

УДК 534.232

**ТОНКОСТЕННЫЙ СФЕРИЧЕСКИЙ ПЬЕЗОПРИЕМНИК
С УПРАВЛЯЕМОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКОЙ**

Грищенко Е. К.

Методом самосогласованного поля рассмотрены характеристики тонкостенного сферического пьезоприемника с произвольной электрической нагрузкой, находящегося в квазистатическом звуковом поле. Показана возможность управляемой звукоизоляции внутреннего объема сферического пьезоприемника от внешнего источника звука.

Известны работы [1-3], в которых характеристики сферического пьезоприемника рассчитаны без учета влияния электрической нагрузки на характер его колебаний, т.е. в приближении заданного поля. Вместе с тем по аналогии с пьезоприемниками пластинчатого и стержневого типов можно ожидать достаточно сильное влияние электрической нагрузки пьезоприемника на характер колебаний его сферической оболочки за счет вторичных эффектов [4].

В данной работе мы учтем влияние вторичных эффектов на характеристики тонкостенного сферического пьезоприемника, находящегося в квазистатическом звуковом поле.

Рассмотрим тонкую сферическую оболочку с толщиной стенки h и радиусом R ($h/R \ll 1$), выполненную из пьезоактивного материала, например из однородно поляризованной по толщине пьезокерамики, и покрытую с обеих сторон невесомыми электропроводящими обкладками, соединенными с произвольной электрической нагрузкой $Z_n = R_n + iX_n$. Обозначим направление, совпадающее с толщиной сферической оболочки, индексом 3, а индексами 1 и 2 — два взаимно перпендикулярных направления в плоскости, нормальной к направлению 3. Будем считать, что деформации оболочки сводятся лишь к однородному по ее толщине растяжению и сжатию. Тогда, применяя систему сокращенных обозначений индексов и учитывая, что в тонкой сферической оболочке из пьезокерамики [5] $T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0$, $E_1 = E_2 = 0$, $D_1 = D_2 = 0$, $T_1 = T_2 = T_c$, $S_1 = S_2 = S_c = \xi/R$, $d_{32} = d_{31}$ и $s_c^E = 1/2(s_{11}^E + s_{12}^E)$, местные уравнения пьезоэффекта для оболочки можно записать в следующем виде:

$$(1) \quad \begin{aligned} S_c &= 2s_c^E T_c + d_{13} E_3, \\ D_3 &= 2d_{31} T_c + \epsilon_{33}^T E_3. \end{aligned}$$

Здесь ξ — радиальное смещение сферической оболочки, T_i — компоненты механического напряжения, S_j — компоненты деформации, D_n и E_k — компоненты электрической индукции и электрического поля соответственно, d_{nj} — пьезомодули, s_{ij}^E — модули упругой податливости при постоянном электрическом поле, ϵ_{nk}^T — диэлектрические проницаемости при постоянном механическом напряжении, $i, j = 1, 2, \dots, 6$; $n, k = 1, 2, 3$.

Из формулы (1) следует, что в случае тонкой сферической оболочки местные уравнения пьезоэффекта формально отличаются от таковых для тонкого стержня [6] только модифицированными величинами модуля упругой податливости в первом уравнении и пьезомодуля во втором. В тонком пьезоэлектрическом стержне с обкладками, соединенными с электрической нагрузкой, одномерные механические напряжения связаны с соответствующими деформациями соотношением [6]

$$(2) \quad T_1 = \frac{1}{s_{11}^E} \left(S_1 + \frac{\gamma}{l} \int_{-l/2}^{l/2} S_1 dx \right),$$

здесь l — размер электродов в направлении распространения звуковой волны, $\gamma = \eta / (1 - \eta)$, где $\eta = \mathcal{K}^2 Z_n / (Z_n + Z_n)$, $\mathcal{K} = d_{31} / \sqrt{\epsilon_{33}^T s_{11}^E}$ — коэффициент электромеханической связи для стержня, $Z_n = iX$ электрический импеданс заторможенного пьезопреобразователя. Учитывая квазистатический характер деформации, в случае сферического пьезоприемника ($S_1 = S_2 = S_c$ — не зависят от координаты) из формул (1) и (2) получим

$$(3) \quad T_c = \frac{S_c}{s^*},$$

где $s^* = s_{11}^E a (1 - \gamma_c)$ — эффективный модуль упругой податливости для тонкостенной сферической оболочки, $\gamma_c = \mathcal{K}_c^2 Z_n / (Z_n + Z_n)$, $a = 1 + s_{12}^E / s_{11}^E$, $\mathcal{K}_c = d_{31} / \sqrt{\epsilon_{33}^T s_c^E}$ — коэффициент электромеханической связи для тонкостенной сферической оболочки.

