

УДК 538.56:519.25

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я.

Для различных краевых задач, связанных с волновым уравнением, предложен новый подход, приводящий к задаче с начальными условиями. Рассмотрено скалярное волновое уравнение для одномерного и трехмерного случаев, а также обобщение на нелинейные среды. Возникающие при этом операторы сведены к интегральным.

В последнее время заметно повысился интерес к решению краевых статистических задач (см., например, работы [1–3]). Наиболее существенными среди них являются задачи, связанные с распространением волн в линейных и нелинейных средах. При этом оказывается удобным сведение краевой задачи к задаче с начальными условиями. Такой переход может оказаться полезным для численного решения задачи и является необходимым для стохастических уравнений, так как задача с начальными данными обладает свойством динамической причинности, которое требуется для построения статистической теории (см., например, работы [3, 4]).

В работе [5] (см. также работу [3]) подобный переход для одномерного скалярного уравнения Гельмгольца осуществлен методом, аналогичным теории инвариантного погружения (см., например, работу [6]), что позволило построить статистическую теорию переноса излучения в слоистых средах. Затем этот метод был распространен на трехмерный случай [7], нелинейные среды и уравнения Максвелла [8]. В данной работе рассматривается переход от краевой задачи к задаче Коши для скалярного волнового уравнения. Такие задачи возникают при анализе распространения временных импульсов в стационарных и нестационарных средах, а также при рассеянии волн одного типа на волнах другого типа (см., например, работу [9]).

В случае одномерной слоистой среды напишем волновое уравнение в виде

$$(1) \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = [\varepsilon(x, t) u(x, t)]_{tt}.$$

Пусть волна падает справа на слой среды $L_0 \leq x \leq L$, вне которого $\varepsilon = 0$. На границах слоя непрерывны величины u и u_x . Исходная краевая задача эквивалентна интегральному уравнению

$$(2) \quad u(x, t) = u_0(x, t) + \int_{L_0}^L dx' \int dt' g(x, t; x', t') [\varepsilon(x', t') u(x', t')]_{tt},$$

где $u_0(x, t)$ соответствует падающей волне, а g — функции Грина свободного пространства (см., например, работу [10]):

$$(3) \quad g(x, t; x', t') = (2c)^{-1} \theta(t - t' - c^{-1}|x - x'|) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi ic} \int \frac{d\omega}{\omega + i0} e^{-i\omega(t-t' - c^{-1}|x-x'|)}.$$

При $x > x'$ для функции g имеют место равенства

$$(4) \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial g}{\partial t'}.$$

Функция Грина, соответствующая точечному источнику в точке (x_0, t_0) , удовлетворяет интегральному уравнению ($L_0 \leq x_0 \leq L$):

$$(5) \quad F(x, t; x_0, t_0; L) = g(x, t; x_0, t_0) + \int_{L_0}^L dx_1 \int dt_1 g(x, t; x_1, t_1) \times \\ \times [\varepsilon(x_1, t_1) F(x_1, t_1; x_0, t_0; L)]_{t_1, t_1}.$$

Если источник находится на границе слоя, т. е. $x_0 = L$, получаем ($G(x, t; L, t_0) = F(x, t; L, t_0; L)$):

$$(6) \quad G(x, t; L, t_0) = g(x, t; L, t_0) + \int_{L_0}^L dx_1 \int dt_1 g(x, t; x_1, t_1) \times \\ \times [\varepsilon(x_1, t_1) G(x_1, t_1; L, t_0)]_{t_1, t_1},$$

причем волновое поле u связано с функцией Грина равенством

$$(7) \quad u(x, t) = \int dt_0 G(x, t; L, t_0) f(t_0), \\ u_0(x, t) = \int dt_0 g(x, t; L, t_0) f(t_0).$$

Здесь $f(t_0)$ — распределение источников в плоскости $x=L$, соответствующее полю u_0 . В соответствии с методом инвариантного погружения рассмотрим зависимость функции G от параметра L — положения правой границы слоя. Дифференцируя (6) по L и используя равенства (4), можно получить соотношение

$$(8) \quad \frac{\partial G(x, t; L, t_0)}{\partial L} = \frac{1}{c} \frac{\partial G}{\partial t_0} + \int dt_1 G(x, t; L, t_1) [\varepsilon(L, t_1) H(L; t_1, t_0)]_{t_1, t_1},$$

