АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVIII 1982 Вып. 1

УДК 534.231.1

ДВУСТОРОННИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ СРЕДНЕГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЕ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Жук Н. П., Третьяков О. А.

Методом статистической теории возмущений получены эквивалентные граничные условия для среднего поля в случае статистически неровной границы раздела двух сред с малыми пологими неоднородностями.

В теории дифракции волн научный и прикладной интерес представляют явления многократного рассеяния на случайных возмущениях границы. Они играют фундаментальную роль в физике распространения волн в направляющих структурах со статистически неровной границей – природных волноводах типа подводного звукового канала, статистически нерегулярных волноводах радиотехники и акустики, волоконнооптических линиях связи [1].

В конечном счете в задачах со случайными возмущениями нас интересуют статистические моменты волнового поля, и прежде всего среднее поле. При наличии возмущений гладкой поверхности случайными неровностями статистически среднее поле удовлетворяет обычным дифференциальным уравнениям и эквивалентным граничным условиям на «подстилающей» поверхности, которые включают статистические характеристики шероховатой границы раздела.

Малость возмущений границы не всегда позволяет ограничиваться рамками первого приближения теории возмущений при расчете соответствующих эффектов. В тех случаях, когда приходится иметь дело с полем, формирующимся в результате наложения многократных рассеяний на случайных неровностях, это особенно очевидно. Граничные условия, учитывающие в принципе всю бесконечную последовательность рассеяний на случайных шероховатостях, можно получить с помощью методов статистической теории возмущений [1–4].

К настоящему времени известны фундаментальные результаты такого рода [1, 2], однако во всех известных нам работах полученные граничные условия для среднего поля относятся к так называемому типу импедансных, которые связывают характеристики среднего поля по одну сторону подстилающей поверхности. На этой основе получен целый ряд существенных научных и прикладных результатов, относящихся главным образом к теории рассеяния. Вместе с тем представляется необходимым получение также и «двусторонних» граничных условий, связывающих средние поля по разные стороны подстилающей поверхности. Такого рода граничные условия могут быть полезны для решения прикладных задач интроскопии, дефектоскопии и др.

Ниже получены эквивалентные двусторонние граничные условия для статистически среднего звукового поля в случае статистически неровной границы раздела двух сред. В основу положен метод получения граничных условий импедансного типа [1, 2], который был применен для рассмотрения возмущений в «односторонних» граничных условиях для волнового поля.

Приведем сначала необходимое для дальнейшего решения краевой задачи для скалярного поля в случае гладкой границы раздела сред 1 и 2, занимающих области V_1, V_2. Поле $U(R)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu(R)\nabla\frac{1}{\mu(R)}\nabla U(R)+k^2(R)U(R)=\mu(R)f(R) \tag{1}$$

и граничным условиям на Σ

$$(2)\qquad \frac{1}{\mu_2(r)}\frac{\partial U_2}{\partial n}-\frac{1}{\mu_1(r)}\frac{\partial U_1}{\partial n}=\varphi(r),$$
$$U_2(r)-U_1(r)=\psi(r).$$

Здесь $U_i(R)\equiv U(R)$, $\mu_i(R)\equiv\mu(R)$ при $R\in V_i$, $i=1$, 2, $f(R)$ – объемные источники, а $\varphi(r)$, $\psi(r)$ – поверхностные, R, r – радиус-векторы точек вне поверхности Σ и на ней соответственно, n – нормаль к Σ, направленная из области V_1 в область V_2. Кроме того, поле $U(R)$ подчиняется определенным граничным условиям на поверхности, ограничивающей суммарный объем V_1+V_2 (или условиям на бесконечности для неограниченных сред).

Поле объемных источников $f(R)$ можно написать в любой точке пространства R с помощью функции Грина $H(R, R')$, которую считаем известным решением краевой задачи

$$(3а)\qquad \mu(R)\nabla\frac{1}{\mu(R)}\nabla H(R,R')+k^2(R)H(R,R')=\mu(R)\delta(R,R'),$$

$$(3б)\qquad \frac{1}{\mu_2(r)}\frac{\partial}{\partial n}H(r,R')\Big|_{r\in V_2}-\frac{1}{\mu_1(r)}\frac{\partial}{\partial n}H(r,R')\Big|_{r\in V_1}=0,$$
$$H(r,R')|_{r\in V_2}-H(r,R')|_{r\in V_1}=0.$$

Для дальнейшего нам потребуется выразить поле поверхностных источников $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ через функцию Грина задачи (3) и ее производные.

