4. *Кудряшов В. М.* К расчету акустических полей в волноводах со статистически неровной поверхностью.— В кн.: Математические проблемы геофизики. Вып. 4. Новосибирск: 1982, с. 256–272.
5. *Гончаров В. П., Красильников В. А., Павлов В. И.* К теории волновых взаимодействий в стратифицированных средах.— Изв. АН СССР. ФАО, 1976, т. 12, № 11, с. 1143–1151.
6. *Пелиновский Е. Н.* Распространение волн в статистически неоднородном океане.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, с. 331–355.
7. *Наугольных К. А., Рыбак С. А.* Затухание слабонелинейных волн.— Акуст. журн., 1976, т. 22, № 5, с. 735–741.
8. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* К теории упругих свойств поликристаллов.— ЖЭТФ, 1946, т. 16, № 11, с. 967–981.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
31.III.1983
после исправления
29.XI.1984

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ПРИ ЕЕ ПЕРЕХОДЕ С ПЛОСКОЙ НА ШЕРОХОВАТУЮ ЧАСТЬ ПОВЕРХНОСТИ

Попов В. В.

Влияние неровностей поверхности на отражение волн и распространение поверхностных акустических волн (ПАВ) изучалось в ряде работ [1–7]. Используемые в этих работах методы применимы в двух предельных случаях: либо размеры шероховатого участка поверхности достаточно малы, либо шероховата вся поверхность полупространства (или слоя). Бо́льший практический интерес представляет задача о дифракции поверхностной волны при ее переходе с ровной на шероховатую часть поверхности. Решение указанной задачи позволяет проанализировать демпфирующие свойства шероховатой поверхности, в том числе найти коэффициент отражения ПАВ от шероховатого участка достаточно больших размеров и коэффициент прохождения через него, что представляет интерес при проектировании акустоэлектронных устройств. В математическом отношении, как показано ниже, данная задача родственна задаче Римана – Гильберта (или Винера – Хопфа), если флуктуации формы поверхности являются мелкомасштабными, т. е. корреляционный радиус флуктуаций мал в сравнении с длиной волны.

В данной работе изучается дифракция сдвиговой волны Гуляева – Блюстейна, описываемой уравнениями [8, с. 111]:

$$(\Delta+k^2)u=0,\qquad \Delta\Phi=0,\qquad \varphi=-\frac{4\pi\beta}{\varepsilon}(u+\Phi),\tag{1}$$

$\operatorname{Im} k>0$. Смысл обозначений в этих уравнениях тот же, что и в книге [8]. Предполагается, что u и Φ не зависят от координаты z, временная зависимость выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$. Поверхность пьезоэлектрика считается металлизованной. Вначале будем полагать, что поверхность шероховата при всех $x>0$, причем форма поверхности является случайной функцией только координаты x. Если амплитуда искривлений достаточно мала и искривления достаточно плавные [9], то граничные условия можно «перенести» на плоскость $y=0$ и считать, что твердое тело занимает область $y>0$:

$$u+\Phi=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\delta\frac{\partial\Phi}{\partial y}=F(x)\frac{\partial}{\partial x}(u+u_0),\tag{2}$$

где

$$u_0=A\exp(iq_0x-\delta q_0y),\qquad \Phi_0=-A\exp(iq_0x-q_0y),\tag{3}$$

u_0, Φ_0 – поле исходной ПАВ, дифракция которой изучается, u, Φ – искомое рассеянное поле, q_0 удовлетворяет дисперсионному уравнению $(k^2-q_0^2)^{1/2}-i\delta q_0=0$, $\delta=\varkappa^2/(1+\varkappa^2)$, $\varkappa$ – коэффициент электромеханической связи, $F=\theta(x)f(x)$, $f=d\xi/dx$, $\theta(x)=0$ при $x<0$, $\theta(x)=1$ при $x>0$, $\xi(x)$ – случайная функция, описывающая форму поверхности. Ниже считается, что $\bar\xi=\bar f=0$, где черта означает статистическое усреднение. Во втором из граничных условий (2) отброшено малое слагаемое $\sim\xi\partial^2(u+u_0)/\partial y^2$, что допустимо, если глубина проникновения ПАВ в твердое тело на шероховатой части поверхности велика в сравнении с длиной волны, а корреляционный радиус флуктуации формы поверхности l мал.

