

УДК 534.131

**МАТРИЦА ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС И КОЛЕБАНИЯ  
ГАЗОВОГО ЭЛЛИпсоИДА В ЖИДКОСТИ**

*Левин М. Л., Муратов Р. З.*

Для эллипсоида, пульсирующего в идеальной жидкости, найдена матрица присоединенных масс. С ее помощью решена задача о колебаниях эллипсоидального газового пузыря в жидкости и получены аналитические выражения не только для собственной частоты (она была найдена раньше другим методом), но и для парциальных частот, соответствующих различным вариантам наложения дополнительных связей.

Задача о движении несжимаемой идеальной жидкости, вызванном пульсациями трехосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

была решена еще Бьеркнесом [1], построившим общую схему нахождения потенциала скорости жидкости снаружи эллипсоида (1) при заданном законе изменения его полуосей  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ . Имея в виду различные гидрофизические приложения этой задачи, найдем сначала, опираясь на результаты Бьеркнеса, матрицу присоединенных масс, связывающую кинетическую энергию жидкости со скоростями  $\dot{a}$ ,  $\dot{b}$ ,  $\dot{c}$ .

При изменении полуосей эллипсоида нормальная составляющая скорости точки на его границе равна

$$v_n^r = \left( \frac{x^2}{a^2} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{y^2}{b^2} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{z^2}{c^2} \frac{\dot{c}}{c} \right) p = \left\langle \frac{x^2}{a^2} \frac{\dot{a}}{a} \right\rangle p, \tag{2}$$

где  $p = \langle x^2/a^4 \rangle^{-1/2}$ , а угловые скобки здесь и всюду дальше обозначают сумму трех членов циклической перестановки. Поэтому для потенциала скорости ( $v = \nabla \Phi$ ) жидкости снаружи пульсирующего эллипсоида будем иметь внешнюю краевую задачу Неймана

$$\Delta \Phi = 0, \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)_r = \left\langle \frac{\dot{a}}{a} \frac{x^2}{a^2} \right\rangle p, \tag{3}$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль, направленная в жидкость, не имеющую иных границ, кроме поверхности эллипсоида (1).

Решение этой краевой задачи естественно искать в виде потенциала простого слоя

$$\Phi = \oint \frac{\sigma}{R} dS, \quad \sigma = -\frac{1}{4\pi} \left\langle v_a \frac{x^2}{a^2} \right\rangle p,$$

где структура поверхностной плотности  $\sigma$  на границе эллипсоида выбрана в соответствии с условием (3), а  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $v_c$  — подлежащие нахождению величины.

Так как (см. [2]) поверхностная плотность  $\sigma_a = \frac{1}{2\pi} \frac{x^2}{a^2} p$  порождает снаружи эллипсоида потенциал

$$\Psi_a = M_0 - a^2 M_a - (M_a - a^2 M_{200}) x^2 - (M_b - a^2 M_{110}) y^2 - (M_c - a^2 M_{101}) z^2, \tag{4}$$

то

$$\Phi \{ \sigma \} = -\frac{1}{2} \langle v_a \Psi_a \rangle. \tag{5}$$

Здесь  $\mathcal{M}_{lmn}(\xi)$  — внешние потенциальные факторы эллипсоида [2]

$$\mathcal{M}_{lmn}(\xi) = \Pi_{lmn} \frac{abc}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)^l (b^2+u)^m (c^2+u)^n Q(u)}, \quad (6)$$

где  $\Pi_{lmn} = (2l-1)!!(2m-1)!!(2n-1)!!$ ,  $Q(u) = \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}$ , а  $\xi$  — эллипсоидальная координата внешней точки  $x, y, z$ , определяемая как положительный корень уравнения  $\langle x^2/(a^2+\xi) \rangle = 1$ . Для упрощения записи введены сокращенные обозначения:  $\mathcal{M}_{000} = \mathcal{M}_0$ ,  $\mathcal{M}_{100} = \mathcal{M}_a$ ,  $\mathcal{M}_{010} = \mathcal{M}_b$ ,  $\mathcal{M}_{001} = \mathcal{M}_c$ .