Переформулируем задачу (1), (2) так, чтобы поверхностные источники были заменены некоторым эквивалентным распределением объемных источников в дифференциальном уравнении

$$(4)\qquad \mu(R)\nabla\frac{1}{\mu(R)}[\nabla U(R)-n\psi(r)\delta(\nu)]+k^2U(R)=$$
$$=\mu(R)[\varphi(r)\delta(\nu)+f(R)],$$

где ν – расстояние от точки R до ее проекции r на поверхность Σ.

Итак, мы имеем задачу, в которой фигурируют только объемные источники с распределением

$$\tilde f(R)=f(R)-\varphi(r)\delta(\nu)+\nabla\left[\frac{n\psi(r)\delta(\nu)}{\mu(R)}\right]$$

решение которой выражается известным образом через функцию Грина $H(R, R')$:

$$(5)\qquad U(R)=\int\limits_{V_1+V_2}H(R,R')\tilde f(R')dR'=$$
$$=\int\limits_{V_1V_2}H(R,R')f(R')dR'+\int\limits_{\Sigma}\left[H(R,r')\varphi(r')-\frac{1}{\mu(r')}\frac{\partial}{\partial n'}H(R,r')\varphi(r')\right]dr'.$$

Интегрирование в последнем слагаемом проводится по той стороне поверхности Σ, которая непосредственно примыкает к области V_1 (или V_2), к которой относится точка наблюдения R.

Напишем окончательно соотношения (2), (5) в операторной форме, опустив поле объемных источников в правой части, поскольку оно удовлетворяет нулевым граничным условиям:

$$(6)\qquad \hat A X=\Phi,\ X=\hat G\Phi.$$

Здесь введены матрицы

$$X=\begin{bmatrix}U_2\\U_1\end{bmatrix};\quad \Phi=\begin{bmatrix}\varphi\\\psi\end{bmatrix};\quad \hat A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial}{\partial n} & -\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial}{\partial n}\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

(7)
$$\hat{G}=\int_{\Sigma}\begin{bmatrix} H_{22}(R,r')-\dfrac{1}{\mu_2(r')}\dfrac{\partial}{\partial n'}H_{22}(R,r') \\ H_{11}(R,r')-\dfrac{1}{\mu_1(r')}\dfrac{\partial}{\partial n'}H_{11}(R,r')\end{bmatrix}dr',$$

где $H_{ik}(R,R')\equiv H(R,R')$ при $R\in V_i$; $R'\in V_k$, i, $k=1$, 2.

Пусть теперь шероховатая граница раздела Σ сред 1, 2 задана уравнением

$$\tilde{r}=r+\zeta(r)n,\ \tilde{r}\in\tilde{\Sigma},\ r\in\Sigma.$$

Здесь $\zeta(r)$ — гауссовские случайные отклонения границы раздела $\tilde{\Sigma}$ от средней поверхности Σ.

Требуется поставить краевую задачу для усредненного по ансамблю реализаций случайной величины ζ поля $\langle U(R)\rangle$. Поскольку поле $\langle U(R)\rangle$ также удовлетворяет уравнению (1), то задача, таким образом, сводится к получению эквивалентных граничных условий на средней поверхности Σ вместо исходных условий на $\tilde{\Sigma}$ для случайного поля $U(R)$:

(8)
$$\frac{1}{\mu_2(\tilde{r})}\frac{\partial U_2}{\partial\tilde{n}}-\frac{1}{\mu_1(\tilde{r})}\frac{\partial U_1}{\partial\tilde{n}}=0,$$
$$U_2-U_1=0.$$

Здесь $\tilde{n}$ — нормаль к поверхности $\tilde{\Sigma}$, направленная из области V_1 в область V_2.