Используя метод, изложенный в книге [5, с. 68], найдем нелокальные граничные условия для когерентной составляющей рассеянного поля $\bar u$, $\bar\Phi$, исходя из которых нетрудно получить формальное решение задачи о дифракции:

$$\left\{\begin{array}{c}\bar{u}(x,y)\\ \overline{\Phi}(x,y)\end{array}\right\}=-\frac{i}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dq\,dq'\,q'}{\Delta\Delta'}\iint\limits_{0}^{\infty}dx'\,dx''\times$$

$$\times\left\{\begin{array}{c}\exp[iy(k^2-q^2)^{1/2}]\\ -\exp(-|q|y)\end{array}\right\}W(x'-x'')V(x'')\exp[iq'(x'-x'')+iq(x-x')], \tag{4}$$

где $\Delta=(k^2-q^2)^{1/2}-i\delta|q|$, $\Delta'=\Delta(q')$, $W(x'-x'')=\overline{f(x')f(x'')}$,

$$V(x)=\partial u(x,y=0)/\partial x+iq_0A\theta(x)\exp(iq_0x). \tag{5}$$

Перепишем правую часть формулы (4) при $y=0$ в виде

$$-\frac{i}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{\Delta}\int\limits_{0}^{\infty}dx''\,V(x'')\exp[iq(x-x'')]\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{q'\,dq'}{\Delta'}\int\limits_{-x''}^{\infty}dz\,W(z)\exp[-iz(q-q')].$$

В силу мелкомасштабности флуктуаций ($kl\ll1$) нижний предел в интеграле по z можно заменить на $-\infty$, поскольку масштаб интегрирования по x'' есть $\Delta x''\sim k^{-1}$. Данная замена соответствует утверждению, что рассеянное и исходное поля «нечувствительны» к изменению статистических свойств поверхности вблизи $x=0$ на интервале $\Delta x\sim l\ll k^{-1}$, т. е. неровности являются достаточно малыми. После указанной замены получаем

$$\left\{\begin{array}{c}\bar{u}(x,y)\\ \overline{\Phi}(x,y)\end{array}\right\}=-\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{\Delta}\eta(q)V^-(q)\exp(igx)\left\{\begin{array}{c}\exp[iy(k^2-q^2)^{1/2}]\\ -\exp(-|q|y)\end{array}\right\}, \tag{6}$$

где

$$\eta(q)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{p\,dp}{\Delta(p)}W(q-p),\qquad W(q)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz\,W(z)\exp(-iqz),$$

$$V^-(q)=\int\limits_{0}^{\infty}dx\,V(x)\exp(-iqx).$$

Отыскание V^- сводится, таким образом, к задаче Римана – Гильберта:

$$V^++C(q)V^-=q_0A/(q-q_0), \tag{7}$$

получающейся из первой строчки уравнения (6) при $y=0$ путем соответствующей замены $\partial\bar{u}/\partial x$ на $V(x)$ с помощью соотношения (5) и последующим применением преобразования Фурье; при этом $V^+(q)=\int\limits_{-\infty}^{0}dx\,V(x)\exp(-iqx)$, $C=(\Delta-q\eta(q))/\Delta$. Заметим, что обращение C в нуль дает закон дисперсии ПАВ у шероховатой поверхности, а нуль знаменателя C отвечает закону дисперсии ПАВ Гуляева – Блюстейна. Приближенное решение функционального уравнения (7) легко находится, если $\delta\ll1$, $|\eta|\ll1$. В этом случае слагаемые в C, содержащие δ и η, существенны только при $q\simeq\pm k$, так что

$$C\simeq\frac{(k^2-q^2)^{1/2}-i\delta k-k\eta_0}{(k^2-q^2)^{1/2}-i\delta k}, \tag{8}$$

где $\eta_0=\eta(k)$; учтено также, что $\eta(q)=-\eta(-q)$. Приближенная факторизация C и последующие действия проводятся в соответствии с методом, изложенным в работе [10]. В результате имеем

$$\left\{\begin{array}{c}\bar{u}(x,y)\\ \overline{\Phi}(x,y)\end{array}\right\}\simeq-\frac{ikA}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dq\,\eta(q)\exp iqx}{(q-q_0)[(k-q)^{1/2}-i(\delta-i\eta_0)\sqrt{k/2}((k+q)^{1/2}-i\delta\sqrt{k/2})}\times$$

$$\times\left\{\begin{array}{c}\exp[iy(k^2-q^2)]^{1/2}\\ -\exp(-|q|y)\end{array}\right\}. \tag{9}$$