которое можно рассматривать как интегродифференциальное уравнение, если дополнить его начальным условием

$$G(x, t; L, t_0) |_{L=x} = H(x; t, t_0).$$

Функция $H(L; t, t_0) = G(L, t; L, t_0)$ описывает волновое поле в плоскости источника. Дифференцируя по L соответствующее H интегральное уравнение, получаем уравнение

$$(9) \quad \frac{\partial H(L; t, t_0)}{\partial L} = \frac{1}{c^2} \delta(t-t_0) - \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t_0} + \\ + \int dt_1 H(L; t, t_1) [\varepsilon(L, t_1) H(L; t_1, t_0)]_{t_1, t_1}$$

с начальным условием

$$H(L; t, t_0) |_{L=L_0} = g(t, t_0) = g(L_0, t; L_0, t_0) = (2c)^{-1} \theta(t-t_0).$$

Величина $H(L; t, t_0) - g(t, t_0)$ описывает рассеянное назад поле. Если в уравнении (9) пренебречь интегральным членом, т. е. положить $\varepsilon=0$, то найдем $H(L; t, t_0) = g(t, t_0)$, что соответствует пренебрежению обратным рассеянием. Подставляя это решение в уравнение (8), можно полу-

чить интегральное уравнение для функции Грина

$$(10) \quad G(x, t; L, t_0) = g(x, t; L, t_0) + \int_x^L dx_1 \int dt_1 g(x, t; x_1, t_1) \times \\ \times [\varepsilon(x_1, t_1) G(x_1, t_1; L, t_0)]_{t_1, t_1}$$

или для волнового поля

$$(11) \quad u(x, t) = u_0(x, t) + \int_x^L dx_1 \int dt_1 g(x, t; x_1, t_1) [\varepsilon(x_1, t_1) u(x_1, t_1)]_{t_1, t_1}$$

Последнее эквивалентно дифференциальному уравнению

$$(12) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \int dt_1 g(t-t_1) [\varepsilon(x, t_1) u(x, t_1)]_{t_1, t_1} = \\ = \frac{1}{c} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{2c} [\varepsilon(x, t) u(x, t)]_t$$

В случае стационарной среды, когда $\varepsilon = \varepsilon(x)$, уравнение (9) упрощается:

$$(13) \quad \frac{\partial H(L; t-t_0)}{\partial L} = \frac{1}{c^2} \delta(t-t_0) - \frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} H(L; t-t_0) + \\ + \varepsilon(L) \int dt_1 H(L; t-t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} H(L; t_1-t_0)$$

Представим решение в виде

$$H(L; t-t_0) = \int d\omega H(L, \omega) e^{i\omega(t-t_0)},$$

тогда для коэффициента отражения на частоте ω

$$(14) \quad R_\omega = 4\pi i \omega c H(L, \omega) - 1$$

получим хорошо известное (см., например, работу [11]) уравнение (Риккати)

$$(15) \quad \frac{dR_\omega}{dL} = -\frac{2i\omega}{c} R_\omega + \frac{i\omega}{2c} \varepsilon(L) (1+R_\omega)^2$$

Аналогичным образом можно найти уравнение для функции Грина F , соответствующей точечному источнику, расположенному в точке $x_0 (L_0 \leq x_0 \leq L)$. Дифференцируя уравнение (5) по L , получаем

$$(16) \quad \frac{\partial F(x, t; x_0, t_0; L)}{\partial L} = \int dt_1 G(x, t, L, t_1) [\varepsilon(L, t_1) \tilde{G}(L, t_1; x_0, t_0)]_{t_1, t_1}$$