Выполняя дифференцирование и полагая затем  $\xi=0$ , найдем, окончательно, что на поверхности эллипсоида

$$\frac{\partial \Psi_a}{\partial n} = -2p \left[ (1 + M_a - a^2 M_{200}) \frac{x^2}{a^2} + (M_b - a^2 M_{110}) \frac{y^2}{b^2} + (M_c - a^2 M_{101}) \frac{z^2}{c^2} \right], \quad (7)$$

где внутренние потенциальные факторы эллипсоида  $M_{lmn} = \mathcal{M}_{lmn}(0)$ . В частности,  $M_a, M_b, M_c$  — обычные факторы деполяризации (размагничивания), связанные соотношением  $\langle M_a \rangle = 1$ , для которых существуют подробные таблицы [2]. Все остальные  $M_{lmn}$  с помощью приведенных в [2] рекуррентных соотношений могут быть выражены через  $M_a, M_b, M_c$ . В дальнейшем нам понадобится, например, формула  $a^2 M_a + b^2 M_b + c^2 M_c = M_0 = abc/C$ , где  $C$  — электростатическая емкость металлического эллипсоида, граница которого описывается уравнением (1).

Подставляя теперь выражения (7) в формулу для нормальной производной потенциала скорости (5) и производя перегруппировку членов, получаем  $(\partial \Phi / \partial n)_r = \langle [v_a(1 + M_a - a^2 M_{200}) + v_b(M_b - b^2 M_{110}) + v_c(M_c - c^2 M_{101})] \cdot x^2/a^2 \rangle p$ . Сравнение этого выражения с (3) доставляет систему трех линейных уравнений для величин  $v_a, v_b, v_c$ :

$$\begin{aligned} (1 + M_a - a^2 M_{200}) v_a + (M_b - b^2 M_{110}) v_b + (M_c - c^2 M_{101}) v_c &= \dot{a}/a, \\ (M_b - a^2 M_{110}) v_a + (1 + M_b - b^2 M_{020}) v_b + (M_c - c^2 M_{011}) v_c &= \dot{b}/b, \\ (M_c - a^2 M_{101}) v_a + (M_c - b^2 M_{011}) v_b + (1 + M_c - c^2 M_{002}) v_c &= \dot{c}/c. \end{aligned} \quad (8)$$

Соотношения (3) — (8) в основном исчерпывают нужные для дальнейшего результаты Бьеркнеса, изложенные здесь в обозначениях современной теории потенциала эллипсоида.

Из формул для потенциальных факторов  $M_{lmn}$  следует, что матрица системы уравнений (8) симметрична. Более того, она является стохастической [3] матрицей: сумма элементов каждой ее строки (или столбца) равна единице, откуда сразу видно, что  $\langle v_a \rangle = \langle \dot{a}/a \rangle$ . Этим простым уравнением можно заменить любое из исходных уравнений системы, что, конечно, существенно упрощает ее решение. Не будем выписывать здесь достаточно длинных формул этого решения, представляющих  $v_a, v_b, v_c$  в виде линейных однородных форм от  $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$ , а заметим только, что при  $\dot{a}/a = \dot{b}/b = \dot{c}/c = \dot{w}$  (при пульсации эллипсоид остается подобным первоначальному) решение имеет вид  $v_a = v_b = v_c = \dot{w}$ . Тогда  $\Phi = -1/2 \dot{w} \langle \Psi_a \rangle$  и после использования рекуррентных соотношений (см. [2]) для  $\mathcal{M}_{lmn}(\xi)$  потенциал скорости принимает вид  $\Phi = -\dot{w} \mathcal{M}_0(\xi)$ , т. е. зависит лишь от одной эллипсоидальной координаты  $\xi$ .

Возвращаясь к общему случаю произвольных

$$\frac{\dot{a}}{a} = \dot{w}_a, \quad \frac{\dot{b}}{b} = \dot{w}_b, \quad \frac{\dot{c}}{c} = \dot{w}_c, \quad (9)$$

найдем кинетическую энергию жидкости

$$T = \frac{\rho}{2} \int (\nabla \Phi)^2 dV = \frac{\rho}{2} \int \text{div}(\Phi \mathbf{v}) dV = -\frac{\rho}{2} \oint \Phi v_n^r dS,$$

ибо  $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ ,  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ , а на бесконечности  $\Phi$  и  $\mathbf{v}$  обращаются в нуль. Под-

