i^2}{1-\rho_i^2}\right), \tag{15}$$

$$N>1,\ 0\leqslant\rho_i\leqslant 1.$$

Если измерения проводятся в отсутствие помех ($a=0$), то, как следует из формулы (15), плотность вероятности определяется выражением

$$W(\rho_i)=2(N-1)\rho_i(1-\rho_i^2)^{N-2}. \tag{16}$$

На фиг. 1 представлены функции плотности вероятности ρ_i, построенные в соответствии с формулой (16) для нескольких значений N. С ростом N максимум распределения быстро перемещается в сторону малых значений. Аналогичное перемещение наблюдается в случае распространения по одному пути, если отношение помехи к сигналу увеличивается. Соответственные кривые для нескольких значений a, рассчитанные по формуле (10), изображены на фиг. 2.

В практических приложениях удобно использовать аналогичные серии кривых для i-го слагаемого R_{0ui} суммы (4), построенные для ряда возможных значений измеряемого коэффициента R_{0i}. Соответственные выражения находятся по общим правилам [3]:

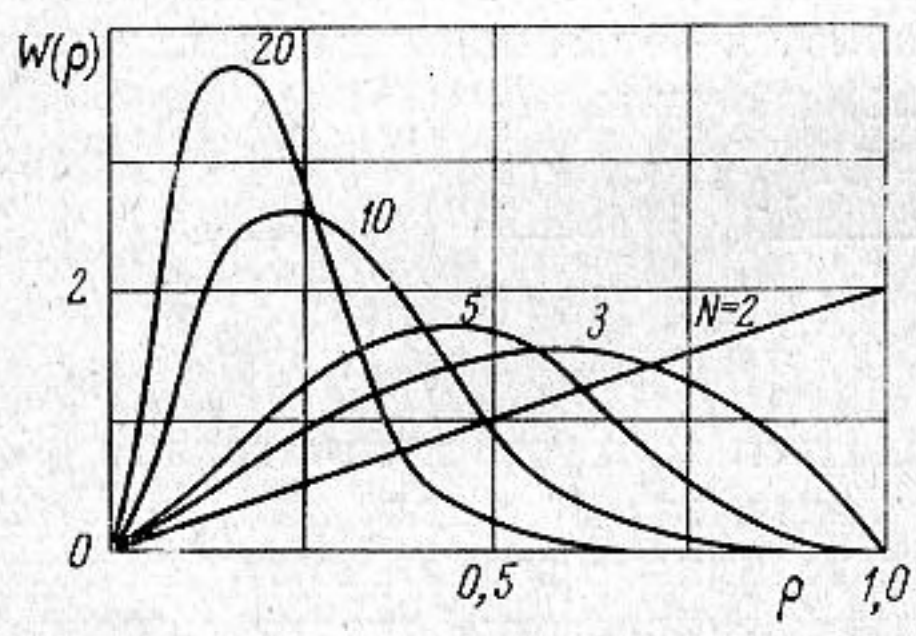
$$W(R_{0ui})=\frac{1}{|R_{0i}|}W_{\rho_i}\left(\frac{R_{0ui}}{|R_{0i}|}\right). \tag{17}$$

Искомое значение R_{0i} определяется по кривой, с которой по критерию согласия лучше остальных совпадает экспериментальная гистограмма величин R_{0ui}.

