АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVIII 1982 Вып. 1

УДК 534.222

ЭВОЛЮЦИЯ ЭНЕРГИИ И АМПЛИТУДЫ РАЗРЫВА ИНТЕНСИВНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ОКЕАНЕ

Родионов Л. В., Саичев А. И.

Получены выражения для энергии и амплитуды разрыва плоской интенсивной акустической волны в случайно-неоднородной среде при больших числах Рейнольдса. Показано, что на стадии образования разрывов средняя энергия волны в среднем меньше энергии в однородной среде, а в области развитых разрывов в среднем больше.

Влияние неоднородностей среды на параметры интенсивной акустической волны обсуждалось в работах [1–4]. Изучалась статистика координат образования ударных фронтов [3, 4] при распространении акустической волны в случайно-неоднородной среде. В данной работе исследуется эволюция энергии и амплитуды разрыва акустической волны в случайно-неоднородной недиспергирующей среде при больших числах Рейнольдса.

Распространение интенсивной волны в однородной среде описывается уравнением Римана [5]

$$\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x'}-\beta_0\mathscr{P}\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial t'}=0. \tag{1}$$

Граничное условие для гармонической на входе волны таково

$$\mathscr{P}(t',0)=\mathscr{P}_0\sin\omega t'.$$

Введем безразмерные время и расстояние: $t=\omega t'$; $x=\beta_0\omega\rho_0x'$. В новых переменных решение уравнения (1) имеет вид

$$\mathscr{P}(t,x)=\mathscr{P}_0\sin(t+\mathscr{P}x/\mathscr{P}_0). \tag{2}$$

Определим энергию волны как

$$\tilde{Э}(x)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T\mathscr{P}^2(t,x)\,dt.$$

Здесь $T=2\pi$ – период волны в безразмерных переменных. Согласно (2), она равна

$$\tilde{Э}(x)=\frac{\mathscr{P}_0^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\left(t+\frac{\mathscr{P}}{\mathscr{P}_0}x\right)dt.$$

С помощью замены $\xi=t+\mathscr{P}x/\mathscr{P}_0$ энергия волны Римана запишется в виде

$$\tilde{Э}(x)=\frac{\mathscr{P}_0^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\xi\,(1-x\cos\xi)\,d\xi.$$

Отсюда следует, что энергия римановой волны не зависит от x и равна энергии волны на входе: $\tilde{Э}(x)=\tilde{Э}(0)=\mathscr{P}_0^2/2$. Однако решение Римана правильно описывает акустическую волну лишь до образования ударных фронтов. Поэтому дополним риманово решение условиями на разрыве. Амплитуда разрыва первоначальной монохроматической волны определяется уравнением [5]

$$\mathscr{P}_p(x)/\mathscr{P}_0=\sin(x\mathscr{P}_p(x)/\mathscr{P}_0). \tag{3}$$

После образования ударного фронта энергия волны диссипирует на разрывах и равна [6]:

$$\tilde{Э}(x)=\frac{\mathscr{P}_0^2}{2\pi}\int\limits_{\tau(x)}^{2\pi-\tau(x)}\sin^2\xi(1-x\cos\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{\mathscr{P}_0^2}{2}\left[1-\frac{\tau(x)}{\pi}+\frac{\sin^2\tau(x)}{2\pi}+\frac{2x\sin^3\tau(x)}{3\pi}\right].$$

Здесь

$$\tau(x)=\begin{cases}\arcsin\mathscr{P}_p(x)/\mathscr{P}_0; & x\leqslant\pi/2,\\ \pi-\arcsin\mathscr{P}_p(x)/\mathscr{P}_0; & x>\pi/2,\end{cases} \tag{4}$$

где $\mathscr{P}_p(x)/\mathscr{P}_0$ — корень уравнения (3). Введем нормированную энергию

$$Э(x)=\frac{\tilde{Э}(x)}{Э(0)}=1-\frac{\tau(x)}{\pi}+\frac{\sin 2\tau(x)}{2\pi}+\frac{2x\sin^3\tau(x)}{3\pi}, \tag{5}$$