Решение задачи о дифракции ПАВ при ее переходе со свободной на статистически нагруженную (плоскую) часть поверхности может быть получено непосредственно из соотношений (9). В этом случае граничное условие для упругих напряжений при $y=0$ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\delta\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{k^2s^2}{\lambda}\theta(x)M(x)[u+u_0],$$

где $M(x)$ – поверхностная плотность массы, являющаяся случайной функцией, λ – упругий модуль, s – скорость сдвиговой объемной волны. Для когерентной составляющей рассеянного поля пригодны формулы (9), в которых η следует заменить на

$$\nu(q)=-\frac{k^3s^4}{\lambda^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dq'}{\Delta'}W_1(q-q'),$$

причем

$$W_1(q)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz\,W_1(z)\exp(-iqz),\qquad z=x-x',\qquad W_1(z)=\overline{M(x)M(x')},\qquad \nu_0=\nu(k).$$

Прежде чем переходить к анализу решения (9), обсудим кратко вопрос о дифракции ПАВ Гуляева – Блюстейна при ее переходе с плоской на шероховатую при $x>0$ часть поверхности с мелкомасштабными трехмерными неровностями вида $\zeta=\zeta(x,z)$. Рассеянное поле в этом общем случае описывается четырьмя уравнениями пьезоакустики [8] и таким же количеством граничных условий, т. е. для нахождения рассеянного поля необходимо построение четырехкомпонентной матрицы Грина полупространства. Поляризация среднего рассеянного поля в общем случае отличается от поляризации падающего; в частности, может быть возбуждена волна Рэлея. Для упрощения предположим, что флуктуации формы изотропны, т. е. $\overline{\zeta(x,z)\zeta(x',z')}=\tilde{W}(|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|)$, где $\mathbf{R}$ – двумерный вектор, имеющий лишь x- и z-компоненты. Тогда среднее рассеянное поле, как и падающее (3), не будет зависеть от z и будет содержать лишь z-компоненту упругих смещений (флуктуационное поле, разумеется, содержит все три компоненты упругих смещений и зависит от трех пространственных координат). Таким образом, среднее рассеянное поле будет описываться лишь двумя нелокальными граничными условиями. В предположении о малости констант пьезосвязи и в изотропной аппроксимации упругих свойств среды (слабо анизотропен, например, CdS) достаточно для написания нелокальных граничных условий построить в явном виде тензор Грина $G^{ik}(x,y,z)$ изотропного упругого полупространства. После громоздких преобразований, учитывающих свойства симметрии G^{ik} по отношению к изменению знаков $x\to-x$, $z\to-z$, придем к формулам (9), в которых однако, следует заменить $\eta(q)$ на

$$\chi(q)=-\pi qk^2(3-4\tilde{k})\int\limits_0^{\infty}dp\,p^3\psi^{-1}\tilde{W}(p)\,(k^2-p^2)^{1/2},$$

где $\psi=(k^2-2p^2)^2+4p^2(k^2-p^2)^{1/2}(k_l{}^2-p^2)^{1/2}$, k_l – волновое число продольной объемной волны, $\tilde{k}\equiv k_l{}^2/k^2$, $\chi_0=\chi(k)$,

$$\tilde{W}(p)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}dx\,dz\,\tilde{W}(|\mathbf{R}|)\exp(i\mathbf{pR}),$$

Если $\eta(q)$ достаточно плавно меняется в интервале $|q|\lessapprox\operatorname{Re}k$, то получение и физический анализ асимптотик решения (9) проводятся в полном соответствии с работой [10], где обсужден также смысл нулей знаменателя в формуле (9), вычислены коэффициент трансформации ПАВ, доля энергии, рассеиваемая на скачке граничных условий в объем, и т. д. Как показано в работе [10], объемная волна при дифракции излучается в основном под искривленную часть поверхности, причем на самой поверхности амплитуда трансформированной ПАВ преобладает над амплитудой объемной волны лишь на достаточно больших расстояниях:

$$x\gtrapprox x_0\equiv(|k|\,|\delta-i\eta_0|^2)^{-1}. \tag{10}$$

Кроме того, экспериментально разделить по скоростям объемную и поверхностную рассеянные волны можно только на расстояниях $x\gtrapprox x_0$.