Из формулы (3) следует, что s^* зависит от модулей упругой податливости материала при постоянном E , от величины коэффициента электромеханической связи — \mathcal{K}_c и от электрической нагрузки сферического пьезоприемника — Z_n . Пьезоэлектрическая добавка к модулю упругой податливости, вообще говоря, комплексная и в зависимости от величины и характера электрической нагрузки может как увеличивать, так и уменьшать упругость пьезоэлектрической сферы.

Рассмотрим подробнее величину и характер пьезоэлектрической добавки в эффективный модуль упругой податливости s^* . Представим $\gamma_c = \gamma_{c1} + i\gamma_{c2}$, тогда из формулы (3) получим

$$(4) \quad \begin{aligned} \gamma_{c1} &= \mathcal{K}_c^2 \frac{r_n^2 + x_n(1 + x_n)}{r_n^2 + (1 + x_n)^2}, \\ \gamma_{c2} &= -\mathcal{K}_c^2 \frac{r_n}{r_n^2 + (1 + x_n)^2}, \end{aligned}$$

а $r_n = R_n / X$ и $x_n = X_n / X$ — нормированные величины активной и реактивной частей электрической нагрузки сферического пьезоприемника соответственно, причем $r_n^{-1} = Q$ — величина добротности резонансного электрического контура, составленного статической емкостью сферического пьезоприемника и импедансом внешней электрической нагрузки. Нетрудно видеть, что γ_{c1} достигает экстремальных значений в точках $(x_n)_1 = -1 - r_n$ и $(x_n)_2 = -1 + r_n$. При этом соответственные значения γ_{c1} равны

$$\gamma_{c1}[(x_n)_1] = \mathcal{K}_c^2 \left(1 + \frac{Q}{2}\right) \quad \text{и} \quad \gamma_{c1}[(x_n)_2] = \mathcal{K}_c^2 \left(1 - \frac{Q}{2}\right).$$

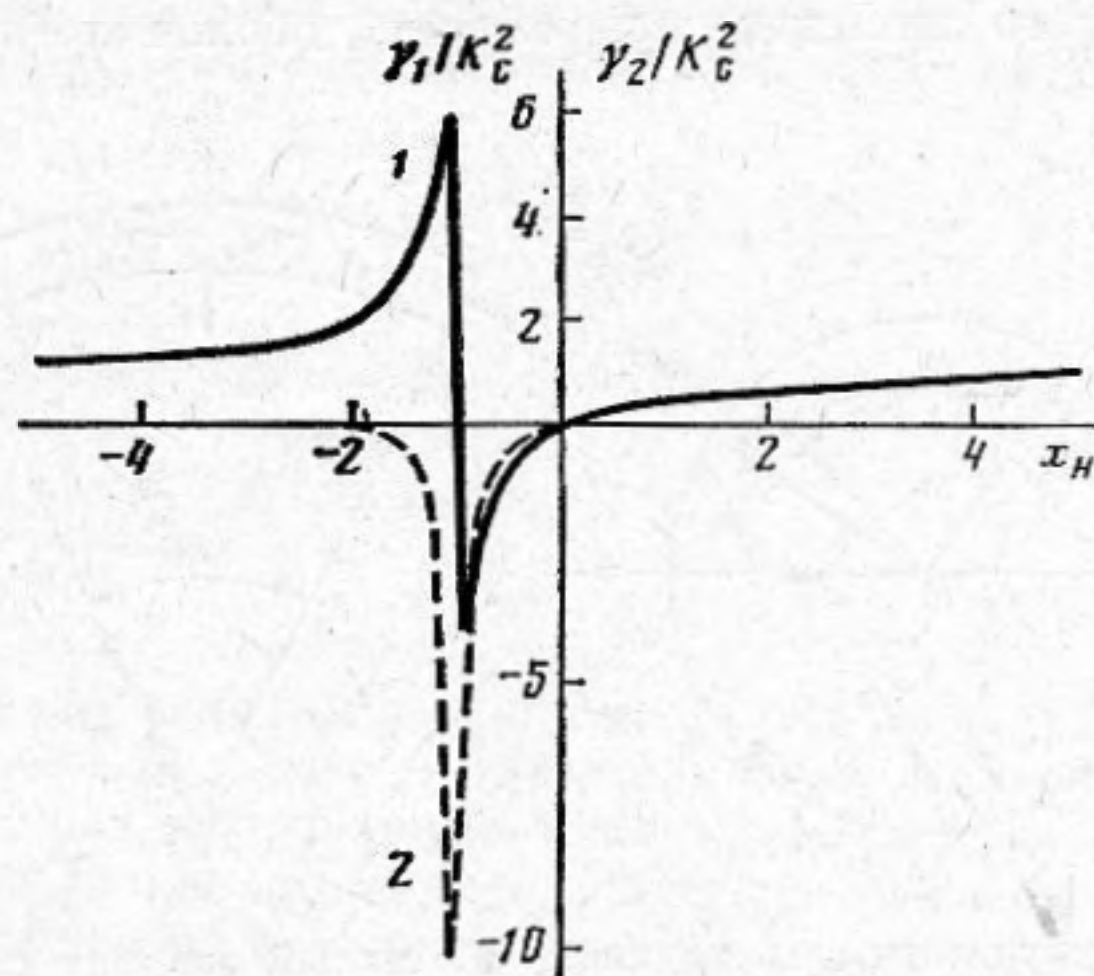
В точках $x_n = \frac{1}{2}(-1 \mp \sqrt{1 - 4r_n^2})$ γ_{c1} меняет знак. Экстремум для γ_{c2} дости-

