АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVIII 1982 Вып. 5

УДК 534.222

ОБ ЭФФЕКТЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЭХА В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

Немцов Б. Е., Эйдман В. Я.

Рассмотрено эхо в движущейся жидкости с пузырьками. Показано, что в такой системе может существовать пространственное эхо (в отличие от случая неподвижной среды, где возможно лишь временное эхо). Положение эхового всплеска определяется только расстоянием между источниками d и характеризуется соотношением $z_э=2d$ ($z_э$ – координата, определяющая положение эхового всплеска).

В жидкости с пузырьками газа начальное возмущение затухает даже в отсутствие диссипативных процессов [1]. Это связано с тем, что энергия звуковой волны перекачивается в энергию колебаний пузырьков. Поэтому в такой системе возможно явление эха [2]. В работе [2] рассмотрено временно́е эхо для жидкости с пузырьками и показано, что эховые всплески звукового поля возникают в моменты времени $t=n\tau$, где n — натуральное число, а τ — промежуток времени между двумя последовательными возмущениями плотности среды. В то же время аналога пространственного эха в неподвижной жидкости не существует, поскольку в такой среде отсутствуют волны, подобные волнам Ван-Кампена. В связи с этим целесообразно рассмотреть систему, в которой тем не менее возможно существование пространственного эха.

Рассмотрим простейший пример такой системы; будем считать, что жидкость вместе с пузырьками газа движется с некоторой постоянной скоростью v. Предположим, что скорость жидкости v мала ($v\ll c$, c — скорость звука в жидкости без пузырьков) и соблюдаются все условия применимости линейного приближения для уравнений гидродинамики жидкости, а нелинейность обусловлена нелинейной зависимостью радиуса пузырька от давления жидкости (уравнение Рэлея):

$$\frac{d^2\xi_r}{dt^2}+\frac{3}{2(r+\xi_r)}\left(\frac{d\xi_r}{dt}\right)^2=\frac{p_r-p}{\rho_0(r+\xi_r)}. \tag{1}$$

Здесь p_r — давление газа внутри пузырька, p — давление в жидкости, r — равновесное значение радиуса пузырька, ξ_r — возмущение радиуса пузырька под действием давления p, ρ_0 — плотность жидкости без пузырьков.

Сторонние источники колебаний среды зададим в традиционной для систем с пространственным эхо форме, т. е. считаем, что в плоскости $z=0$ сосредоточено возмущение звукового давления на частоте ω_1, а в плоскости $z=d$ — на частоте ω_2. Среда (жидкость с пузырьками) как целое движется со скоростью v в направлении оси oz. Тогда в тех же предположениях, что и в [1], в линейном приближении уравнения для определения давления принимают вид

$$\frac{\partial^2\rho^{(1)}}{\partial t_1^2}=\frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial z^2}+ae^{i\omega_1 t}\delta(z)+be^{-i\omega_2 t}\delta(z-d), \tag{2}$$

$$\rho^{(1)}=\frac{p^{(1)}}{c^2}-4\pi\rho_0\int_0^\infty \xi_r^{(1)}r^2 f(r)\,dr, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2\xi_r^{(1)}}{\partial t_1^2}+\omega_0^2(r)\,\xi_r^{(1)}=-\frac{p^{(1)}}{\rho_0 r}. \tag{4}$$

Здесь $\rho^{(1)}$, $p^{(1)}$, $\xi_r^{(1)}$ — возмущения плотности, давления и радиуса пузырька в линейном приближении, $f(r)\,dr$ — число пузырьков с радиусами от r до $r+dr$ в единице объема жидкости, $\partial/\partial t_1=\partial/\partial t+v\partial/\partial z$, $\omega_0^2(r)=3p_0/\rho_0 r^2$, p_0 — равновесное давление жидкости.

Решение этих уравнений для фурье-компонент имеет вид [1]

$$p^{(1)}_{\omega,k}=\rho_{\omega,k}/\varepsilon(\omega,k), \tag{5}$$

$$\xi_r^{(1)}=p^{(1)}(\omega,k)/\rho_0 r[(\omega-kv)^2-\omega_0^2], \tag{6}$$

где

$$\varepsilon(\omega,k)=k^2-\frac{(\omega-kv)^2}{c^2}+4\pi(\omega-kv)^2\int\limits_0^\infty\frac{rf(r)\,dr}{(\omega-kv)^2-\omega_0^2(r)}, \tag{7}$$

$$\rho_{\omega,k}=2\pi[a\delta(\omega+\omega_1)+be^{-ikd}\delta(\omega-\omega_2)]. \tag{8}$$

