

УДК 534.222

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ  
В ПОДВОДНЫХ ВОЛНОВОДАХ НА НИЗКИХ ЧАСТОТАХ**

*Булдырев В.С., Явор М.И.*

Обоснована применимость асимптотических методов расчета звуковых полей в слоисто-неоднородных подводных волноводах на низких частотах. Приведены результаты расчетов, подтверждающие высокую эффективность предложенных методов.

Асимптотические методы (лучевой метод и асимптотические варианты метода нормальных волн) широко применяются при расчетах звуковых полей в слоисто-неоднородных подводных волноводах на высоких частотах, когда число распространяющихся нормальных волн велико и расчет их на основе различных численных методов неэффективен. При вычислении низкочастотных звуковых полей лучевой метод дает большие погрешности, и поэтому обычно используется метод нормальных волн с применением весьма трудоемких способов численного интегрирования дифференциального уравнения, возникающего после разделения переменных в задаче. Целью настоящей работы является обоснование применимости асимптотических методов расчета звуковых полей в подводных волноводах на низких частотах. Основным преимуществом таких методов является быстрое действие построенных на их основе вычислительных программ.

Уравнение, возникающее после разделения переменных при использовании метода нормальных волн, имеет вид  $(d^2u)/(dz^2) + [\lambda + (\omega^2)/(c^2(z))]u = 0$ , где  $\omega$  — частота,  $c(z)$  — скорость звука, зависящая от глубины  $z$ ,  $0 \leq z \leq H$ ,  $\lambda$  — параметр разделения переменных. После введения новой безразмерной переменной  $y = z/d$ ,  $d = c_0/2 \max_{0 \leq z \leq H} |dc(z)/dz|$ ,  $c_0 = \min_{0 \leq z \leq H} c(z)$  это уравнение

приводится к виду

$$(1) \quad \frac{d^2u}{dy^2} + p^2[\sigma - q(y)]u = 0,$$

где  $q(y) = -c_0^2/c^2(yd)$ ,  $\sigma = \lambda c_0^2/\omega^2$ ,  $p = \omega/2 \max_{0 \leq z \leq H} |dc(z)/dz|$  — характерный

безразмерный параметр задачи. При выбранной таким образом замене переменной выполняется условие

$$(2) \quad \max_{0 \leq y \leq \frac{H}{d}} \left| \frac{dq(y)}{dy} \right| \leq 1.$$

В задачах подводного распространения звука величина параметра  $p$  колеблется в пределах  $p = (10 \div 100)v$ , где  $v = \omega/2\pi$  измеряется в герцах, что дает возможность применять асимптотические методы решения уравнения (1) для низких частот  $v$  (порядка 1 Гц).

Для того чтобы построить асимптотику решения  $u(y)$  уравнения (1) при больших  $p$ , рассмотрим уравнение