гается при $x_n = x_n^* = -1$ и соответственно равен $\gamma_{c2}(x_n^*) = -\mathcal{K}_c^2 Q$.

На фиг. 1 представлена зависимость нормированных на \mathcal{K}_c^2 действительной — γ_{c1} и мнимой — γ_{c2} частей пьезоэлектрической компоненты упругой податливости от x_n для $Q = 10$. Из графика и формул (4) следует, что для достаточно сильных пьезоэлектриков с $\mathcal{K}_c^2 \geq 0,5$ при $x_n < -1$ пьезоэлектрический член в s^* может полностью скомпенсировать упругую податливость пьезоэлектрической оболочки. В этом случае при $\gamma_{c2} \ll 1$ поведение сферической пьезоэлектрической оболочки близко к поведению абсолютно жесткой сферы. Напротив, в области значений $1/2(-1 - \sqrt{1 - 4r_n^2}) < x_n < 1/2(-1 + \sqrt{1 - 4r_n^2})$ пьезоэлектрический член в s^* увеличивает упругую податливость сферической оболочки, кроме того, в этой же области велико по модулю γ_{c2} , поэтому поведение пьезоэлектрической сферической оболочки становится близко к поведению абсолютно мягкой сферы. На частоте электрического резонанса при $x_n = -1$ в s^* преобладает мнимая пьезоэлектрическая добавка, поэтому пьезоэлектрическая сферическая оболочка ведет себя на этой частоте как диссипативная колебательная система с большой податливостью. Заметим, что по мере увели-

чения Q требования на необходимую величину \mathcal{K}_c , позволяющую эффективно влиять на s^* с помощью электрической нагрузки, снижаются.

Рассчитаем параметры тонкостенного сферического пьезоприемника с учетом полученных выше результатов. Пусть материал сферической оболочки имеет плотность ρ_1 и характеризуется скоростью юнговской звуковой волны без учета пьезоэффекта c_1 , а окружающая и заполняющая оболочку жидкая или газообразная среды характеризуются соответственно плотностями ρ_2, ρ_3 и скоростями звуковых волн c_2, c_3 . Здесь и ниже числовые индексы у величин обозначают их принадлежность к соответствующей среде. Будем считать, что внутренний объем пьезоприемника герметизирован, а размер пьезоприемника удовлетворяет условию $k_n R \ll 1$, где k_n —



Фиг. 1. Зависимость нормированных на \mathcal{K}_c^2 действительной (1) и мнимой (2) частей пьезоэлектрической компоненты упругой податливости γ_c от x_n для $Q=10$

волновое число, $n=1, 2, 3$. В случае квазистатического внешнего воздействия на пьезоприемник с гармонической зависимостью давления P от времени звуковые поля в окружающей и заполняющей пьезоприемник средах можно искать в виде

$$(5) \quad P_2(r) = P_0 + \frac{A}{r} e^{ik_2 r},$$

$$P_3(r) = \frac{\mathcal{D}}{r} \sin k_3 r,$$

где P_0 — амплитуда давления внешнего звукового поля в отсутствие пьезоприемника, r — расстояние от центра сферы, A и \mathcal{D} — произвольные коэффициенты. Из уравнений (5), уравнений движения и условий равенства смещений на границах между оболочкой и окружающей, заполняющей ее средами, сохраняя члены до третьего порядка малости по $k_n R$, получим [7]

$$(6) \quad P_2(R) = P_0 - \rho_2 c_2^2 (k_2 R)^2 (1 + ik_2 R) \frac{\xi}{R},$$

$$P_3 = -3\rho_3 c_3^2 \frac{\xi}{R}.$$

Здесь толщиной оболочки и ее относительным изменением при деформациях мы пренебрегаем ($h/R \ll 1$).