На начальной стадии образования ударного фронта $x\simeq1$ асимптотическое выражение для амплитуды разрыва получим из (3), разложив $\sin[x\mathscr{P}_p(x)/\mathscr{P}_0]$ в ряд Маклорена. Учтя первые два члена, имеем

$$\mathscr{P}_p(x)/\mathscr{P}_0\simeq[6(x-1)]^{1/2}1(x-1). \tag{6}$$

Здесь

$$1(x)=\begin{cases}1; & x\geqslant0,\\ 0; & x<0.\end{cases}$$

Асимптотическое выражение для энергии на стадии образования разрыва получим, разложив (5) в ряд Маклорена и определяя $\tau(x)$ из (4) с учетом (6):

$$Э(x)\simeq1-(16\sqrt{6}/5\pi)(x-1)^{5/2}1(x-1). \tag{7}$$

В области развитых разрывов при $x\geqslant2$ (3) имеет асимптотическое решение [5]

$$\mathscr{P}_p(x)/\mathscr{P}_0\simeq\pi/(1+x). \tag{8}$$

Соответственно

$$Э(x)\simeq2\pi^2/3(1+x)^2. \tag{9}$$

Распространение интенсивной акустической волны в случайно-неоднородной среде описывается нелинейным уравнением в частных производных со случайными коэффициентами, анализ которого в общем случае очень сложен. Однако в приближении нелинейной геометрической акустики [7] волну в случайно-неоднородной среде можно свести к уравнению Римана с постоянными коэффициентами, вводя случайные координату, время и давление:

$$z'=\int\limits_0^{x'}\left[\frac{\beta^2(y)\Delta_0c_0^5\rho_0}{\beta_0^2\Delta(y)c^5(y)\rho(y)}\right]^{1/2}dy,$$

$$s'=t'+\frac{1}{c_0^2}\int\limits_0^{x'}[c(y)-c_0]\,dy, \tag{10}$$

$$P(s';z')=\mathscr{P}(t';x')\left[\frac{\Delta(x')c_0\rho_0}{\Delta_0c(x')\rho(x')}\right]^{1/2}.$$

Здесь $\mathscr{P}(t'; x')$ — давление акустической волны в случайно-неоднородной среде, $c(x')$ — скорость звука в среде, $\rho(x')$ — плотность среды, $\Delta(x')$ — ширина лучевой трубки, полученная из решения уравнения эйконала в неоднородной, но линейной среде [7], $\beta(x')$ — параметр нелинейности. Нулевые индексы здесь указывают параметры среды и лучевой трубки вблизи источника звукового поля. Введем безразмерную координату $z=\beta_0\omega\mathscr{P}_0(z')$ и время $s=\omega s'$. В этих переменных уравнение для акустической волны в случайно-неоднородной среде переходит в уравнение Римана в однородной среде [7]:

$$\frac{\partial P}{\partial z}-P\frac{\partial P}{\partial s}=0. \tag{11}$$

Рассмотрим плоскую акустическую волну, распространяющуюся в случайно-неоднородной среде. Будем считать неоднородности среды достаточно плавными и малыми, так что можно пренебречь случайными фокусировками акустической волны, а также приближенно считать $\mathscr{P}=P$. Воспользуемся при описании распространения акустической волны уравнением (11), положив

$$\Delta(x)=\Delta_0;\qquad s=t+\frac{1}{c_0}\int\limits_0^x\varepsilon(y)\,dy;$$

$$z=x+\int\limits_0^x\nu(y)\,dy;\qquad \varepsilon(x)=\frac{1}{c_0}[c(x)-c_0];$$

$$\nu(x)=\left[\frac{\beta^2(x)c_0^5\rho_0}{\beta_0^2c^5(x)\rho(x)}\right]^{1/2}-1;\qquad \langle\varepsilon\rangle=\langle\nu\rangle=0.$$

При этом акустическое поле $\mathscr{P}(t; x)$ следующим образом выражается через $P(s; z)$ — решение уравнения Римана (11):

$$\mathscr{P}(t;x)=P\left[t+\frac{1}{c_0}\int\limits_0\varepsilon(y)\,dy;\ x+\int\limits_0^x\nu(y)\,dy\right].$$

Отсюда видно, что $\varepsilon(x)$ имеет смысл относительных флуктуаций скорости распространения волны как целого, а $\nu(x)$ — относительных флуктуаций степени нелинейного искажения волны. Статистические характеристики волны в случайно-неоднородной среде можно определить, усредняя описанные выше характеристики акустической волны в однородной среде по ансамблю $\int\limits_0^x\varepsilon(y)\,dy$ и $\int\limits_0^x\nu(y)\,dy$. Легко видеть, что средняя энергия волны в случайно-неоднородной среде не зависит от флуктуаций скорости распространения волны и задается выражением

$$\langle Э(x)\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}Э(z)W(z;x)\,dz. \tag{12}$$

Здесь $W(z;x)=\left\langle\delta\left[z-\int\limits_0^x\nu(y)\,dy\right]\right\rangle$ — плотность вероятности $\int\limits_0^x\nu(y)\,dy$.