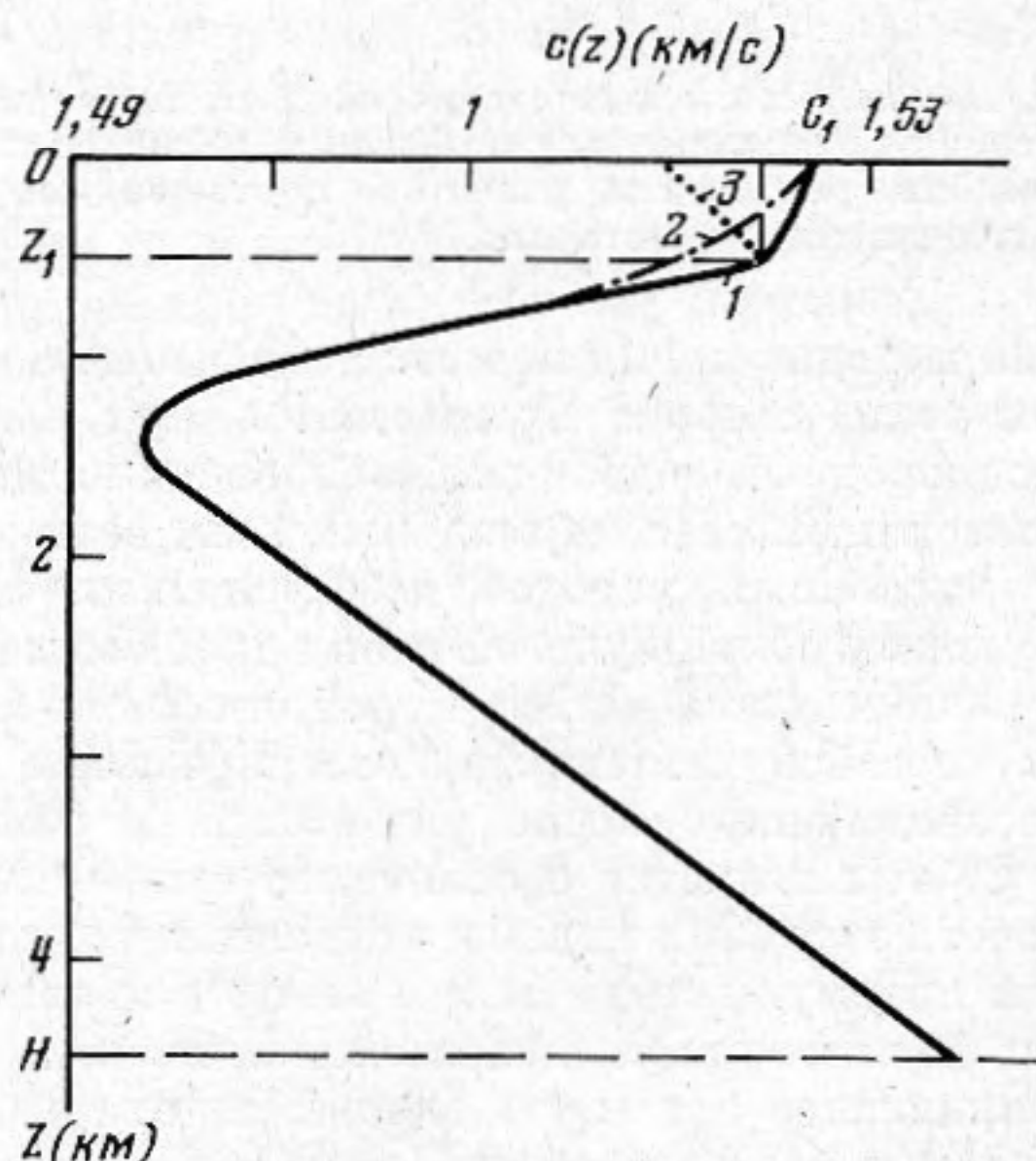
$$(3) \quad v''(x) + p^2[\tau - Q(x)]v(x) = 0,$$

являющееся эталонным по отношению к уравнению (1), т. е. имеющее такие же точки поворота, как и уравнение (1) (точками поворота уравнения (1) называются корни уравнения  $\sigma = q(y)$ ). При отсутствии точек

поворота у уравнения (1) потенциал  $Q(x)$  выбирается постоянным, при наличии одной точки поворота — линейным, при наличии двух близких точек поворота — параболическим. Функция  $u(y) = [x'(y)]^{-1/2} v(x(y))$  является решением уравнения (1), если  $v(x)$  удовлетворяет уравнению (3), и функция  $x(y)$  удовлетворяет уравнению (см., например, [1])

$$(4) \quad x'^2[\tau - Q(x)] - [\sigma - q(y)] = -\frac{1}{2p^2}\{x, y\},$$

где  $\{x, y\} = x'''/x' - 3x''^2/2x'^2$  — производная Шварца. Пренебрегая в уравнении (4) правой частью, получим главный член  $u_0(y)$  асимптотики при



Фиг. 1. Различные зависимости скорости звука от глубины, использовавшиеся при расчетах

больших  $p$  решения  $u(y)$  уравнения (1) в виде

$$(5) \quad u_0(y) = [x_0'(y)]^{-1/2} v(x_0(y)),$$

где функция  $x_0(y)$  определяется из уравнения  $x_0'^2 = (\sigma - q(y)) / (\tau - Q(x_0))$ .

При вычислении низкочастотных звуковых полей приходится пользоваться эталонным уравнением (3) с двумя близкими точками поворота, считая  $Q(x) = x^2/4$ . Тогда решение  $v(x)$  выражается линейной комбинацией функций параболического цилиндра [2]  $D_{p\tau-1/2}(\pm p^{1/2}x)$ , а  $\tau$  и  $x_0(y)$  находятся из соображений [1]

$$\tau = \frac{1}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\sigma - q(s)} ds, \quad \int_{-2\sqrt{\tau}}^{x_0(y)} \sqrt{\tau - \frac{t^2}{4}} dt = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\sigma - q(s)} ds,$$

где  $y_1, y_2$  — точки поворота уравнения (1).