Эквивалентные граничные условия на Σ получаются в результате усреднения приближенных граничных условий для случайного поля $U(R)$ на невозмущенной границе Σ. Для неровностей малых и пологих $(\zeta/R)^2\ll\ll1$; $(\nabla_t\zeta)^2\ll1$ (R — радиус кривизны поверхности Σ, ∇_t — проекция градиента на касательную к Σ плоскость) приближенные условия получаются разложением граничных условий (8) по малому параметру ζ и отбрасыванием исчезающе малых членов. Они имеют вид

(9)
$$\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial U_2}{\partial n}-\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial U_1}{\partial n}=\left(\nabla\frac{\zeta}{\mu_2}\nabla_t+\frac{k_2^2}{\mu_2}\zeta\right)U_2-\left(\nabla\frac{\zeta}{\mu_1}\nabla_t+\frac{k_1^2}{\mu_1}\zeta\right)U_1,$$
$$U_2-U_1=-\zeta\frac{\partial U_2}{\partial n}+\zeta\frac{\partial U_1}{\partial n},\quad r\in\Sigma,$$

или, в операторной форме,

(10)
$$\hat{A}X=\hat{V}(\zeta)X$$

с оператором возмущения

(11)
$$\hat{V}(\zeta)=\begin{bmatrix}\nabla\dfrac{\zeta}{\mu_2}\nabla_t+\dfrac{k_2^2}{\mu_2}\zeta & -\nabla\dfrac{\zeta}{\mu_1}\nabla_t-\dfrac{k_1^2}{\mu_1}\zeta \\ -\zeta\dfrac{\partial}{\partial n} & \zeta\dfrac{\partial}{\partial n}\end{bmatrix}.$$

Усредняя по ансамблю граничные условия (10), мы получим эквивалентные граничные условия для средней величины $\langle X\rangle$. Это усреднение произведено в работе [2] с помощью диаграммной техники. Руководствуясь методикой этой работы, напишем граничные условия для средней величины $\langle X\rangle$ в виде

(12)
$$\hat{A}\langle X\rangle=\hat{Q}\langle X\rangle,$$

где $\hat{Q}=[Q_{ik}]$, i, $k=1,2,$ — массовый функционал. Для исходного поля $\langle U(R)\rangle$ эквивалентные граничные условия приобретают вид

$$\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial}{\partial n}\langle U_2\rangle-\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial}{\partial n}\langle U_1\rangle=\left(A_1-B\frac{\partial}{\partial n}\right)\langle U_1\rangle+\left(A_2+B\frac{\partial}{\partial n}\right)\langle U_2\rangle,$$

(13)
$$\langle U_2\rangle-\langle U_1\rangle=\left(E_1-F\frac{\partial}{\partial n}\right)\langle U_1\rangle+\left(E_2+F\frac{\partial}{\partial n}\right)\langle U_2\rangle.$$

Интегральные операторы B, F, $E_{1,2}$, $A_{1,2}$ действуют по касательным к средней границе раздела Σ координатам и выражаются через компоненты матрицы массового функционала $\hat{Q}$. Из-за наличия статистической связи между возмущениями границы в различных точках эти граничные условия являются нелокальными (интегральными) [1]. Так как ядра упомянутых интегральных операторов содержат слагаемые типа дельта-функции и ее производных по касательным к поверхности Σ направлениям, в правой части граничных условий (13) наряду с собственно нелокальной частью содержатся члены, описывающие локальное взаимодействие. Эквивалентные граничные условия (13) для среднего поля на невозмущенной границе раздела Σ являются точными в том смысле, что они получены в результате точного усреднения граничных условий (9) для случайного поля.

Массовый функционал $\hat{Q}$ является решением системы функциональных уравнений, точное решение которой в общем виде неизвестно [4]. В так называемом приближении Бурре он дается формулой $\hat{Q}_Б=\langle\hat{V}(\zeta)\hat{G}\hat{V}(\zeta)\rangle$. В этом же приближении операторы из правой части эквивалентных граничных условий (13) определяются явными формулами:

$$\mp A_{1,2}U(r)=\alpha\sigma^2\int_\Sigma H_{22}(r,r')\hat{p}_{1,2}U(r')\,dr'+$$
$$+\sigma^2\nabla\beta(r)\int_\Sigma\nabla_t H_{22}(r,r')\hat{p}_{1,2}U(r')\,dr';$$
$$\mp E_{1,2}U(r)=-\sigma^2\mu_1(r)\left[\nabla\frac{1}{\mu_{1,2}(r)}\nabla_t+\frac{k_{1,2}^2(r)}{\mu_{1,2}(r)}\right]U(r)+$$
$$+\sigma^2\beta(r)\mu_1(r)\int_\Sigma\frac{\partial}{\partial n}H_{22}(r,r')\hat{p}_{1,2}U(r')\,dr',$$