с начальным условием $F(x, t; x_0, t_0; L) |_{L=x_0} = G(x, t; x_0, t_0)$ при $x_0 > x$, $F(x, t; x_0, t_0; L) |_{L=x} = \tilde{G}(x, t; x_0, t_0)$ при $x > x_0$. Здесь $G(x, t; L, t_0) = F(x, t; L, t_0; L)$, $\tilde{G}(L, t; x_0, t_0) = F(L, t; x_0, t_0; L)$. Функция G описывается уравнением (8), а для функции \tilde{G} мы получаем дифференцированием соответствующего ей интегрального уравнения по L уравнение

$$(17) \quad \frac{\partial \tilde{G}(L, t; x_0, t_0)}{\partial L} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} + \int dt_1 \varepsilon(L, t_1) \tilde{G}(L, t_1; x_0, t_0) [H(L; t, t_1)]_{t_1, t_1}$$

с начальным условием $\tilde{G}(L, t; x_0, t_0) |_{L=x_0} = H(x_0; t, t_0)$. Функция $H(L; t, t_1) = G(L, t; L, t_1) = \tilde{G}(L, t; L, t_1)$ удовлетворяет уравнению (9).

Полученные выше уравнения легко обобщаются и на тот случай, когда в правой части (1) содержится нелинейный оператор $\mathcal{L}_t(u)$, например $\mathcal{L}_t(u)g = [\varepsilon(u)g]_{tt}$. Написав соответствующее интегральное уравнение

для функции G , аналогичной функции Грина для линейной задачи, найдем производные $\partial G/\partial L$ и $\delta G/\delta f$, которые, как легко видеть, связаны линейным образом. В результате получим уравнение для функции G

$$(18) \quad \frac{\delta G(x, t; L, t_0)}{\partial L} = \hat{a}_0 G(x, t; L, t_0) + \int dt' \hat{b}_1 \frac{\delta G(x, t; L, t_0)}{\delta f(t')}$$

с начальным условием

$$G(x, t; L, t_0)|_{L=x} = H(x, t, t_0),$$

где операторы \hat{a}_1 , \hat{b}_1 определяются соотношениями

$$(19) \quad \hat{a}_0 G(x, t; L, t_0) = \frac{1}{c} \frac{\partial G}{\partial t_0} + \int dt_1 G(x, t; L, t_1) \mathcal{L}_1 H(L; t_1, t_0),$$

$$\hat{b}_1 = f(t) \hat{a}_1.$$

Для функции $H(L; t, t_0)$ аналогичным образом получаем уравнение

$$(20) \quad \frac{\partial H(L; t, t_0)}{\partial L} = \frac{1}{c^2} \delta(t-t_0) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} H(L; t, t_0) +$$

$$+ \hat{a}_0 H(L; t, t_0) + \int dt' \hat{b}_1 \frac{\delta H(L; t, t_0)}{\delta f(t')}$$

с начальным условием

$$H(L; t, t_0)|_{L=L_0} = g(t, t_0) = g(L, t; L, t_0).$$

Если в уравнении (20) пренебречь членами, содержащими \mathcal{L}_1 , то его решением будет $H(L; t, t_0) = g(t, t_0)$, что соответствует пренебрежению обратным рассеянием. Подставляя это решение в уравнение (18), можно получить для функции G интегральное уравнение

$$(21) \quad G(x, t; L, t_0) = g(x, t; L, t_0) + \int_x^L dx_1 \int dt_1 g(x, t; x_1, t_1) \times$$

$$\times \mathcal{L}_1 G(x_1, t_1; L, t_0).$$

Для волнового поля в этом случае имеем выражение

$$(22) \quad u(x, t) = u_0(x, t) + \int_x^L dx_1 \int dt_1 g(x, t; x_1, t_1) \mathcal{L}_1 u(x_1, t_1),$$

а также эквивалентные уравнения

$$(23) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \int dt_1 g(t, t_1) \mathcal{L}_1 u(x, t_1) =$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1} \mathcal{L}_1 u.$$

Выберем оператор \mathcal{L}_1 в виде

$$\mathcal{L}_1 u = [\epsilon u^2/2 + \beta u_t + \alpha u_{tt}]_{tt},$$

где первый член описывает нелинейные свойства среды, второй — диссипацию, а третий — дисперсию волн. Тогда из формулы (23) вытекает следующее уравнение для волнового поля (в пренебрежении обратным рассеянием):

$$(24) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2c} \left[\epsilon u \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right].$$

При $\alpha=0$ получаем уравнение Бюргерса, а при $\beta=0$ — уравнение Кортевега — де Фриза.