Ясно, что асимптотика (5) является тем более точной, чем меньше величина  $\Psi(y) = \{x_0, y\} / 2p^2$ . Из представления производной Шварца, использованного в работе [1], можно получить, что при отсутствии точек поворота выполняется соотношение

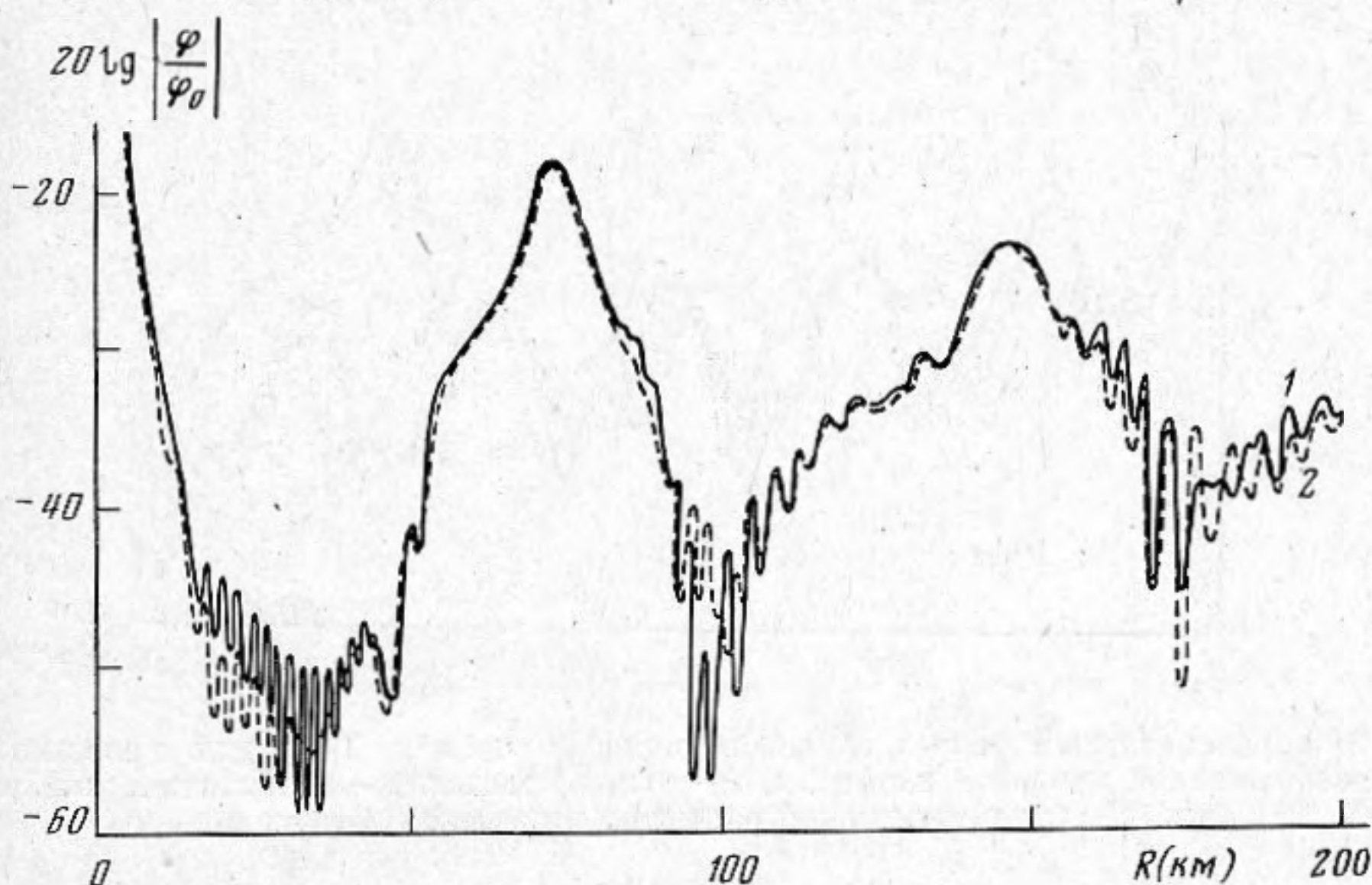
$$(6) \quad \Psi(y) = \frac{1}{p^2} \left\{ \frac{1}{4} \frac{q''(y)}{\sigma - q(y)} - \frac{5}{16} \left[ \frac{q'(y)}{\sigma - q(y)} \right]^2 \right\},$$

а при наличии точки поворота  $y_0 / (q(y_0) = \sigma)$  предел производной Шварца в этой точке имеет вид

$$(7) \quad \Psi(y_0) = \frac{1}{p^2} \left\{ \frac{1}{14} \frac{q'''(y_0)}{q'(y_0)} - \frac{9}{140} \left[ \frac{q''(y_0)}{q'(y_0)} \right]^2 \right\}$$

Из соотношений (6), (7) и (2) следует, что в тех точках  $y$ , где велика вторая производная  $q''(y)$ , функция  $\Psi(y)$  также велика и точность асимптотики (5) понижается. Введем обозначение  $y_1$  для точки, в которой  $q''(y)$  достигает максимума. Ясно, что погрешность асимптотики (5) значительно больше в том случае, если значение спектрального параметра  $\sigma$  близко к значению  $q(y_1)$ , поскольку тогда функция  $\Psi(y_1)$  пропорциональна  $q''(y_1)$ ; если же значение  $\sigma$  не близко к  $q(y_1)$ , то  $\Psi(y_1)$  пропорциональна  $q''(y_1)$ .