Рассмотрим движение малого элемента сферической оболочки под действием внешних сил. Пусть на малый элемент сферической оболочки (фиг. 2, а) действуют равномерно распределенные по контуру растягивающие напряжения T_c , тогда сила, действующая на малую площадку

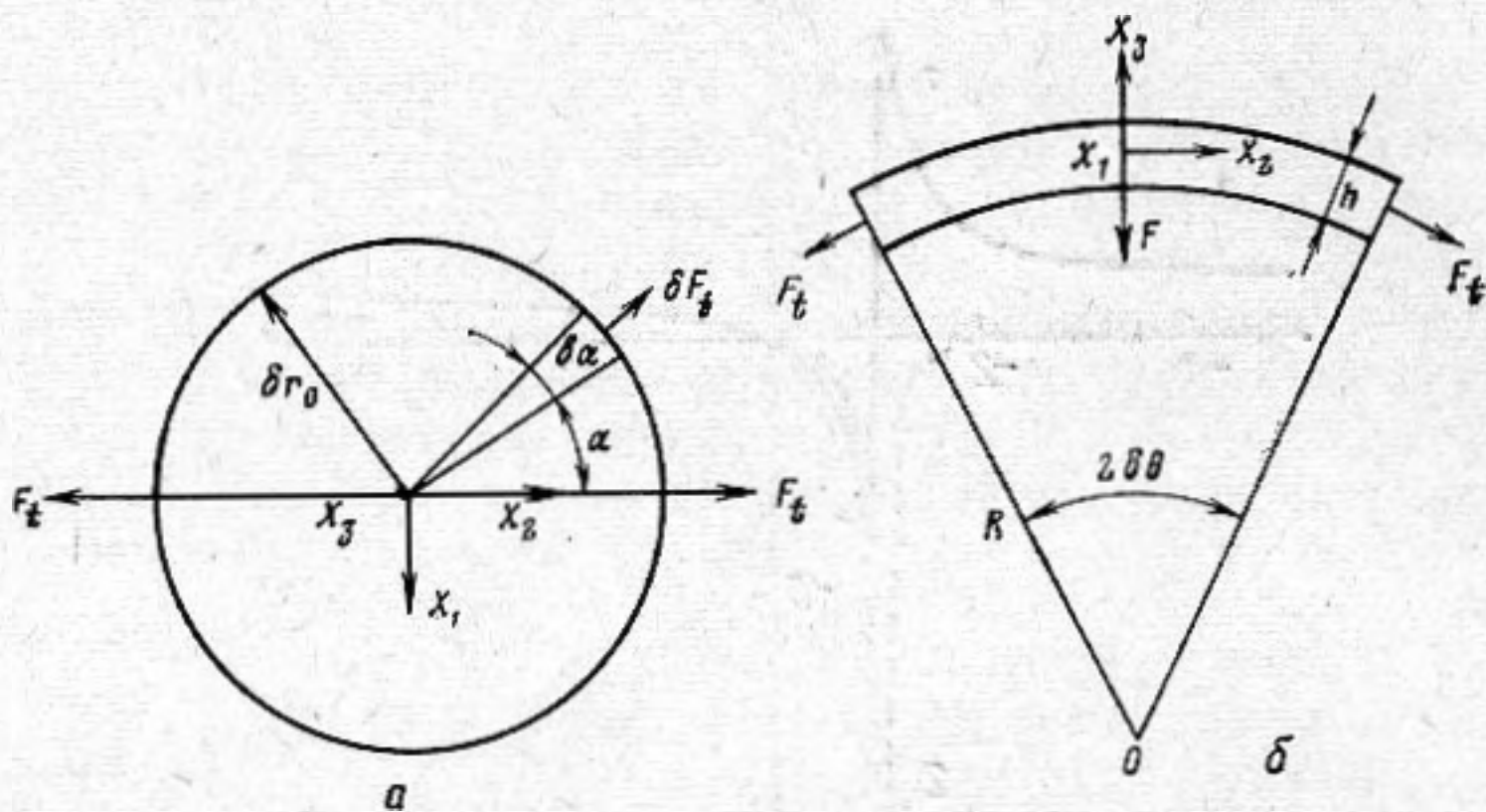
боковой поверхности элемента, соответствующую углу $\delta\alpha$, равна

$$\delta F_t = T_c h \delta r_0 \delta\alpha = T_c h R \delta\theta \delta\alpha.$$