Рассмотрим теперь трехмерную задачу, которая описывается волновым уравнением

$$(25) \quad u_{,tt} - c^2 \Delta u = [\varepsilon(x, \rho, t) u(x, \rho, t)]_{,tt}$$

с соответствующими краевыми условиями при $x=L_0, L$ (по-прежнему считаем, что неоднородности сосредоточены в слое $L_0 \leq x \leq L$ и справа на него падает волна). Краевая задача (25) эквивалентна интегральному уравнению

$$(26) \quad u(x, \rho, t) = u_0(x, \rho, t) + \int_{L_0}^L dx' \int d\rho' \int dt' g(x, \rho, t; x', \rho', t') \times \\ \times [\varepsilon(x', \rho', t') u(x', \rho', t')]_{,tt'}$$

где ρ — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной к оси x , а

$$(27) \quad g(x, \rho, t; x', \rho', t') = \frac{\theta(t-t')}{2\pi c} \delta[c^2(t-t')^2 - (x-x')^2 - (\rho-\rho')^2] = \\ = \frac{1}{2c^2(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} \int d\omega e^{i\mathbf{q}(\rho-\rho') - i\omega(t-t')} \times \\ \times \left\{ \frac{\exp[-|x-x'| (q^2 - c^{-2}\omega^2)^{1/2}]}{(q^2 - c^{-2}\omega^2)^{1/2}} \theta(q^2 - c^{-2}\omega^2) - \right. \\ \left. - \frac{\exp[i|x-x'| (\omega^2 c^{-2} - q^2)^{1/2} \operatorname{sgn} \omega]}{i(\omega^2 c^{-2} - q^2)^{1/2} \operatorname{sgn} \omega} \theta(\omega^2 c^{-2} - q^2) \right\}.$$

Функция g зависит от разности аргументов и при $x > x'$ удовлетворяет соотношениям

$$(28) \quad \frac{\partial g(x-x', \rho-\rho', t-t')}{\partial x} = \mathcal{M}_{\rho t}^+ g = \mathcal{M}_{\rho' t'}^- g.$$

Действие операторов $\mathcal{M}_{\rho t}^\pm$ на фурье-компоненты функции g легко определить из выражения (27):

$$(29) \quad \mathcal{M}_{\rho\omega}^\pm = -(q^2 - c^{-2}\omega^2)^{1/2} \theta(q^2 - c^{-2}\omega^2) \pm i \operatorname{sgn} \omega \times \\ \times (\omega^2 c^{-2} - q^2)^{1/2} \theta(\omega^2 c^{-2} - q^2).$$

Действуя так же, как и в случае слоистой среды, для функции Грина получаем интегродифференциальное уравнение

$$(30) \quad \frac{\partial G(x, \rho, t; L, \rho_0, t_0)}{\partial L} = \mathcal{M}_{\rho_0 t_0}^- G + \int d\rho_1 \int dt_1 G(x, \rho, t; L, \rho_1, t_1) \times \\ \times [\varepsilon(L, \rho_1, t_1) H(L; \rho_1, t_1; \rho_0, t_0)]_{,tt_1}$$

с начальным условием

$$G(x, \rho, t; L, \rho_0, t_0) |_{L=x} = H(x; \rho, t; \rho_0, t_0).$$

Волновое поле удовлетворяет соотношению

$$(31) \quad u(x, \rho, t) = \int d\rho_0 \int dt_0 f(\rho_0, t_0) G(x, \rho, t; L, \rho_0, t_0).$$