Из сказанного следует, что наличие точек с большой второй производной  $q''(y)$  приводит к увеличению погрешности асимптотик нормальных



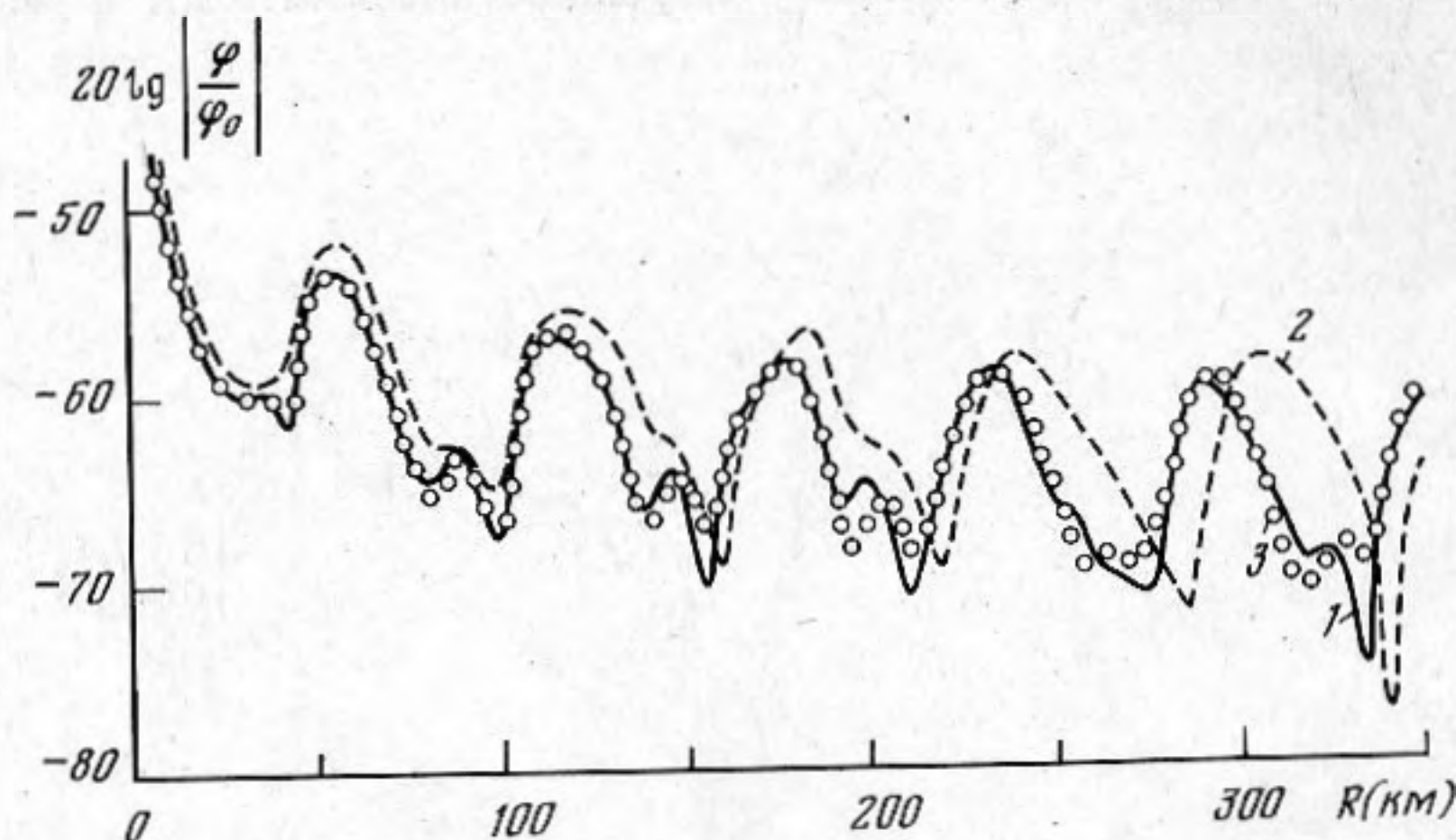
Фиг. 2. Горизонтальный разрез звукового поля на частоте 50 Гц для зависимости  $c(z)$ , изображенной кривой 1 на фиг. 1. 1 — точный расчет, 2 — асимптотический расчет

волн. Однако для различных диапазонов частот это обстоятельство сказывается по-разному. В случае высоких частот, когда параметр  $p$  очень велик, указанная погрешность может быть заметна разве что для нормальных волн с такими номерами  $n$ , для которых соответствующие значения спектральных параметров  $\sigma_n$  близки к значению  $q(y_1)$ . Поскольку эти нормальные волны вносят существенный вклад в звуковое поле лишь на определенных расстояниях от источника до наблюдателя [3], то и отличие асимптотически вычисленной величины поля от точного значения будет заметно только на этих расстояниях. На низких частотах значение  $p$  не очень велико, поэтому наличие точек с большой второй производной  $q''(y)$  может повлечь за собой существенное отличие асимптотики звукового поля от точного его значения на всей длине волновода.