Здесь δr_0 — радиус элемента сферической оболочки, а $2\delta\theta$ — соответствующий ему центральный угол сферы (фиг. 2, б). Проекция на ось X_2 равнодействующей всех таких сил для $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ равна

$$F_t = T_c h R \delta\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = 2T_c h R \delta\theta.$$

Проекция на ось X_3 равнодействующей сил F_t , действующих на весь элемент сферической оболочки (фиг. 2, б), равна $F = 2F_t \delta\theta = 4T_c h R (\delta\theta)^2$. Масса рассматриваемого элемента сферической оболочки — $m = \pi R^2 \rho_1 h (\delta\theta)^2$,



Фиг. 2. Силы упругости, действующие на малый элемент сферической оболочки: вид в плоскости X_1X_2 — (а) и вид в плоскости X_2X_3 — (б)

а его площадь — $S_0 = \pi R^2 (\delta\theta)^2$. Уравнение движения для малого элемента сферической оболочки можно записать теперь в виде

$$(7) \quad -\pi R^2 \rho_1 h (\delta\theta)^2 \omega^2 \xi = \pi R^2 (\delta\theta)^2 [P_3 - P_2(R)] - 4T_c h R (\delta\theta)^2,$$

где ω — циклическая частота. Подставляя выражения (3) и (6) в (7), получим

$$(8) \quad \frac{\xi}{R} = P_0 \left\{ \rho_2 c_2^2 (k_2 R)^2 (1 + i k_2 R) - 3\rho_3 c_3^2 + \right. \\ \left. + \rho_1 c_1^2 \frac{h}{R} \left[(k_1 R)^2 - \frac{4}{\pi a (1 - \gamma_c)} \right] \right\}^{-1} = P_0 (C^*)^{-1},$$

где C^* — обобщенный коэффициент упругости сферического пьезоприемника. Нетрудно видеть, что первый член в выражении для C^* обусловлен переизлучением (рассеянием) звука сферическим пьезоприемником в окружающую среду и ее присоединенной массой. Второй член обусловлен упругостью среды, заполняющей пьезоприемник. Третий член описывает инерционные и упругие свойства пьезоэлектрической оболочки, причем эффективный модуль упругой податливости сферической оболочки зависит, как было показано выше, от электрической нагрузки пьезоприемника.

Электрическое поле в пьезоэлектрической оболочке приемника на основании уравнений (1) и (2) равно

$$(9) \quad E_3 = -\frac{2d_{31}}{\epsilon_{33}^T} \cdot \frac{Z_n}{Z_n + Z_p} \cdot T_c.$$

Отсюда, используя формулы (3) и (8), для электрического напряжения на электрической нагрузке пьезоприемника получим

$$(10) \quad V = \frac{2d_{31}h}{\epsilon_{33}^T} \cdot \frac{Z_n}{Z_n + Z_p} \cdot \frac{P_0}{s^* \cdot C^*}$$

Используя формулу (8), нетрудно получить аналитические выражения и для других параметров сферического пьезоприемника [7]. Например, циклическая частота акустического резонанса сферического пьезоприемника без учета поглощения звука в нем равна

$$(11) \quad \omega^* = \left[\frac{3\rho_3 c_3^2 + \frac{4}{\pi a} \cdot \frac{h}{R} \cdot \rho_1 c_1^2 \cdot \operatorname{Re}(1-\gamma_c)^{-1}}{\left(\rho_2 + \frac{h}{R} \cdot \rho_1\right) R^2} \right]^{1/2}$$

и зависит от величины и характера электрической нагрузки пьезоприемника. Удельный акустический импеданс пьезоприемника равен

$$(12) \quad Z_a = \frac{1}{-i\omega R} \left\{ 3\rho_3 c_3^2 - \rho_1 c_1^2 \cdot \frac{h}{R} \left[(k_1 R)^2 - \frac{4}{\pi a (1-\gamma_c)} \right] \right\}.$$

Наконец, сечение рассеяния монополярного типа сферического пьезоприемника равно

$$(13) \quad \sigma = \frac{4\pi R^2 (\rho_2 c_2^2)^2 (k_2 R)^2}{|C^*|^2}$$

и также зависит от величины и характера его электрической нагрузки.