Плотность $W(z; x)$ в конкретных случаях может быть разной. Однако при $x'\gg l_\nu$ (l_ν — длина корреляции неоднородностей $\nu(x')$), когда справедливы условия центральной предельной теоремы, оправдано гауссово приближение. При этом

$$W(z;x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi Dx}}\exp\left\{-\frac{(z-x)^2}{2Dx}\right\}, \tag{13}$$

$$D=\langle\nu^2\rangle l_\nu\beta_0\omega\mathscr{P}_0.$$

На стадии образования ударного фронта среднюю энергию волны найдем, подставив в (12) $\mathrm{Э}(z)$ из (7). В переменных $u=(z-1)/\sqrt{2Dx}$, $v(x)=(x-1)/\sqrt{2Dx}$ (12) принимает вид

$$(14)\qquad \langle \mathrm{Э}(x)\rangle=1-\frac{16\sqrt{6}\,(2Dx)^{5/4}}{5\pi^{3/2}}\int\limits_0^\infty u^{5/2}e^{-[u-v(x)]^2}\,du$$

и при $v=0$ $(x=1)$ (14) равна:

$$\langle \mathrm{Э}(x)\rangle|_{x=1}=1-\frac{16(72)^{1/4}\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{5\pi^{3/2}}D^{5/4}=1-1{,}54D^{5/4}.$$

Отсюда видно, что при $x=1$, когда в однородной среде энергия волны еще сохраняется, средняя энергия волны в случайно-неоднородной среде уже меньше энергии волны на входе. Это уменьшение связано с тем, что у реализаций, подверженных большим нелинейным искажениям, разрывы формируются на тех расстояниях, где в однородной среде ударные фронты еще не успели появиться. Следовательно, энергия в реализациях с большими нелинейными искажениями при $x=1$ уже диссипирует и средняя энергия оказывается меньше, чем в однородной среде.

При $v\neq0$ аналитическое выражение интеграла (14) неизвестно и для нахождения его требуется применение численных методов. При $|v|\gg1$ приближенное аналитическое значение интеграла (14) удается найти; при $x<1$; $v(x)\ll-1$

$$\langle \mathrm{Э}(x)\rangle=1-\frac{6\sqrt{3}\,(Dx)^3}{\pi(1-x)^{7/2}}\exp\left\{-\frac{(1-x)^2}{2Dx}\right\}$$

при $1<x<1{,}08$; $v(x)\gg1$

$$\langle \mathrm{Э}(x)\rangle=1-\frac{16\sqrt{6}\,(x-1)^{5/2}}{5\pi}-\frac{6\sqrt{6}\,Dx(x-1)^{1/2}}{\pi}.$$

Последнее слагаемое в этих выражениях описывает влияние случайных неоднородностей среды на среднюю энергию волны.

В области развитых разрывов средняя энергия находится из формул (9), (12):

$$\langle \mathrm{Э}(x)\rangle=\frac{2\pi^2}{3(x+1)^2}+\frac{2\pi^2Dx}{(x+1)^4}.$$

Таким образом, в этой области энергия первоначально монохроматической волны в случайно-неоднородной среде в среднем больше, чем ее энергия в однородной среде. Увеличение энергии волны в области развитых разрывов объясняется тем, что здесь больший вклад в среднюю энергию дают реализации с меньшими нелинейными искажениями. Функция $\mathrm{Э}(x)$ при $x^*\simeq1{,}8$ имеет точку перегиба. Разложим $\mathrm{Э}(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки перегиба:

$$\mathrm{Э}(x)\simeq\mathrm{Э}(x^*)+\frac{\mathrm{Э}'(x^*)}{1!}\Delta x+\frac{\mathrm{Э}'''(x^*)}{3!}\Delta x^3.$$

Усреднив это разложение по статистике $\int\limits_0^x \nu(y)\,dy$ (12), получим, что энергия в случайно-неоднородной среде и в однородной среде в точке перегиба совпадают. Таким образом, до точки перегиба энергия в случайно-неоднородной среде в среднем меньше, а после точки перегиба в среднем больше энергии волны в однородной среде.