где $f(\rho_0, t_0)$ — распределение источников в плоскости $x=L$, создаваемое падающей волной. Функция $H(L; \rho, t; \rho_0, t_0) = G(L, \rho, t; L, \rho_0, t_0)$, описывающая поле в плоскости $x=L$, удовлетворяет уравнению

$$(32) \quad \frac{\partial H(L; \rho, t; \rho_0, t_0)}{\partial L} = \mathcal{M}_{\rho t}^+ H + \mathcal{M}_{\rho_0 t_0}^- H + \frac{1}{c^2} \delta(\rho - \rho_0) \delta(t - t_0) +$$

$$+ \int d\rho_1 \int dt_1 H(L; \rho, t; \rho_1, t_1) [\varepsilon(L, \rho_1, t_1) H(L; \rho_1, t_1; \rho_0, t_0)]_{t_1, t_1},$$

с условием

$$H(L; \rho, t; \rho_0, t_0) |_{L=L_0} = g(\rho - \rho_0, t - t_0) = g(0, \rho - \rho_0, t - t_0).$$

При выводе формулы (32) использовано соотношение $\mathcal{M}_{\rho t}^+ g(\rho - \rho_0, t - t_0) = -(2c^2)^{-1} \delta(\rho - \rho_0) \delta(t - t_0)$.

Если в уравнении (32) пренебречь интегральным членом, содержащим $\varepsilon(L, \rho, t)$ (что соответствует пренебрежению обратным рассеянием), то его решением будет функция $H(L; \rho, t; \rho_0, t_0) = g(\rho - \rho_0, t - t_0)$. В этом случае для волнового поля можно получить интегральное уравнение

$$(33) \quad u(x, \rho, t) = u_0(x, \rho, t) + \int_x^L dx_1 \int d\rho_1 \int dt_1 g(x - x_1, \rho - \rho_1, t - t_1) \times \\ \times [\varepsilon(x_1, \rho_1, t_1) u(x_1, \rho_1, t_1)]_{t_1, t_1},$$

откуда

$$(34) \quad \frac{\partial u(x, \rho, t)}{\partial x} = -\mathcal{M}_{\rho t}^+ u - \int d\rho_1 \int dt_1 g(\rho - \rho_1, t - t_1) \times \\ \times [\varepsilon(x, \rho_1, t_1) u(x, \rho_1, t_1)]_{t_1, t_1},$$

или

$$(35) \quad \frac{\partial u(x, \rho, t)}{\partial x} = -\mathcal{M}_{\rho t}^+ u + (2c^2)^{-1} (\mathcal{M}_{\rho t}^+)^{-1} [\varepsilon(x, \rho, t) u(x, \rho, t)]_{t_1, t_1}.$$

В случае стационарной среды, когда ε не зависит от t , в уравнениях (30), (32) можно провести фурье-преобразование по переменной $(t - t_0)$, при этом получаются результаты работы [7]. Оператору $\mathcal{M}_{\rho t}^\pm$ при таком переходе соответствует $i(\omega^2 c^{-2} + \Delta_\rho)^{1/2}$. Как и в одномерном варианте, обсуждавшемся выше, легко получить уравнения для функции Грина, соответствующей точечному источнику, расположенному внутри среды, а также обобщить полученные уравнения на случай нелинейных сред.

Отметим, что $\mathcal{M}_{\rho t}^\pm$ можно представить в виде интегрального оператора

$$(36) \quad \mathcal{M}_{\rho t}^+ g(x - x_0, \rho - \rho_0, t - t_0) = \int d\rho' \int dt' \mathcal{K}(\rho - \rho', t - t') \times \\ \times g(x - x_0, \rho' - \rho_0, t' - t_0) = \mathcal{M}_{\rho_0 t_0}^- g = \\ = \int d\rho' \int dt' g(x - x_0, \rho - \rho', t - t') \mathcal{K}(\rho' - \rho_0, t' - t_0).$$

Чтобы определить ядро $\mathcal{K}(\rho, t)$, нужно подействовать оператором $\mathcal{M}_{\rho t}^\pm$ на функцию $\delta(\rho) \delta(t)$, т. е. найти фурье-преобразование величины $\mathcal{M}_{\rho_0 t_0}^\pm$, определенной формулой (29). В результате получим

$$(37) \quad \mathcal{K}(\rho, t) = \frac{1}{2\pi c^3 t} \frac{d}{dt} \frac{\delta(t - c^{-1}\rho)}{t}, \quad \rho = (y^2 + z^2)^{1/2}.$$