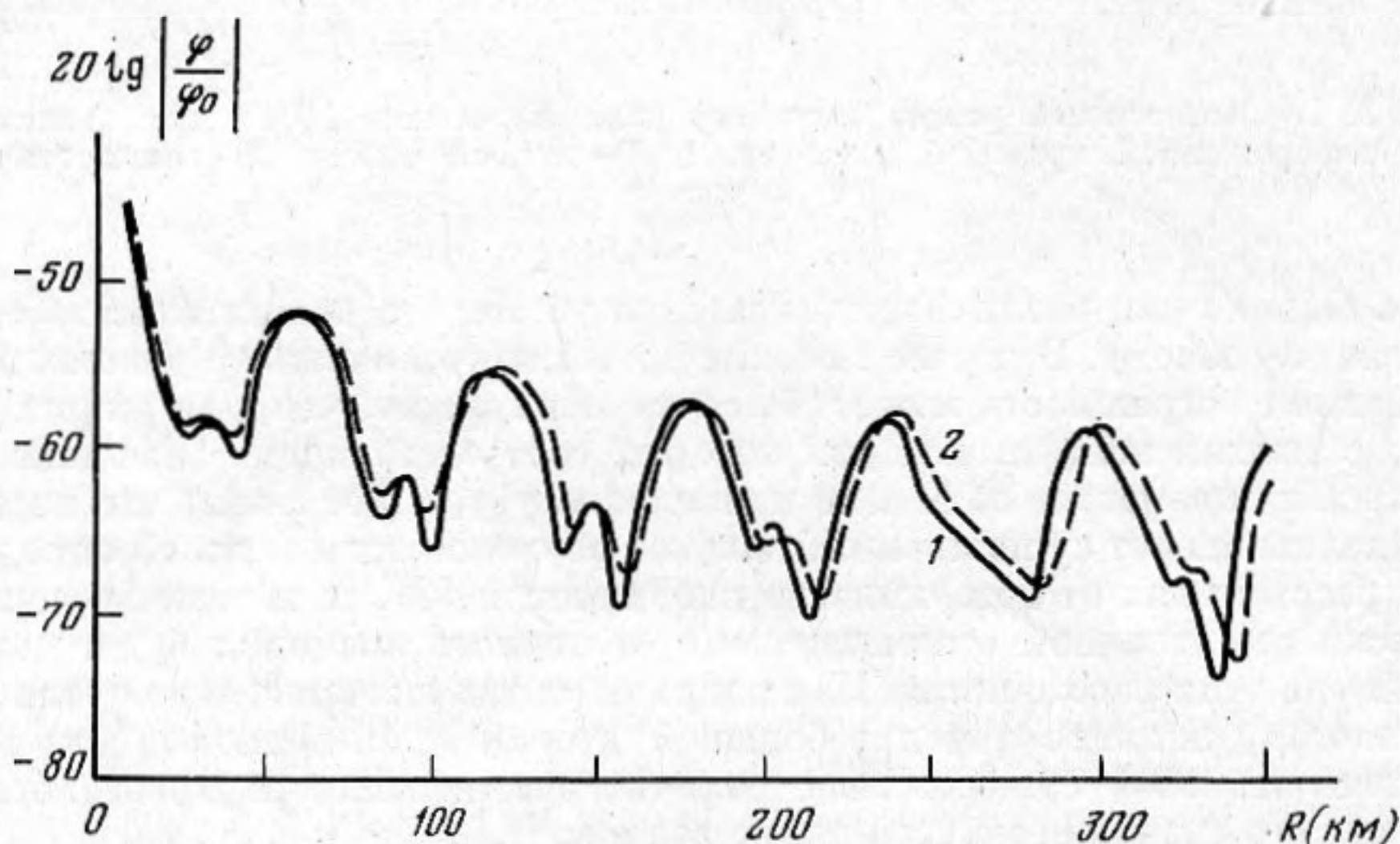
При наличии точек с большим значением  $q''(y)$  использование асимптотической формулы (5) на всем интервале  $0 \leq y \leq H/d$  приводит к большой погрешности. Однако, как правило, в задачах подводного распространения звука  $q''(y)$  бывает велика лишь на некотором узком интервале значений  $y$ , и поэтому зависимость  $q(y)$  можно аппроксимировать кривой, имеющей разрыв первой производной в одной точке  $y_1$  этого интервала, причем в остальных точках этой кривой вторая производная не является большой. В этом случае для сохранения высокой точности асимптотических формул необходимо использовать различные асимптотики решений уравнения (1) при  $y \leq y_1$  и при  $y \geq y_1$  и сшивать их в точке  $y = y_1$ . Такое сшивание не ухудшает быстрейшие действия асимптотических программ расчета звуковых полей, но зато дает возможность использовать эти программы для вычисления полей в океане при наличии приповерхностного и глубинного волноводов и в других ситуациях.