Амплитуда ПАВ, распространяющейся вдоль шероховатой поверхности, может только убывать с ростом x, поэтому независимо от модели неровностей нуль функции $(k-q)^{1/2}-i(\delta-i\eta_4)(k/2)^{1/2}$, отвечающий за вычет, приводящий к возбуждению трансформированной ПАВ при $x>0$, может лежать лишь в верхней полуплоскости комплексного переменного q. Это накладывает ограничение на знак $\operatorname{Re}\eta_0$, а именно должно выполняться неравенство $\operatorname{Re}\eta_0<0$. Одновременно неровности уменьшают скорость ПАВ и «поджимают» ее к поверхности, так что необходимо должно быть $\operatorname{Im}\eta_0>0$. Сказанное относительно знаков вещественной и мнимой составляющих справедливо также для ν_0 и χ_0.

Отраженная ПАВ при $x<0$ дается вычетом в полюсе $q=-q_0$: $u_{\text{отр}}\simeq-iA(\delta\eta_0/2)\times$

$\times \exp(-iq_0x-\delta q_0 y)$, а трансформированная при $x>0$ описывается формулой $u_{тр}\simeq \simeq 2A(\delta-i\eta_0)\exp[iq_1x-k(\delta-i\eta_0)y]/(2\delta-i\eta_0)$, где $q_1=k+k(\delta-i\eta_0)^2/2$. Затухание трансформированной ПАВ под шероховатой частью поверхности определяется значением $\mathrm{Im}\,q_1=-\mathrm{Re}\,\eta_0(\delta+\mathrm{Im}\,\eta_0)k$. Структура ПАВ при ее переходе на шероховатую поверхность слабо меняется (без учета затухания), если $|\eta_0|\ll\delta$. В противоположном предельном случае ПАВ заметно «поджимается» к поверхности и ее амплитуда при $0<x\ll(\mathrm{Im}\,q_1)^{-1}$ в два раза превосходит амплитуду падающей волны.

Переход ПАВ с шероховатой на плоскую часть поверхности анализируется так же, как и предыдущая задача. Результаты исследования показывают, что в этом случае при $x=0$ отношение амплитуд отраженной ПАВ к падающей равно $(i\delta+\eta_0)\eta_0/2$, а отношение амплитуд прошедшей ПАВ (т. е. ПАВ на гладкой поверхности) к падающей равно $2\delta/(2\delta-i\eta_0)$.

Таким образом, если шероховата лишь часть поверхности $0<x<L$, причем $L\gtrsim x_0$, то отраженная ПАВ $\tilde{u}_{отр}$ при $-x\gg k^{-1}\delta^{-2}$ приближенно есть сумма отраженных поверхностных волн на скачке граничных условий при $x=0$ и $x=L$:

$$\tilde{u}_{отр}\simeq -i\frac{A\delta\eta_0}{2}\left[1-\frac{4(\delta-i\eta_0)^2}{(2\delta-i\eta_0)^2}e^{2iq_1L}\right]\exp(-iq_0x-\delta q_0y), \tag{11}$$

а прошедшая $\tilde{u}_{пр}$ через шероховатый участок волна при $x-L\gtrsim k^{-1}\delta^{-2}$ описывается выражением

$$\tilde{u}_{пр}\simeq\frac{4A\delta(\delta-i\eta_0)}{(2\delta-i\eta_0)^2}\exp[i(q_1-q_0)L+iq_0x-\delta q_0y]. \tag{12}$$

Смысл неравенств, ограничивающих область применимости формул (11), (12), тот же, что и неравенства (10).

Предположим, что неровности образования суперпозицией канавок гауссовой формы $J(x)=h\exp(-x^2/a^2)$. Тогда $\eta(q)\simeq -nqh^2k^2a^2[\pi/2+i(\ln ka+c/2-\ln 2\sqrt{2})]$, где n – линейная концентрация канавок, $c\simeq 0{,}58$ – постоянная Эйлера. По своему смыслу a – есть корреляционная длина, так что для применимости данной модели к изложенной выше теории должно быть $|k|a\ll 1$. Среднеквадратичное отклонение $(\overline{\xi^2})^{1/2}\equiv \equiv\sigma_2=h(na\sqrt{\pi/2})^{1/2}$ и глубина канавок h при $\sigma_2/h\sim 0{,}2$ могут быть связаны с классами чистоты поверхности [11] соотношениями $\sigma_2\sim R_a$, $h\sim R_z$, так что $\mathrm{Re}\,\eta_0\sim -R_a{}^2ak^3$. Частотная зависимость $\mathrm{Im}\,q_1$ дается формулами $\mathrm{Im}\,q_1\sim k^4$ при $\mathrm{Im}\,\eta_0\ll\delta$ и $\mathrm{Im}\,q_1\sim \sim k^7(0{,}74-\ln ka)$ при $\mathrm{Im}\,\eta_0\gg\delta$. Если шероховатости образованы суперпозицией ямок гауссовой формы $j(\mathbf{R})=H\exp(-R^2/b^2)$, причем $|k|b\ll 1$, то $\chi(q)\sim qb^2\sigma_3{}^2(3-4k)\times \times[-k^3+i/b^3(1-k)]$, где $\sigma_3=Hb(N/2)^{1/2}$ – среднеквадратичное отклонение в трехмерной модели, N – концентрация ямок. Вновь при $\sigma_3/H\sim 0{,}2$ параметры неровностей могут быть связаны с классами чистоты поверхности указанными выше соотношениями.