Интегрируя полученное выражение по z , находим ядро интегрального оператора для двумерных задач

$$(38) \quad \mathcal{K}(y, t) = \frac{1}{\pi c t} \frac{d}{dt} \frac{\theta(c^2 t^2 - y^2) \theta(t)}{(c^2 t^2 - y^2)^{1/2}},$$

откуда следует, что в одномерном случае ядро имеет вид $\mathcal{K}(t) = -\delta'(t)/c$, в соответствии с полученными выше уравнениями (8), (9). Следует также заметить, что существует простое соотношение между ядром $\mathcal{K}(\rho, t)$ и функцией Грина $g(\rho, t)$, в чем можно убедиться непосредственной проверкой:

$$(39) \quad \mathcal{K}(\rho, t) = \frac{2}{t} \frac{dg(\rho, t)}{dt}.$$

Это соотношение справедливо также в двумерном и одномерном случаях. (В двумерном случае функция Грина $g(\rho, t) = \theta(ct - \rho) / 2\pi c (c^2 t^2 - \rho^2)^{1/2}$).

Фурье-преобразование выражения (37) по t дает ядро интегрального оператора для стационарных задач

$$(40) \quad \mathcal{K}(\rho) = \frac{\exp(ik\rho)}{2\pi\rho^2} \left(\frac{1}{\rho} - ik \right), \quad k = \omega/c.$$

Как уже отмечалось, интегральному оператору с таким ядром соответствует дифференциальный оператор $i(k^2 + \Delta_\rho)^{1/2}$. В двумерном случае находим

$$(41) \quad \mathcal{K}(y) = \frac{ik}{2y} H_1^{(1)}(ky),$$

где $H_1^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода.

Для интегрального оператора, соответствующего $(\mathcal{M}_{\rho t}^+)^{-1}$, также легко найти ядро:

$$(42) \quad \tilde{\mathcal{K}}(\rho, t) = -\frac{\delta(t - c^{-1}\rho)}{2\pi\rho}.$$

В двумерном случае

$$(43) \quad \tilde{\mathcal{K}}(y, t) = -\frac{c}{\pi} \frac{\theta(c^2 t^2 - y^2) \theta(t)}{(c^2 t^2 - y^2)^{1/2}},$$

а в одномерном $\tilde{\mathcal{K}}(t) = -c\theta(t)$. Соотношение, связывающее ядро интегрального оператора с функцией Грина свободного пространства, имеет вид

$$(44) \quad \tilde{\mathcal{K}}(\rho, t) = -2c^2 g(\rho, t).$$

В стационарном случае имеем соответственно

$$(45) \quad \tilde{\mathcal{K}}(\rho) = -\frac{\exp(ik\rho)}{2\pi\rho}, \quad \tilde{\mathcal{K}}(y) = -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(ky).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И. Замечание о стохастических краевых задачах. — Изв. вузов. Радиофизика, 1977, т. 20, № 8, с. 1165–1170.
2. Саичев А. И. Об одном варианте анализа двухточечной краевой задачи. — Изв. вузов. Радиофизика, 1978, т. 21, № 7, с. 996–1003.
3. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
4. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И. Замечание о приближении Бурре в стохастических интегральных уравнениях. — Изв. вузов. Радиофизика, 1980, т. 23, № 9, с. 1034–1037.
5. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И. Флуктуации интенсивности волны в одномерной случайно-неоднородной среде. IV. Инвариантное погружение и распределение вероятностей для интенсивности. — Изв. вузов. Радиофизика, 1980, т. 23, № 10, с. 1185–1194.
6. Кастри Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике. М.: Мир, 1976.
7. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я. Теория инвариантного погружения и волны в статистически неоднородных средах. — Докл. АН СССР, 1980, т. 250, № 5, с. 1112–1115.
8. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И. Теория распространения волн в нелинейных неоднородных средах. — Ж. exper. и теор. физики, 1980, т. 79, № 3, с. 817–827.
9. Проблемы акустики океана. М.: Наука, 1981.
10. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
11. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.

Тихоокеанский
океанологический
институт
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20.XI.1980