В качестве иллюстрации рассмотрим поле точечного источника звука в подводном волноводе, зависимость скорости звука от глубины в котором изображена кривой 1 фиг. 1. В таком волноводе параметр  $p=65v$  и, следовательно, можно ожидать хорошей точности асимптотических формул для низких частот  $\nu$ .

Во всех расчетах, результаты которых приведены ниже, считалось, что дно является жидким однородным полупространством без поглощения с плотностью  $1,1 \text{ г/см}^3$  и скоростью звука в нем  $1,55 \text{ км/с}$ . Горизонты источника и наблюдателя полагались равными  $100 \text{ м}$ . Результаты асимптотиче-



Фиг. 3. Горизонтальный разрез звукового поля на частоте 3 Гц для зависимости  $c(z)$ , изображенной кривой 1 на фиг. 1. 1 — точный расчет, 2 — асимптотический расчет, 3 — асимптотический расчет со сшиванием в точке  $z_1$

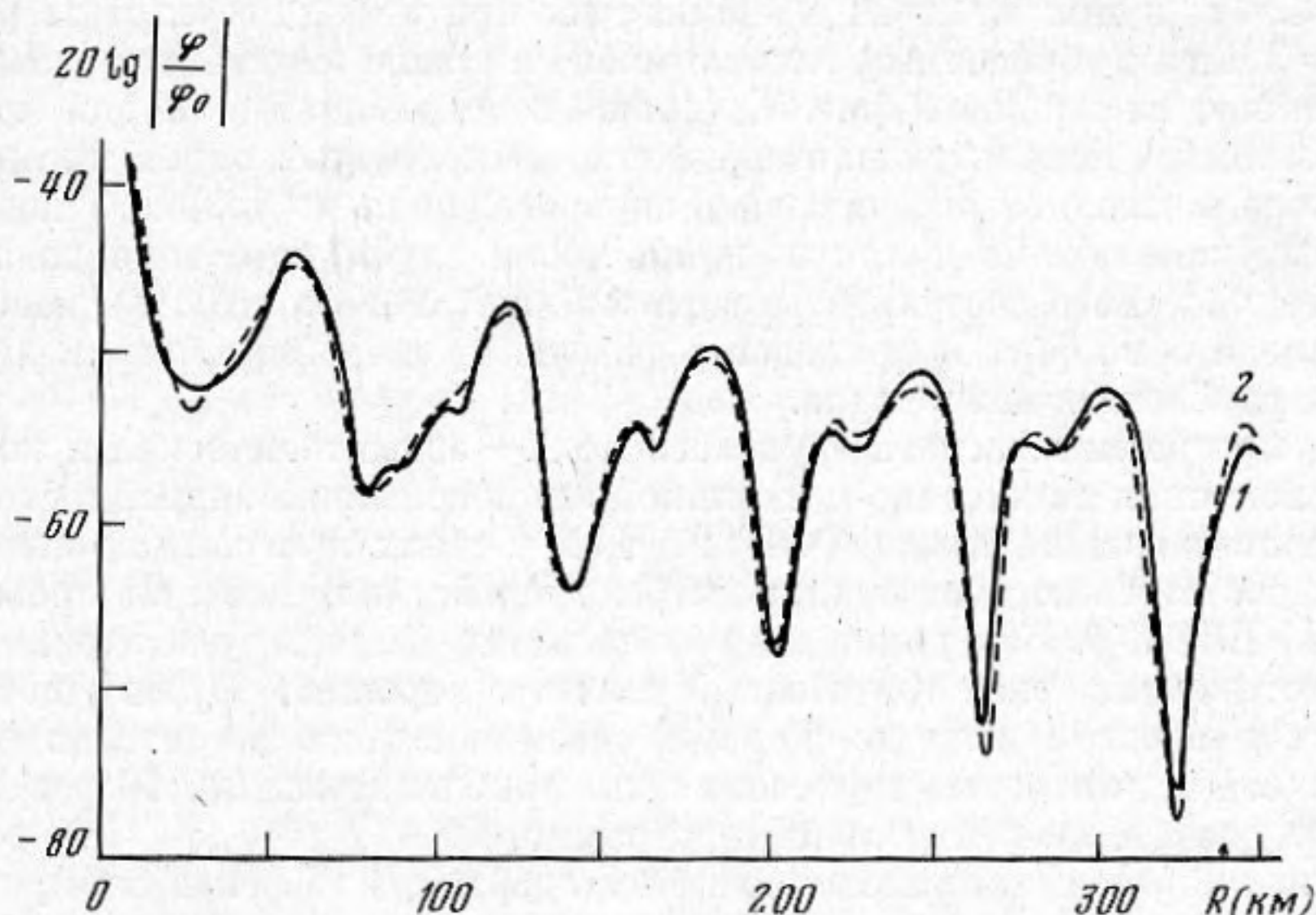


Фиг. 4. Горизонтальный разрез звукового поля на частоте 3 Гц для зависимости  $c(z)$ , изображенной кривой 2 на фиг. 1. 1 — точный расчет, 2 — асимптотический расчет

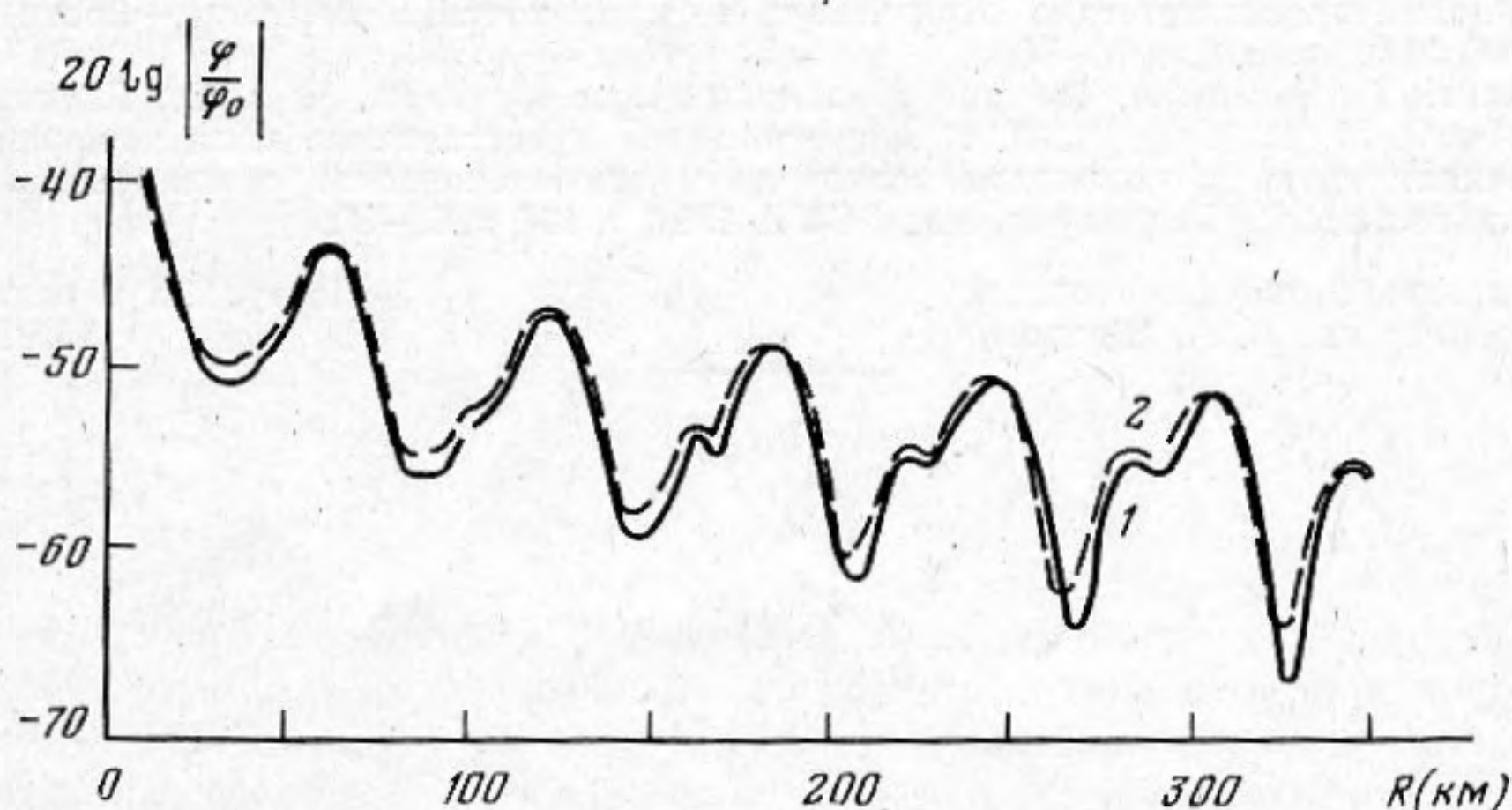
ских расчетов сравнивались с результатами расчетов (которые мы будем называть «точными») по программе, основанной на кусочно-постоянной аппроксимации функции  $c(z)$ . При разбиении волновода на большое число однородных слоев (в наших расчетах — на 80 слоев) в используемом диапазоне частот точность результатов расчетов по такой программе не хуже 2%.