(14)
$$BU(r)=-\sigma^2\left[\nabla\frac{1}{\mu_1(r)}\nabla_t+\frac{k_1^2(r)}{\mu_1(r)}\right]U(r)+$$
$$+\sigma^2\int_\Sigma(\hat{q}_2-\hat{q}_1)\frac{1}{\mu_2(r')}\frac{\partial}{\partial n}H_{22}(r,r')U(r')\,dr',$$
$$FU(r)=\sigma^2\beta(r)\mu_1(r)\int_\Sigma\frac{W(r,r')}{\mu_2(r')}\frac{\partial^2}{\partial n\,\partial n'}H_{22}(r,r')U(r')\,dr',$$
$$\alpha(r)=\frac{k_2^2(r)}{\mu_2(r)}-\frac{k_1^2(r)}{\mu_1(r)};\quad\beta(r)=\frac{1}{\mu_2(r)}-\frac{1}{\mu_1(r)},$$

(15)
$$\hat{p}_{1,2}=\nabla'\frac{W(r,r')}{\mu_{1,2}(r')}\nabla_t+\frac{k_{1,2}^2(r')}{\mu_{1,2}(r)}W(r,r'),$$
$$\hat{q}_{1,2}=\nabla\frac{W(r,r')}{\mu_{1,2}(r)}\nabla_t+\frac{k_{1,2}^2(r)}{\mu_{1,2}(r)}W(r,r').$$

В этих формулах σ — дисперсия случайных неровностей, $W(r,r')=\sigma^{-2}\langle\zeta(r)\zeta(r')\rangle$ — коэффициент корреляции. Операторы ∇_t', ∇' действуют по штрихованным переменным, а операторы ∇_t, ∇ — по нештрихованным. В выражении для операторов $A_{1,2}$ второй интеграл содержит оператор ∇_t, который действует только на функцию $H(r,r')$ и не действует на следующую за ней величину $\hat{p}_{1,2}U(r')$. Знаки «$\mp$» соответствуют выбору индексов 1, 2.

При получении эквивалентных граничных условий мы не конкретизировали вид поверхности Σ — пространственную зависимость параметров среды. Достигнутая общность граничных условий обусловлена тем, что, как это видно из формул (14), вся специфика «невозмущенной» задачи для гладкой поверхности Σ оказалась учтенной в функции Грина $H(R, R')$. Это позволило отвлечься от своеобразия невозмущенной задачи и выразить влияние шероховатостей на граничные условия, которым подчиняется среднее поле в «чистом виде».