Следует подчеркнуть, что в проведенном выше рассмотрении мы пренебрегли скоростью изменения объема сферического пьезоэлемента по сравнению с объемной скоростью монополя. Количественно это эквивалентно пренебрежению величиной рассеянного звукового поля от несжимаемой сферы, которое в нашем случае $k_n R \ll 1$ весьма мало и составляет величину [7] $\sigma = \frac{4}{9} \pi R^2 (k_2 R)^4$.

Проведем численную оценку влияния электрической нагрузки на параметры тонкостенного сферического пьезоприемника. Пусть $\rho_1 c_1^2 = 10^{11}$ н/м² (BaTiO₃), $\rho_2 c_2^2 = 2,25 \times 10^9$ н/м² (вода), $\rho_3 c_3^2 = 1,5 \times 10^5$ н/м² (воздух), $h/R = 10^{-1}$, $k_1 R = 3 \times 10^{-3}$, $k_2 R = 10^{-2}$, $\mathcal{K}_c^2 = 0,1$, $a = 0,7$, тогда $4\rho_1 c_1^2 h / \pi a R = 1,8 \times 10^{10}$ н/м², $\rho_1 c_1^2 (k_1 R)^2 h / R = 10^5$ н/м², $\rho_2 c_2^2 (k_2 R)^2 = 2,25 \times 10^5$ и $3\rho_3 c_3^2 = 4,5 \times 10^5$ н/м². Из формулы (8) следует, что величина C^* в рассматриваемом случае определяется упругостью оболочки сферического пьезоприемника и приближенно равна

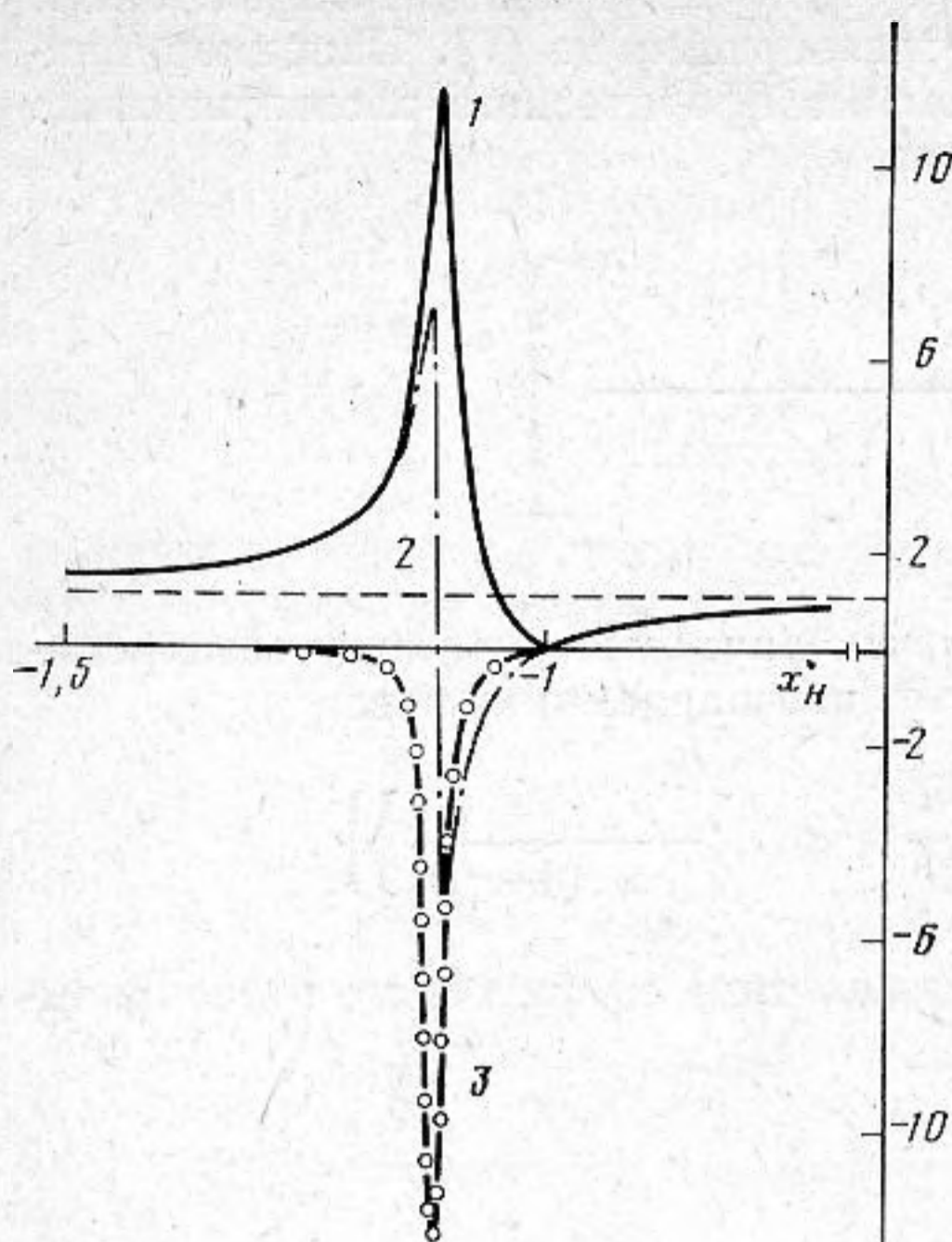
$$(14) \quad C^* \approx - \frac{4\rho_1 c_1^2}{\pi a} \cdot \frac{h}{R} (1-\gamma_c)^{-1} = - \frac{4\rho_1 c_1^2}{\pi a} \cdot \frac{h}{R} \cdot \frac{1-\gamma_{c1} + i\gamma_{c2}}{(1-\gamma_{c1})^2 + \gamma_{c2}^2}.$$