На кривой 1 фиг. 1 имеется точка  $z_1$ , вблизи которой вторая производная скорости звука велика. Наличие такой точки является характерным для подводных волноводов. Рассмотрим ее влияние на точность асимптотических результатов.

Результаты расчетов, проведенных для достаточно высокой частоты  $\nu=50$  Гц (64 распространяющихся нормальных волны), показывают, в согласии со сказанным выше, очень хорошее совпадение асимптотических результатов с точными (см. фиг. 2). Отличия заметны, кроме зоны тени, лишь на расстояниях между источником и наблюдателем порядка 100 и 180 км — именно там, где в поле вносят существенный вклад нормальные волны с фазовыми скоростями, близкими к  $c_1=c(z_1)$ . Отметим, что для



Фиг. 5. Горизонтальный разрез звукового поля на частоте 5 Гц для зависимости  $c(z)$ , изображенной кривой 2 на фиг. 1. 1 — точный расчет, 2 — асимптотический расчет



Фиг. 6. Горизонтальный разрез звукового поля на частоте 5 Гц для зависимости  $c(z)$ , изображенной кривой 3 на фиг. 1. 1 — точный расчет, 2 — асимптотический расчет

таких частот достаточно использовать в расчетах более простые по сравнению с функциями параболического цилиндра асимптотики.

Обратимся к случаю низких частот, когда для расчетов необходимо использовать асимптотики, выражающиеся через функции параболического цилиндра. На фиг. 3 (кривые 1 и 2) приведены результаты расчетов при  $\nu=3$  Гц (4 распространяющихся нормальных волны). Здесь отличие результатов асимптотических расчетов от точных из-за наличия большой второй производной  $c''(z_1)$  весьма существенно, особенно на больших расстояниях между источником и наблюдателем. Если предположить зависимость  $c(z)$  вблизи поверхности более гладкой (кривая 2 на фиг. 1), то, как

видно на фиг. 4, отличие результатов уменьшается, а при увеличении частоты до 5 Гц (6 распространяющихся нормальных волн), результаты расчетов для которой приведены на фиг. 5, совпадение асимптотического и точного результатов становится почти идеальным.

Сохранить высокую точность на малых частотах при асимптотических расчетах звукового поля для зависимости  $c(z)$ , изображенной кривой 1 фиг. 1, можно, используя различные асимптотики решений уравнения (1) при  $0 \leq z \leq z_1$  и при  $z_1 \leq z \leq H$  и сшивая их при  $z = z_1$ . Результаты расчетов при  $\nu = 3$  Гц по программе, использующей такое сшивание асимптотик, изображены на кривой 3 фиг. 3, хорошо совпадающей с точной кривой 1.

Программа, использующая сшивание асимптотик в одной промежуточной точке, позволяет рассчитывать звуковые поля не только в подводных звуковых каналах, но и при наличии кроме глубинного волновода еще и приповерхностного (результаты расчетов для зависимости  $c(z)$ , изображенной кривой 3 на фиг. 1, приведены на фиг. 6) или при наличии двух связанных глубинных волноводов.

Обе программы расчета звукового поля — асимптотическая и контрольная, основанная на кусочно-постоянной аппроксимации зависимости  $c(z)$ , — были составлены на языке ФОРТРАН, и в обеих программах мы стремились к достижению максимального быстродействия. Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6. Как видно из приведенных выше результатов, точность асимптотических расчетов можно считать хорошей. Преимущество же асимптотического метода по скорости счета оказалось значительным — время расчета асимптотики звукового поля приблизительно в 10 раз меньше, чем при расчете по контрольной программе.

Таким образом, асимптотические методы могут эффективно применяться при расчетах звуковых полей в подводных волноводах на низких частотах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Булдырев В. С., Славянов С. Ю. Равномерные асимптотические разложения для решений уравнения типа Шредингера с двумя точками перехода. — Вестн. ЛГУ, 1968, № 22, вып. 4, с. 70–84.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Ч. 2, М.: Наука, 1974.
3. Булдырев В. С., Явор М. И. Комбинированное представление поля точечного источника звука в подводном волноводе и асимптотическое суммирование нормальных волн. — Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1981, т. 104, с. 66–83.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию  
15.VII.1981