Однако для конкретных задач граничные условия (13) можно заменить другими, эквивалентными им. Например, для слоистой среды, где $k=k(z)$, $\mu=\mu(z)$, плоской в среднем границы раздела и статистически однородных шероховатостей, коэффициент которых зависит от разностной переменной: $W(r, r')\equiv W(r-r')$, ядра интегральных операторов в формуле (13) являются разностными. Применяя к формуле (13) преобразование Фурье по переменной $r=(x, y)$, мы получим граничные условия для пространственных гармоник среднего волнового поля $\langle U(\varkappa, z)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\times \times\int \langle U(r, z)\rangle e^{-i\varkappa r}\,dr$. Действие упомянутых интегральных операторов в $\varkappa$-представлении по теореме о свертке сводится к умножению на функции переменной $\varkappa$, за которыми удобно сохранить те же обозначения, что и для исходных операторов в r-представлении. Тогда эквивалентные граничные условия для амплитуд пространственных гармоник $\langle U(\varkappa, z)\rangle$ запишутся в виде (13). Коэффициенты $A_{1,2}(\varkappa)$, $E_{1,2}(\varkappa)$, $B(\varkappa)$, $F(\varkappa)$ в приближении Бурре получаются преобразованием Фурье выражений (14) и имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\mp A_{1,2}(\varkappa)=\sigma^2\int W(\varkappa-\varkappa')H_{22}(\varkappa', z, \xi)\times\\
&\times[p_2(\varkappa,\varkappa')-p(\varkappa,\varkappa')]p_{1,2}(\varkappa,\varkappa')\,d\varkappa',\\
&\mp E_{1,2}(\varkappa)=-\sigma^2\frac{\mu_1}{\mu_{1,2}}p_{1,2}(\varkappa,\varkappa)+\sigma^2\beta\mu_1\times\\
&\times\int W(\varkappa-\varkappa')\frac{\partial}{\partial z}H_{22}(\varkappa', z, \xi)\,p_{1,2}(\varkappa,\varkappa')\,d\varkappa',\\
&B(\varkappa)=-\frac{\sigma^2}{\mu_2}p_2(\varkappa,\varkappa)+\frac{\sigma^2}{\mu_2}\int W(\varkappa-\varkappa')\frac{\partial}{\partial z}H_{22}(\varkappa', z, \xi)\times\\
&\times[p_2(\varkappa,\varkappa')-p_1(\varkappa,\varkappa')]\,d\varkappa',\\
&F(\varkappa)=\sigma^2\beta\frac{\mu_1}{\mu_2}\int W(\varkappa-\varkappa')\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\xi}H(\varkappa', z, \xi)\,d\varkappa',\\
&p_{1,2}(\varkappa,\varkappa')=\frac{k_{1,2}^2-\varkappa\varkappa'}{\mu_{1,2}},\qquad z=+0,\qquad \xi=+0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Здесь $W(\varkappa)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int W(r)\exp(-i\varkappa r)\,dr$ — энергетический спектр шероховатостей, $H(\varkappa, z, \xi)\equiv\int H(|r-r'|, z, \xi)\exp[-i\varkappa(r-r')]\,dr$ — фурье-образ функции Грина.

Действие статистически неровной поверхности различно для гармоник среднего поля, отличающихся волновым вектором $\varkappa$, так как коэффициенты (15) зависят от $\varkappa$. Для изотропных шероховатостей, для которых $W(r)=W(r)$, эти коэффициенты зависят только от модуля вектора $\varkappa$ и являются четными функциями переменной $\varkappa$.

Рассмотрим один пример, иллюстрирующий влияние шероховатостей на среднее поле. Пусть свойства среды постоянны при $z\gtrless 0$ и характеризуются величинами $\mu_{2,1}$, $k_{2,1}$. Для пространственной гармоники среднего поля можно поставить граничные условия импедансного типа при $z=+0$:

$$(17)\qquad \frac{\partial U_2}{\partial z}=-ik\eta_э U_2,$$

где $\eta_э(\varkappa)$ — эффективный входной импеданс 1-й среды со стороны 2-й. С помощью граничных условий (13) в $\varkappa$-представлении его можно написать в виде

$$(18)\qquad \eta_э=\eta+\delta\eta,$$

где $\eta=\gamma_1\mu_2/k_2\mu_1$ — входной импеданс в отсутствие шероховатостей; $\delta\eta$ — добавка за счет неровностей границы:

$$(19)\qquad \begin{gathered}\delta\eta(\varkappa)=i\frac{\mu_2}{k_2}\left[A_1+A_2+i\gamma_1\left(1-\frac{\mu_2}{u_1}\right)\left(B+i\frac{\gamma_1}{\mu_1}F\right)+i\frac{\gamma_1}{\mu_1}(E_1+E_2)\right]\\ \gamma_{1,2}(\varkappa)=\sqrt{k_{1,2}^2-\varkappa^2},\qquad \operatorname{Im}\gamma_{1,2}\geqslant 0.\end{gathered}$$

Для определенности положим, что $k_2>k_1$ и что $k_1<\varkappa<k_2$, т. е. имеет место полное внутреннее отражение от нижней, 1-й среды. В этом случае $\operatorname{Re}\eta=0$. Для гладкой границы это означает отсутствие переноса энергии в нижнее полупространство.