На фиг. 3 представлены зависимости модуля (кривая 1) действительной (кривая 2) и мнимой (кривая 3) частей множителя $(1-\gamma_c)^{-1}$ от величины x_n для $Q=100$.

Для разомкнутой электрической цепи пьезоприемника на основании формул (4) и (14) получим $\gamma_{c1} = \mathcal{K}_c^2$, $\gamma_{c2} = 0$, откуда

$$(15) \quad C^*|_{x_n = \infty} = C_0^* = - \frac{4\rho_1 c_1^2}{\pi a} \cdot \frac{h}{R} (1-\mathcal{K}_c^2)^{-1}.$$

На фиг. 3 этому случаю соответствует штриховая прямая. На частоте электрического резонанса при $x_n = -1$ и $Q=100$ $\gamma_{c1} = \mathcal{K}_c^2$, $\gamma_{c2} = -100\mathcal{K}_c^2$, тогда при $\mathcal{K}_c^2 = 0,1$ $|C^*|/|C_0^*| \approx 0,1$, т. е. модули обобщенного коэффициента упругости и удельного акустического импеданса сферического пьезоприемника с помощью его электрической нагрузки, согласно (12), (14), могут быть уменьшены на порядок, а относительная деформация пьезоприемника и его сечение рассеяния монополярного типа, как следует из формул (8) и (13), могут быть увеличены на один и два порядка соответственно.



Фиг. 3. Зависимость модуля (1), действительной (2) и мнимой (3) частей $(1-\gamma_c)^{-1}$ от x_n для $Q=100$

Напротив, вблизи $x_n = -1,1$ при $\mathcal{K}_c^2 = 0,1$ пьезоэлектрическая добавка полностью компенсирует упругую податливость сферической оболочки. При этом $\gamma_{c1} = 1$, $\gamma_{c2} = -0,1$, $\text{Re}(C^*) = 0$, а обобщенный коэффициент упругости сферического пьезоприемника, согласно (14), становится чисто мнимым и его модуль увеличивается на порядок по сравнению со случаем электрически ненагруженного пьезоприемника. В последнем случае, как нетрудно видеть из формул (8), (12) и (13), модуль удельного акустического импеданса пьезоприемника также увеличивается на порядок, а относительная деформация пьезоприемника и его сечение рассеяния монопольного типа уменьшаются на один и два порядка соответственно.

Из формулы (6) следует, что звуковое давление внутри сферического пьезоприемника полностью определяется относительной деформацией пьезоэлектрической

оболочки. Поэтому полученная выше зависимость деформации оболочки от электрической нагрузки дает возможность осуществления электрически управляемой звукоизоляции внутреннего объема сферического пьезоприемника от внешнего источника звука. Эффективность такой звукоизоляции, как следует из проведенного выше рассмотрения, может регулироваться с помощью электрической нагрузки на величину ~ 40 дБ.