ставляя в это выражение формулы (2) и (5), в последней из которых  $v_a, v_b, v_c$  заменены линейными формами от  $\dot{w}_a, \dot{w}_b, \dot{w}_c$ , получаемыми из решения системы (8), и учитывая, что (см. [2])

$$\oint x^{2l} y^{2m} z^{2n} p dS = \frac{3V \Pi_{lmn}}{(2l+2m+2n+1)!!} a^{2l} b^{2m} c^{2n},$$

где  $V = \frac{4}{3} \pi abc$  — объем эллипсоида, после долгих вычислений, использующих рекуррентные соотношения для  $M_{lmn}$ , окончательно будем иметь

$$T = \frac{m}{30} \sum_{a,b} \mu_{ab} \dot{w}_a \dot{w}_b = \frac{1}{2} \sum_{a,b} m_{ab} v_a v_b = \frac{m}{2} \sum_{a,b} \kappa_{ab} v_a v_b. \quad (10)$$

Здесь  $m = \rho V$  — масса жидкости, занимающей объем эллипсоида,

$$m_{aa} = m \kappa_{aa} = \frac{m}{15a^2} \mu_{aa}, \quad m_{ab} = m \kappa_{ab} = \frac{m}{15ab} \mu_{ab}$$

и т. д. — компоненты матрицы присоединенных масс, а

$$\begin{aligned} \mu_{aa} &= 5M_0 - a^2 - \frac{1}{3} \langle a^2 \rangle + \frac{M_{011} + \frac{1}{3} \langle M_{011} \rangle}{\langle M_{011} M_{101} \rangle}, \\ \mu_{ab} &= 5M_0 - c^2 + \frac{2}{3} \langle a^2 \rangle + \frac{M_{110} - \frac{2}{3} \langle M_{011} \rangle}{\langle M_{011} M_{101} \rangle}. \end{aligned} \quad (11)$$

Остальные элементы матрицы  $\mu$  получаются из (11) циклической заменой. Обе матрицы  $\hat{m}$  и  $\hat{\mu}$  симметричные и положительно определенные. Более того, как нетрудно проверить, матрица  $\hat{\mu}$  обладает стохастическими свойствами: сумма элементов любой строки (или столбца) одна и та же и равна  $15M_0$ . Поэтому в дальнейшем в качестве обобщенных координат удобно брать малые относительные изменения полуосей  $w_a = \delta a/a = \dot{a} \delta t/a$ ,  $w_b = \delta b/b = \dot{b} \delta t/b$ ,  $w_c = \delta c/c = \dot{c} \delta t/c$ , для которых величины (9) являются обобщенными скоростями.

В случае эллипсоида вращения ( $a=b$ ), когда  $M_a = M_b = 0,5(1 - M_c)$  и все входящие в (11) величины могут быть выражены через продольный фактор размагничивания  $M_c = M$ , элементы матрицы  $\kappa$  даются формулами

$$\begin{aligned} \kappa_{aa} = \kappa_{bb} &= \frac{1}{5} \left\{ 1 + \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right) \left[ \frac{M(2-5M)}{3M-1} + \frac{2}{3M+1-2c^2/a^2} \right] \right\}, \\ \kappa_{cc} &= \frac{1}{5} \left( \frac{a}{c} \right)^2 \left[ 1 + \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right) \frac{M(3-5M)}{3M-1} \right], \\ \kappa_{ab} &= \frac{1}{5} \left\{ 2 + \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right) \left[ \frac{M(2-5M)}{3M-1} - \frac{2}{3M+1-2c^2/a^2} \right] \right\}, \\ \kappa_{ac} = \kappa_{bc} &= \frac{1}{5} \frac{a}{c} \left[ 2 - \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right) \frac{M(5M-1)}{3M-1} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где для сплюснутого ( $a=b > c$ ) сфероида с эксцентриситетом  $e = \sqrt{1 - c^2/a^2}$  и для вытянутого ( $a=b < c$ ) сфероида с эксцентриситетом  $e = \sqrt{1 - a^2/c^2}$  фактор  $M$  есть [4] соответственно  $M_{\text{спл}} = \frac{1+e^2}{e^3} (e - \text{arctg } e)$ ,  $M_{\text{выт}} = \frac{1-e^2}{e^3} (\text{Arth} \cdot$