Построив функцию $H(\varkappa, z, \xi)$ для рассматриваемой задачи тривиальным образом, определяем коэффициенты $A_{1,2}(\varkappa)$, $E_{1,2}(\varkappa)$, $B(\varkappa)$, $F(\varkappa)$ по формулам (16) и находим $\delta\eta$ по формуле (19). В результате получаем, что

$$\operatorname{Re}\delta\eta=\sigma^2\frac{\gamma_2(\varkappa)}{k_2}\left\{\int_0^{k_1}\frac{W(\varkappa-\varkappa')}{\Delta(\varkappa')}S(\varkappa,\varkappa')d\varkappa'+\right.$$

$$\left.+\int_{k_1}^{k_2}\frac{W(\varkappa-\varkappa')}{|\Delta(\varkappa')|^2}\frac{\gamma_2(\varkappa')}{k_2}t^2(\varkappa,\varkappa')d\varkappa'\right\}>0,$$

$$(20)\qquad \begin{gathered}S(\varkappa,\varkappa')=\mu_2p^2(\varkappa,\varkappa')-\beta^2\gamma_1^2(\varkappa)\gamma_1(\varkappa')\gamma_2(\varkappa')\mu_2,\\ t(\varkappa,\varkappa')=\mu_1p(\varkappa,\varkappa')+\beta\gamma_1(\varkappa)\gamma_1(\varkappa')\mu_2,\\ \Delta(\varkappa)=\frac{\gamma_2(\varkappa)}{\mu_2}+\frac{\gamma_1(\varkappa)}{\mu_1},\qquad p(\varkappa,\varkappa')=p_2(\varkappa,\varkappa')-p_1(\varkappa,\varkappa').\end{gathered}$$

Положительная вещественная часть входного импеданса границы с учетом шероховатостей означает, что энергия среднего поля уменьшается за счет рассеяния и преобразования в некогерентную составляющую. Из формул (20) видно, что медленные волны, экспоненциально затухающие от границы раздела в обеих средах, энергии от границы раздела или к ней не переносят и уменьшения среднего поля не вызывают. Перенос энергии во флуктуационную компоненту осуществляется волнами, которые распространяются в обеих средах (первый интеграл по волновым числам в круге $|\varkappa'|<k_1$), и медленными волнами, которые распространяются в верхней, но затухают от границы в нижней среде (второй интеграл по волновым числам в круге $(k_1<|\varkappa'|<k_2)$.

Существенные научные результаты по граничным соотношениям для когерентной составляющей звукового поля при наличии шероховатой границы раздела двух однородных неограниченных сред получены в работах [5, 6], которые относятся к числу первых, опубликованных на эту тему и основанных на методе возмущений. Последний базируется на существенном физическом предположении о малости воздействия шероховатостей границы на результирующее поле.

Эквивалентные граничные условия (13) получены путем точного усреднения исходных граничных условий (9). При этом не требуется предположения о малости эффекта шероховатостей границы раздела сред на искомое среднее поле. Физически это означает, что эти граничные условия учитывают в принципе всю последовательность рассеяний на шероховатостях.

Понятно, что при решении задач, где явления многократного рассеяния несущественны, результаты, получаемые на основе соотношений (13) в приближении Бурре, и теория возмущений приводят к одним и тем же результатам.

Граничными условиями (13) следует пользоваться, когда в исследуемом явлении присутствует «возвращающий» фактор, обеспечивающий неоднократное перерассеяние поля на возмущениях. В качестве примера можно привести волновод, в котором одна из границ является шероховатой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Басс Ф. Г., Фукс И. М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972.
2. *Фрейлихер В. Д., Фукс И. М.* Метод функций Грина для уравнения Гельмгольца с возмущенными граничными условиями.– Изв. вузов. Радиофизика, 1970, т. 13, № 1, с. 98–105.
3. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.
4. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
5. *Алехин Ю. К., Урусовский И. А.* Прохождение звука через неровную границу раздела воздух – вода. Тр. Акуст. ин-та, 1969, вып. 5, с. 252–271.
6. *Алехин Ю. К.* Возникновение поверхностной волны вблизи шероховатой границы раздела двух сред.– Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 3, с. 499–501.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступила в редакцию
29.X.1980