Как показано в [1], решение уравнения $\varepsilon(\omega, k)=0$ имеет отличную от нуля мнимую часть k, что и приводит к затуханию звукового поля. Учитывая сказанное ранее относительно линейности уравнений гидродинамики жидкости во втором порядке теории возмущений, при помощи (1) находим

$$\partial^2\rho^{(2)}/\partial t_1^2=\partial^2 p^{(2)}/\partial z^2, \tag{9}$$

$$\rho^{(2)}=\frac{p^{(2)}}{c^2}-4\pi\rho_0\int\limits_0^\infty\xi_r^{(2)}\,r^2f(r)\,dr-4\pi\rho_0\int\limits_0^\infty[\xi_r^{(1)}]^2\,rf(r)\,dr, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2\xi_r^{(2)}}{\partial t_1^2}+\omega_0^2(r)\xi_r^{(2)}=-\frac{p^{(2)}}{\rho_0 r}+ \tag{11}$$
$$+\frac{3\omega_0^2}{r}[\xi_r^{(1)}]^2-\frac{3}{2r}\left(\frac{\partial\xi_r^{(1)}}{\partial t_1}\right)^2+\frac{p^{(1)}\xi_r^{(1)}}{\rho_0 r^2}.$$

Решая эту систему методом Фурье, нетрудно получить

$$p^{(2)}_{\omega,k}=\frac{(\omega-kv)^2}{\pi\Delta(\omega,k)\,\varepsilon(w,k)}\int\limits_0^\infty f(r)\,dr\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{\xi^{(1)}_{r\omega',k'}p^{(1)}_{\omega-\omega',k-k'}}{\Delta(\omega-\omega',k-k')}\times$$
$$\times\{3\omega_0^2+3/2(\omega'-k'v)[\omega-\omega'-(k-k')v]+ \tag{12}$$
$$+\Delta(\omega-\omega',k-k')-\Delta(\omega,k)\}\,d\omega'\,dk',$$

причем $\Delta(\omega, k)=(\omega-kv)^2-\omega_0^2$, $\xi^{(1)}_{r\omega',k'}$, $p^{(1)}_{\omega-\omega',k-k'}$ определяются формулами (5), (6).

Ниже нас будут интересовать лишь возмущения среды, связанные с явлением эха в рассматриваемой системе. Поэтому в (12) будем учитывать лишь вклад, содержащий произведение амплитуд обоих сторонних источников ab, которое отвечает непосредственному воздействию одного источника на возмущение, распространяющееся от другого источника. Далее для получения эхового сигнала в (2) нужно ограничиться вкладом, отвечающим полюсам подынтегрального выражения, не имеющим мнимой части в плоскости комплексного переменного k' (эти полюса определяются из уравнений $\Delta(\omega', k')=0$, $\Delta(\omega-\omega', k-k')=0$). Для определения положения указанных полюсов относительно действительной оси, вдоль которой берется интеграл в (12) следует, как обычно, учесть малое затухание колебаний. Для этого в левую часть уравнения (1) можно добавить выражение $\nu d\xi_r/dt$ ($\nu\to 0$). Совершая далее обратное преобразование Фурье и опуская промежуточные выкладки, получим

$$p^{(2)}(z,t)=\frac{iab}{\rho_0 v}\int\limits_0^\infty dr\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{\exp\{-i[(\omega_2-\omega_1)t-kz]\}(\omega_2-\omega_1-kv)^2}{\Delta(\omega_2-\omega_1,k)\,\varepsilon(\omega_2-\omega_1,k)\,\omega_0(r)\,r}f(r)\times$$

$$
\begin{aligned}
&\exp\left[-i\left(k-\frac{\omega_0-\omega_1}{v}\right)d\right]\times\\
&\times\left\{\frac{\times\left[g\left(-\omega_1,\frac{\omega_0-\omega_1}{v},k\right)+g\left(\omega_2,k+\frac{\omega_1-\omega_0}{v},k\right)\right]}{\Delta\left(\omega_2,k-\frac{\omega_0-\omega_1}{v}\right)\varepsilon\left(\omega_2,k-\frac{\omega_0-\omega_1}{v}\right)\varepsilon\left(-\omega_1,\frac{\omega_0-\omega_1}{v}\right)}-\right.\\
&\qquad\exp\left[-i\left(k+\frac{\omega_0+\omega_1}{v}\right)d\right]\times\\
&\left.-\frac{\times\left[g\left(-\omega_1\frac{-\omega_0-\omega_1}{v},k\right)+g\left(\omega_2,k+\frac{\omega_1+\omega_0}{v},k\right)\right]}{\Delta\left(\omega_2,k+\frac{\omega_0+\omega_1}{v}\right)\varepsilon\left(\omega_2,k+\frac{\omega_0+\omega_1}{v}\right)\varepsilon\left(-\omega_1,\frac{\omega_0-\omega_1}{v}\right)}\right\}dk,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где $g(\omega',\ k',\ k)=3\omega_0^2+3/2(\omega'-k'v)[\omega_2-\omega_1-\omega'-v(k-k')]+\Delta(\omega_2-\omega_1-\omega',\ k-k')]-\Delta(\omega_2-\omega_1,k)$. В (13) также учтем лишь вклад, отвечающий полюсу $\Delta(\omega_2-\omega_1,k)=0$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&p^{(2)}(z,t)=\frac{\pi ab1(z-d)}{\rho_0v^2}e^{-i(\omega_2-\omega_1)t}\times\\
&\times\int_0^\infty\frac{f(r)\exp\left[\left\{\frac{\omega_0(r)}{v}(-z+2d)+\frac{\omega_2}{v}(z-d)-\frac{\omega_1 d}{v}\right\}i\right]}{r\varepsilon\left(\omega_2-\omega_1,\frac{\omega_2-\omega_1-\omega_0}{v}\right)\varepsilon\left(\omega_1,\frac{\omega_2-2\omega_0}{v}\right)}\times\\
&\times\frac{dr}{\varepsilon\left(-\omega_1,\frac{\omega_0-\omega_1}{v}\right)}+B(-\omega_0)\equiv B(\omega_0)+B(-\omega_0),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
1(z-d)=\begin{cases}1, & z-d>0,\\ 0, & z-d<0,\end{cases}
$$