$e - e)$ . Для шара ( $a=b=c$ ) формулы (12) переходят в  $\kappa_{aa} = \kappa_{bb} = \kappa_{cc} = 19/45$ ,  $\kappa_{ab} = \kappa_{bc} = \kappa_{ca} = 13/45$ . Для сильно сплюснутого ( $c \ll a$ ) сфероида (диск):

$$\kappa_{aa} \approx \frac{17\pi}{80} \frac{c}{a}, \quad \kappa_{cc} \approx \frac{\pi}{5} \frac{a}{c}, \quad \kappa_{ab} \approx \frac{11\pi}{80} \frac{c}{a}, \quad \kappa_{ac} \approx \frac{3\pi}{20},$$

а для очень вытянутого ( $c \gg a$ ) сфероида (игла):

$$\kappa_{aa} \approx \frac{2}{5} \Lambda, \quad \kappa_{cc} \approx \frac{3}{5} \frac{a^2}{c^2} \left( \Lambda - \frac{2}{3} \right), \quad \kappa_{ab} \approx \frac{2}{5} \left( \Lambda - \frac{1}{2} \right), \quad \kappa_{ac} \approx \frac{1}{5} \frac{a}{c} (\Lambda + 1),$$

где  $\Lambda = \ln 2c/a - 1$ . Значения функций (12) приведены в табл. 1. Аналогичная таблица для трехосного эллипсоида заняла бы слишком много места, поэтому, имея в виду рассматриваемый ниже пример, укажем, что при отношении полуосей  $a : b : c = 10 : 6 : 3$

$$\begin{aligned} \kappa_{aa} &= 0,1270, & \kappa_{bb} &= 0,3370, & \kappa_{cc} &= 1,3214, \\ \kappa_{ab} &= 0,1342, & \kappa_{bc} &= 0,4923, & \kappa_{ca} &= 0,2764. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим теперь газовый пузырь, ограниченный тонкой упругой неоднородной пленкой, находящейся в равновесии с окружающей его идеальной несжимаемой жидкостью. Самой упругостью пленки будем пренебрегать; существенна лишь относительная неоднородность ее свойств, обеспечивающая эллипсоидальную форму газового объема. Считая, что при пульсациях эллипсоидальность сохраняется, приходим к модельной задаче о системе с тремя степенями свободы. Кинетическая энергия этой системы дается выражением (10), а потенциальная энергия обусловлена упругостью газа и для малых колебаний имеет вид  $U = 0,5K \langle w_a \rangle^2$ ,  $K = \gamma P_0 V$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $P_0$  — равновесное давление газа (как обычно, считаем пузырь достаточно малым, так что давление и плотность внутри пузыря все время однородны). Тогда в обобщенных координатах  $w_a, w_b, w_c$  малые колебания пузыря вблизи положения равновесия описываются уравнениями Лагранжа

$$\begin{aligned} \mu_{aa} \ddot{w}_a + \mu_{ab} \ddot{w}_b + \mu_{ac} \ddot{w}_c &= -\frac{15}{m} K \langle w_a \rangle, \\ \mu_{ba} \ddot{w}_a + \mu_{bb} \ddot{w}_b + \mu_{bc} \ddot{w}_c &= -\frac{15}{m} K \langle w_a \rangle, \\ \mu_{ca} \ddot{w}_a + \mu_{cb} \ddot{w}_b + \mu_{cc} \ddot{w}_c &= -\frac{15}{m} K \langle w_a \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Из стохастических свойств матрицы  $\hat{\mu}$  следует, что вектор  $(1, 1, 1)$  является собственным. Ему соответствует решение системы (14)  $w_a = w_b = w_c = w \exp(i\omega t)$  и, так как  $\mu_{aa} + \mu_{ab} + \mu_{ac} = 15M_0$ , то  $\omega^2 = \omega_{abc}^2 = 3K/mM_0 = 3KC/mabc = 4\pi\gamma P_0 C/m$ , т. е. пришли к известной общей формуле, связывающей собственную частоту колебаний газового пузыря с его электростатической емкостью  $C$ . В частности, для шарового пузыря  $a = b = c = R$ ,  $C = 4\pi R^2$  и  $\omega_R^2 = 3K/(mR^2)$ .

Два других собственных вектора матрицы  $\hat{\mu}$  ортогональны вектору  $(1, 1, 1)$ , т. е. для них  $w_a + w_b + w_c = 0$  и  $U = 0$  (объем не меняется). Поэтому соответствующие собственные частоты равны нулю.