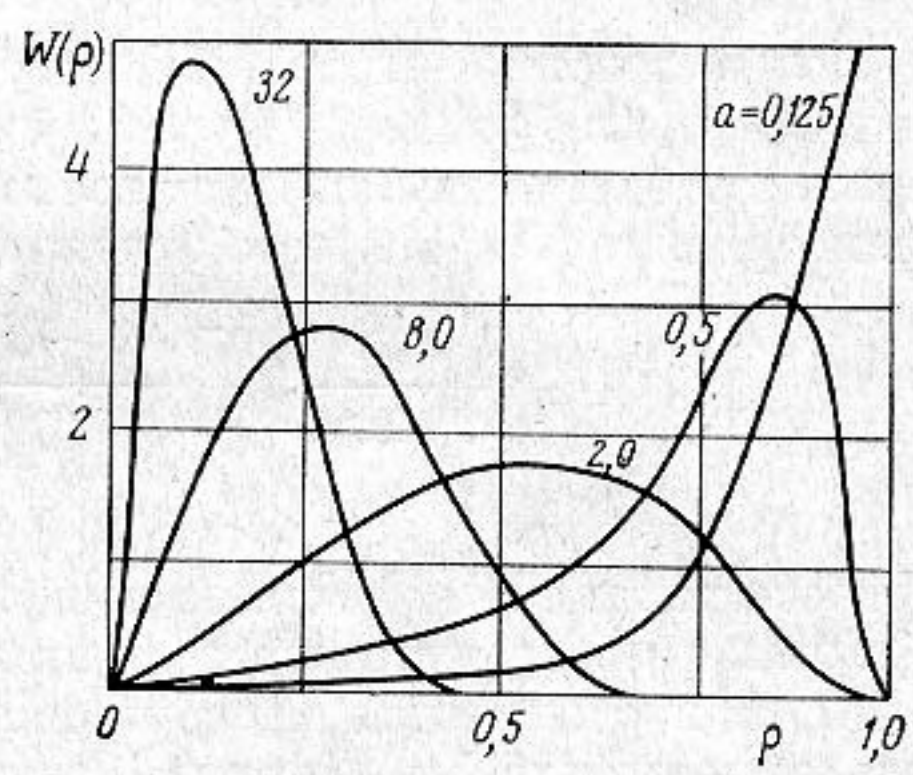
В простых случаях удается применять более сложные критерии оценки. В частности, для оценки корреляции в однолучевом релеевском канале при значительном уровне помех удобно использовать метод наибольшего правдоподобия Фишера [6]. В самом деле, получив при измерениях n значений R_{0ui}, напишем функцию правдоподобия L, учитывая формулы (17) и (10):

$$L=\prod_{l}^{n}\frac{2a}{R_{0i}}\cdot\frac{R_l/R_{0i}}{1-R_l^2/R_{0i}^2}\exp\left(-a\frac{R_l^2/R_{0i}^2}{1-R_l^2/R_{0i}^2}\right). \tag{18}$$

Через R_l здесь обозначено l-е наблюдение величины R_{0ui}. Далее необходимо отыскать значение R_{0i}, при котором имеет место максимум функции прав-



Фиг. 1. Плотности распределения вероятности ρ_i для $N=2$, 3, 5, 10 и 20



Фиг. 2. Плотности распределения вероятности ρ_i при $N=1$ для различных отношений помехи к сигналу $a=0{,}125$; 0,5; 2,0; 8 и 32

доподобия. Оно может быть найдено из уравнения $\partial \ln L/\partial R_{0i}=0$. Производя необходимые преобразования, можно получить уравнение в виде

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{R_{0i}^4-R_l^4-R_{0i}^2R_l^2a}{(R_{0i}^2-R_l^2)^2}=0. \tag{19}$$

Если n велико, решение уравнения громоздко. Однако для грубых оценок можно пользоваться упрощенным уравнением. Оно получается при учете того факта, что при большом уровне помех весьма вероятно выполнение неравенства $R_{0i}^2 \gg R_l^2$. Тогда вместо уравнения (19) мы имеем приближенное равенство

$$\sum_{l=1}^{n}\left[1+(2-a)\frac{R_l^2}{R_{0i}^2}\right]=0, \tag{20}$$

откуда получаем правило оценки R_{0i} по наблюдениям R_l:

$$R_{0i}^2=\frac{a-2}{n}\sum_{i}^{n}R_l^2. \tag{21}$$

Оценка R_{0i} оказывается смещенной, однако при сильных помехах смещение невелико.

Таким образом, определение взаимной корреляции исходного сигнала с прошедшим через акустический канал, содержащий помехи и несколько независимо флуктуирующих путей, в ряде случаев может быть проведено посредством учета плотности вероятности коэффициента при искомой величине.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гершман С. Г., Фейнберг Е. Л.* Об измерении коэффициента корреляции. Акуст. ж., 1955, *1*, 4, 327–338.
2. *Галушкин А. И., Зотов Ю. Я., Шикунов Ю. А.* Оперативная обработка экспериментальной информации. М., «Энергия», 1972.
3. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1. М., «Советское радио», 1969.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962, стр. 333.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований, т. 2. М., Физматгиз, 1970, стр. 190, 305 и 311.
6. *Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В.* Курс теории вероятностей и математической статистики. М., «Наука», 1965.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
3 января 1977 г.
После исправления
7 июня 1977 г.