где $B(-\omega_0)$ отличается от $B(\omega_0)$ заменой ω_0 на $-\omega_0$. Из (14) следует, что возмущение по мере удаления от сторонних источников уменьшается, но в области, близкой к плоскости $z=z_э=2d$, существует всплеск давления, который отвечает явлению эха в рассматриваемой системе (при $z-2d=0$ в подынтегральном выражении исчезает быстроосциллирующий множитель). Оказалось, что $z_э$ не зависит от скорости потока v. Однако на величину скорости потока необходимо наложить следующее очевидное условие: $\gamma d/v\ll1$ (γ — декремент затухания колебаний пузырька), означающее, что колебания пузырька, возбужденные источником, расположенным в плоскости $z=0$, не должны затухнуть раньше, чем этот пузырек подойдет ко второму источнику, расположенному при $z=d$.

Отметим далее, что эффект пространственного эха имеет место и на суммарной частоте $\omega_1+\omega_2$. Выражение для $p^{(2)}(z,t)$ на суммарной частоте получается заменой в (14) ω_2 на $-\omega_2$.

Приведем оценки величины давления в эховой области, т. е. при $z=2d$. В этом случае из (14) следует, что при $v=10^4$ см·с$^{-1}$, $c=1{,}5\cdot10^5$ см·с$^{-1}$, $a\simeq b=(\omega/c)p_и$ ($p_и$ — давление в звуковой волне у источника), $p_и\simeq10^3$ Па, $\omega\simeq0{,}5\cdot10^4$ с$^{-1}$,

$$
f=f_0\begin{cases}1 \text{ при } 0{,}5\text{ см}>r>0{,}1\text{ см},\\ 0 \text{ при } r>0{,}5\text{ см},\ r<0{,}1\text{ см},\end{cases}
$$

$f_0\simeq10$ см$^{-4}$, $\rho_0\simeq1$ г·см$^{-3}$, $p^{(2)}\simeq5$ Па. Если же $p_и=10^2$ Па, а остальные величины те же, что и в предыдущей оценке, то $p^{(2)}\simeq0{,}05$ Па.

Интересно отметить, что рассматриваемый эффект можно, по-видимому, использовать для экспериментального определения функции распределения пузырьков по радиусам $f(r)$ (ср. с [3]). Если взять пространственную фурье-компоненту от $p^{(2)}(z, t)$ (см. (14)), то, пренебрегая малыми величинами, после некоторых преобразований ($\omega_0=A/r$, $A=\sqrt{3p_0/\rho_0}$) найдем

$$(15)\qquad |p_k^{(2)}|=\frac{\pi ab}{\rho_0}\frac{f[A/(\omega_2+kv)]v^5}{(\omega_2-\omega_1-kv)^2(kv-\omega_1)^2(2kv-\omega_2)^2|\omega_2-kv|},$$

$$\omega_2-kv>0,\ |\omega_2-\omega_1-kv|\gg(v/c)(\omega_2-kv),$$

$$|kv-\omega_1|\gg(v/c)|\omega_2-kv|,$$

$$|2kv-\omega_2|\gg(v/c)|\omega_1+\omega_2-2kv|,\qquad v/c\ll1.$$

Из последнего соотношения следует, что, измеряя пространственный спектр давления эхового возмущения $|p_k^{(2)}|$, можно (исключая малые окрестности точек $k=(\omega_2-\omega_1)/v$, $k=\omega_1/v$, $k=\omega_2/2v$) приближенно построить зависимость $f[A/(\omega_2+kv)]$, т. е. найти $f(r)$.

В заключение укажем, что в настоящей заметке рассматривается лишь случай достаточно широкой функции распределения пузырьков по радиусам, такой, что существуют резонансные пузырьки с частотами ω_1, ω_2 и $\omega_2-\omega_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рютов Д. Д.* Аналог затухания Ландау в задаче о распространении звуковой волны в жидкости с пузырьками газа.– Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 22, № 9, с. 446–449.
2. *Лопатников С. Л.* Акустическое фазовое эхо в жидкости с пузырьками газа.– Письма в ЖТФ, 1980, т. 6, № 10, с. 623–626.
3. *Дряхлушин В. Ф., Романов Ю. В.* О возможности диагностики функции распределения плазмы с помощью эффекта эха.– Физика плазмы, 1979, т. 5, № 5, с. 1169–1172.

Горьковский
научно-исследовательский
радиофизический
институт

Поступила в редакцию
18.V.1981