Кроме истинно собственных частот, интерес представляют (например, в случае рыбьих пузырей) и парциальные частоты, обусловленные допол-

Таблица 1

$c/a$	$a/c$	$\kappa_{aa}$	$\kappa_{ab}$	$\kappa_{ac}$	$\kappa_{cc}$
0,1		0,063	0,041	0,441	5,955
0,3		0,170	0,110	0,393	1,805
0,5		0,256	0,169	0,355	0,998
0,7		0,331	0,221	0,325	0,663
0,9		0,394	0,267	0,300	0,483
	0,9	0,452	0,312	0,278	0,368
	0,7	0,525	0,371	0,251	0,263
	0,5	0,631	0,461	0,214	0,166
	0,3	0,805	0,618	0,162	0,079
	0,1	1,211	1,013	0,078	0,014

$c/a$	$a/c$	$\Omega_{ab}$	$\Omega_{ac}$	$\Omega_a$	$\Omega_c$	$\Omega_{abc}$
0,1		1,177	1,168	1,068	1,098	1,207
0,3		1,032	1,026	0,936	0,959	1,061
0,5		0,992	0,987	0,903	0,917	1,021
0,7		0,976	0,973	0,891	0,899	1,006
0,9		0,969	0,968	0,888	0,891	1,001
	0,9	0,968	0,969	0,890	0,887	1,001
	0,7	0,972	0,975	0,897	0,887	1,006
	0,5	0,984	0,992	0,916	0,893	1,022
	0,3	1,023	1,038	0,962	0,918	1,066
	0,1	1,180	1,218	1,130	1,037	1,242

нительными связями. Пусть, скажем, фиксирована полуось  $c$  ( $w_c = \dot{w}_c = 0$ ). Для получившейся системы с двумя степенями свободы уравнения Лагранжа имеют вид

$$\mu_{aa}\ddot{w}_a + \mu_{ab}\ddot{w}_b = -\frac{15K}{m}(w_a + w_b), \quad \mu_{ba}\ddot{w}_a + \mu_{bb}\ddot{w}_b = -\frac{15K}{m}(w_a + w_b),$$

и частота парциального колебания дается выражением

$$\omega_{ab}^2 = \frac{15K}{m} \frac{\mu_{aa} + \mu_{bb} - 2\mu_{ab}}{\mu_{aa}\mu_{bb} - \mu_{ab}^2} = \frac{K}{ma^2b^2} \frac{a^2\kappa_{aa} + b^2\kappa_{bb} - 2ab\kappa_{ab}}{\kappa_{aa}\kappa_{bb} - \kappa_{ab}^2}.$$

Сравнивая эту частоту с собственной частотой шара того же объема ( $R^3 = abc$ ), т. е. вводя величину  $\Omega = \omega/\omega_R$ , будем иметь

$$\Omega_{ab}^2 = \frac{1}{3} \frac{c^2}{R^4} \frac{a^2\kappa_{aa} + b^2\kappa_{bb} - 2ab\kappa_{ab}}{\kappa_{aa}\kappa_{bb} - \kappa_{ab}^2}$$

В частности, для эллипсоида вращения ( $a=b$ )

$$\begin{aligned} \Omega_{ab}^2 &= \frac{2}{3} \left(\frac{c}{a}\right)^{2/3} (\kappa_{aa} + \kappa_{ab})^{-1}, \\ \Omega_{ac}^2 &= \frac{1}{3} \left(\frac{c}{a}\right)^{2/3} \frac{a^2\kappa_{aa} + c^2\kappa_{cc} - 2ac\kappa_{ac}}{c^2(\kappa_{aa}\kappa_{cc} - \kappa_{ac}^2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть теперь на колебания эллипсоида наложены две связи: фиксированы полуоси  $a$  и  $b$  ( $w_a = w_b = \dot{w}_a = \dot{w}_b = 0$ ), т. е. в плоскости  $ab$  пузырь жестко связан с неподвижным эллиптическим ободом. Тогда наша модель имеет лишь одну степень свободы с уравнением движения

$$\mu_{cc}\ddot{w}_c = -\frac{15K}{m}w_c,$$

откуда

$$\Omega_c^2 = \frac{\omega_c^2}{\omega_R^2} = \frac{1}{3} \frac{R^2}{c^2} \kappa_{cc}^{-1}.$$