Наконец, рассмотрим влияние электрической нагрузки на частоту акустического резонанса сферического пьезоприемника. При этом следует иметь в виду, что частоты электрического и акустического резонанса сферического пьезоприемника, вообще говоря, не совпадают и могут отличаться от рабочей частоты, которая задается внешним звуковым полем. Изменяя величину x_n , при $x_n = -1$ мы совмещаем частоту электрического резонанса с рабочей частотой, при этом в соответствии с формулой (11) изменяется и частота акустического резонанса, однако ее совпадение с рабочей частотой совсем не обязательно.

Обозначим через ω_0 циклическую частоту акустического резонанса электрически ненагруженного сферического пьезоприемника, тогда из формулы (11) получим

$$(16) \quad \frac{\omega^*}{\omega_0} = \left[\frac{1 + b \cdot \text{Re}(1 - \gamma_c)^{-1}}{1 + b \cdot (1 - \mathcal{K}_c^2)^{-1}} \right]^{1/2},$$

где $b = \frac{4}{3\lambda a} \cdot \frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_3 c_3^2} \cdot \frac{h}{R} \approx 5 \cdot 10^4$. Из формулы (16) следует, что максималь-

ное изменение частоты акустического резонанса пьезоприемника определяется возможностью изменения $\text{Re}(1 - \gamma_c)^{-1}$. Из графиков на фиг. 3 следует, что при изменении $-\infty < x_n \leq -1,12$ величина $\text{Re}(1 - \gamma_c)^{-1}$ изменяется от 1,1 до 7,2. Однако максимальному значению $\text{Re}(1 - \gamma_c)^{-1}$ соответствует примерно равное по величине значение $\text{Im}(1 - \gamma_c)^{-1}$, т. е. колебательная система пьезоприемника при $x_n = -1,12$ становится апериодической. Формулы (11) и (16) не учитывают влияние поглощения звука сферическим пьезоприемником на частоту его акустического резонанса и применимы, строго говоря, только для пьезоприемника с нулевым поглощением звука,

Поэтому полученный ниже результат следует рассматривать как оценку эффекта снизу. Приняв за критерий акустической добротности пьезоприемника условие $\text{Re}(1-\gamma_c)^{-1}/\text{Im}(1-\gamma_c)^{-1} \geq 5$ из графиков на фиг. 3 найдем, что максимальному значению $\text{Re}(1-\gamma_c)^{-1}$ при $x_n = -1,15$ соответствует величина, равная 4. Аналогичная оценка минимального значения $\text{Re}(1-\gamma_c)^{-1}$ при сохранении акустической добротности пьезоприемника дает величину 0,3 при $x_n = -0,96$. Учитывая, что $b \gg 1$, из формулы (16) для пределов относительного изменения циклической частоты акустического резонанса пьезоприемника получим $0,55 \leq \omega^*/\omega_0 \leq 2$. Интересно отметить, что сравнительно небольшое изменение x_n ($\sim 20\%$) вызывает изменение ω^*/ω_0 более чем в 3,5 раза. Столь большой эффект перестройки акустической колебательной системы сферического пьезоприемника с помощью его электрической нагрузки обусловлен резонансным характером изменения обобщенного коэффициента упругости сферического пьезоприемника.

Таким образом, параметры тонкостенного сферического пьезоприемника, находящегося в квазистатическом звуковом поле, существенным образом могут зависеть от величины и характера его электрической нагрузки, что должно учитываться при соответствующих расчетах. Кроме того, эта зависимость может быть использована на практике для создания сферических пьезоприемников с электрически управляемыми параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьева А. А.* Керамические приемники звука. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 178 с.
2. *Лазуткин В. Н.* Колебания полого пьезокерамического шара. — Акуст. ж., 1971, т. 17, № 4, с. 588–592.
3. *Кортнев А. А., Дюбченко М. Е.* Собственные частоты радиальных колебаний сферической пьезокерамической оболочки с внутренним заполнением. — Акустика и ультразвуковая техника, 1978, вып. 13, с. 39–43.
4. *Грищенко Е. К.* О различии в оценке параметров пьезопреобразователей методами заданного и самосогласованного полей. — Акуст. ж., 1979, т. 25, № 1, с. 44–52.
5. Физическая акустика. Т. I, ч. А / Под ред. Мезона У. М.: Мир, 1966. 592 с.
6. *Грищенко Е. К.* Распространение звука в тонком пьезоэлектрическом волноводе с электрической нагрузкой. — Акуст. ж., 1977, т. 23, № 4, с. 561–568.
7. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 495 с.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
21.XI.1980