Аналогично можно найти и среднюю амплитуду разрыва первоначально синусоидальной волны в случайно-неоднородной среде, подставив в (12) вместо $Э(z)$ выражение $\mathscr{P}_\text{р}(z)/\mathscr{P}_0$ из (6). При $x<1$; $v(x)\ll-1$

$$\left\langle \frac{\mathscr{P}_\text{р}(x)}{\mathscr{P}_0} \right\rangle = \frac{\sqrt{3}\,Dx}{2(1-x)^{5/2}}\exp\left\{-\frac{(1-x)^2}{2Dx}\right\}.$$

При $x=1$

$$\left\langle \frac{\mathscr{P}_\text{р}(x)}{\mathscr{P}_0} \right\rangle\Bigg|_{x=1} = \frac{(72)^{1/4}\Gamma(3/4)}{2\sqrt{\pi}}D^{1/4}=1{,}04D^{1/4}.$$

При $1<x<1{,}1$; $v(x)\gg1$

$$\left\langle \frac{\mathscr{P}_\text{р}(x)}{\mathscr{P}_0} \right\rangle = \sqrt{6}\,(x-1)^{1/2}-\frac{\sqrt{6}\,Dx}{8(x-1)^{3/2}}.$$

В области развитых разрывов, подставив в (12) $\mathscr{P}_\text{р}(z)/\mathscr{P}_0$ из (8), имеем

$$\left\langle \frac{\mathscr{P}_\text{р}(x)}{\mathscr{P}_0} \right\rangle = \frac{\pi}{x+1}+\frac{\pi Dx}{(x+1)^3}.$$

Зависимость амплитуды разрыва от x в однородной среде при $x_1\simeq2$ имеет точку перегиба. Из сказанного выше относительно точки перегиба энергии в однородной среде следует, что средняя амплитуда разрыва в случайно-неоднородной и однородной средах совпадают в точке перегиба. Кроме того, ясно, что есть еще одна точка $x_0\simeq1$, где средняя амплитуда разрыва в случайно-неоднородной среде совпадает с амплитудой разрыва в однородной среде. Если $x<x_0$, то в среднюю амплитуду разрыва больший вклад дают реализации с большими нелинейными искажениями, и средняя амплитуда больше, чем в однородной среде. При $x_0<x<x_1$ средняя амплитуда разрыва в случайно-неоднородной среде меньше, чем в однородной. При $x=\pi/2$ амплитуда разрыва в однородной среде достигает максимума $\mathscr{P}_\text{р}(\pi/2)/\mathscr{P}_0=1$ [5]. В случайно-неоднородной среде всегда $\langle\mathscr{P}_\text{р}(x)/\mathscr{P}_0\rangle<1$, так как амплитуды разрывов разных реализаций достигают максимума при различных x.

Заметим, что приведенный расчет нетрудно обобщить на случай сферических волн и на те случаи, когда нельзя пренебречь фокусировками акустической волны, подставив в (10) $\Delta(x)$ из решения уравнения эйконала. Вопрос о влиянии случайных неоднородностей среды на шумовые волны требует дополнительного исследования.

Авторы благодарны С. Н. Гурбатову за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Островский Л. А., Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е.* Распространение акустических волн конечной амплитуды в неоднородной среде при наличии каустик.– Акуст. ж., 1976, т. 22, № 6, с. 914–921.
2. *Фридман В. Е.* О распространении интенсивной акустической волны в плоскослоистой среде.– Акуст. ж., 1976, т. 22, № 4, с. 620–621.
3. *Пелиновский Е. Н., Саичев А. И., Фридман В. Е.* Об образовании ударной волны в статистически неоднородном газе.– Акуст. ж., 1972, т. 18, № 4, с. 627–629.
4. *Пелиновский Е. Н.* О распространении поверхностной волны конечной амплитуды при учете статистических неровностей дна.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1971, т. 7, № 11, с. 1226–1227.
5. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
6. *Гурбатов С. Н., Демин И. Ю., Сутин А. М.* Взаимодействие нелинейно-ограниченных сферических пучков в параметрических излучателях.– Акуст. ж., 1979, т. 25, № 4, с. 515–520.
7. *Пелиновский Е. Н., Петухов Ю. В., Фридман В. Е.* Приближенные уравнения распространения мощных акустических сигналов в океане.– Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1979, т. 15, № 4, с. 436–444.

Горьковский
государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
22.I.1981