В случае эллипсоида вращения ( $a=b$ )

$$\Omega_a^2 = \Omega_b^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{c}{a}\right)^{2/3} \kappa_{aa}^{-1}, \quad \Omega_c^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{a}{c}\right)^{4/3} \kappa_{cc}^{-1}. \quad (16)$$

В табл. 2 приведены значения относительных парциальных частот  $\Omega_{ab}$ ,  $\Omega_{ac} = \Omega_{bc}$ ,  $\Omega_a = \Omega_b$ ,  $\Omega_c$  сфероида ( $a=b$ ), вычисленные по формулам (15) и (16). В последней колонке выписаны для сравнения значения собственных частот  $\Omega_{abc}$ , график которых был дан еще в [5]. Табл. 2 устроена так же, как и табл. 1: ее верхняя половина относится к сплюснутому сфероиду (в столбце аргументов —  $c/a < 1$ ), нижняя — к вытянутому (в столбце аргументов —  $a/c < 1$ ).

Для шара  $\Omega_{ab} = \Omega_{bc} = \Omega_{ca} = \sqrt[3]{15/16} = 0,968$ ,  $\Omega_a = \Omega_b = \Omega_c = \sqrt[3]{15/19} = 0,889$ .

В предельном случае диска ( $c \ll a$ )  $\Omega_{at} \approx 0,779 \left(\frac{a}{c}\right)^{1/6}$ ,  $\Omega_{ac} \approx 0,773 \left(\frac{a}{c}\right)^{1/6}$ ,  
 $\Omega_a \approx 0,707 \left(\frac{a}{c}\right)^{1/6}$ ,  $\Omega_c \approx 0,728 \left(\frac{a}{c}\right)^{1/6}$ , а в противоположном предельном  
 случае  $c \gg a$  (игла)

$$\Omega_{ab}^2 \approx \frac{10}{3} \left(\frac{c}{a}\right)^{2/3} (4\Lambda - 1)^{-1}, \quad \Omega_{ac}^2 \approx \frac{5}{3} \left(\frac{c}{a}\right)^{2/3} (3\Lambda - 4) (5\Lambda^2 - 6\Lambda - 1)^{-1},$$

$$\Omega_a^2 \approx \frac{5}{6\Lambda} \left(\frac{c}{a}\right)^{2/3}, \quad \Omega_c^2 \approx \frac{5}{3} \left(\frac{c}{a}\right)^{2/3} (3\Lambda - 2)^{-1}.$$

В качестве последнего примера рассмотрим трехосный эллипсоид с отношением полуосей  $a : b : c = 10 : 6 : 3$  ( $M_a = 0,139$ ,  $M_b = 0,274$ ,  $M_c = 0,587$ ). Пользуясь значениями  $\kappa$ , данными в (13), окончательно находим  $\Omega_{ab} = 1,020$ ,  $\Omega_{bc} = 1,009$ ,  $\Omega_{ca} = 1,017$ ,  $\Omega_a = 0,915$ ,  $\Omega_b = 0,936$ ,  $\Omega_c = 0,945$ ,  $\Omega_{abc} = 1,048$ .

В заключение заметим, что переход от привычной для акустики скалярной присоединенной массы к матрице присоединенных масс обусловлен описанием мгновенного положения границы осциллирующего тела (как при свободных, так и при вынужденных колебаниях) не одним, а несколькими параметрами, связь между которыми заранее не предопределена. В частности такая ситуация возникает, вообще говоря, и в задаче о собственных колебаниях несферического газового пузыря в жидкости, если учитывать в балансе сил неоднородную и анизотропную упругость ограничивающей этот пузырь пленки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Bjerknes C. A.* Geschichtliche Notizen über das Dirichletsche Kugel- und Ellipsoid-Problem.— Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen, 1873, № 17, S. 439—460.
2. *Муратов Р. З.* Потенциалы эллипсоида. М.: Атомиздат, 1976. 144 с.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1957. 532 с.
5. *Weston D. E.* Sound propagation in the presence of bladder fish.— In: Underwater acoustics. N. Y.: Plenum Press, 1963, v. 2, p. 55—88.

Московский радиотехнический институт  
 Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
 31.VII.1984