Заметим в заключение, что коэффициент отражения, как это следует из формулы (11), пропорционален $|\eta_0|$ (или $|\chi_0|$ в трехмерной модели). В трехмерной модели отношение $\mathrm{Im}\,\chi_0/|\mathrm{Re}\,\chi_0|\sim(kb)^{-3}\gg 1$, в то время как в двумерной отношение $\mathrm{Im}\,\eta_0/|\mathrm{Re}\,\eta_0|\sim(0{,}74-\ln ka)$ велико лишь логарифмически. Тем самым величина коэффициента отражения определяется в трехмерной модели главным образом значением $\mathrm{Im}\,\chi_0$. В современной акустоэлектронике, использующей преимущественно волны Рэлея, требуются коэффициенты отражения $|\tilde{u}_{отр}/A|\leqslant 10^{-3}$, т. е. соответствующие $|\eta_0|$ или $|\chi_0|$) должны по порядку величины составлять 10^{-3}. Полагая в формулах (11)–(12) $\delta\sim 1$, приходим к качественному описанию дифракции рэлеевской ПАВ; при этом $\mathrm{Im}\,q_1\sim|k\,\mathrm{Re}\,\eta_0|$ (или $\mathrm{Im}\,q_1\sim|k\,\mathrm{Re}\,\chi_0|$ – в трехмерной модели) зависит в основном только от $\mathrm{Re}\,\eta_0$ (или $\mathrm{Re}\,\chi_0$). Таким образом, для уменьшения коэффициента отражения ПАВ и одновременного уменьшения длины $L\sim(\mathrm{Im}\,q_1)^{-1}$ демпфирующего участка поверхности в случае $|k|l\ll 1$ целесообразнее использовать двумерные неровности, а не трехмерные.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исакович М. А.* Рассеяние волны от статистически шероховатой поверхности.– ЖЭТФ, 1952, т. 23, № 9, с. 305–314.
2. *Бреховских Л. М.* О распространении поверхностных рэлеевских волн вдоль неровной границы упругого тела.– Акуст. журн., 1959, т. 5, № 3, с. 282–289.
3. *Курьянов Б. Ф.* Рассеяние звука на шероховатой поверхности с двумя типами неровностей.– Акуст. журн., 1962, т. 8, № 3, с. 325–333.
4. *Лапин А. Д.* Рассеяние звука на шероховатой поверхности.– Акуст. журн., 1964, т. 10, № 1, с. 71–80.
5. *Басс Ф. Г., Фукс И. М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972. 424 с.
6. *Полевой В. Г.* Рассеяние ПАВ на трехмерных неоднородностях границы.– Акуст. журн., 1983, т. 29, № 1, с. 91–95.
7. *Duparc O. H., Maradudin A. A.* Roughness-trapped shear horisontal surface acoustic waves.– Proc. Int. Conf. on vibrations at surface. Asilomar, Calif., Sept., 1982.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
9. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239 с.

10. *Бибяев Н. П., Попов В. В.* Дифракция поверхностной волны на неоднородной поверхности. Акуст. журн., 1985, т. 31, № 5, с. 577–582.
11. *Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А.* Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход). М.: Наука, 1975. 343 с.

Омский государственный университет

Поступило в редакцию 15.VII.1984

УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕРОВНОСТЯМИ

Попов Ю. Ю.

Задача определения статистических характеристик акустических волн, отраженных в среднем плоской поверхностью, рассматривалась многими авторами в различных приближениях. Обширная библиография содержится в монографиях [1, 2]. В то же время для различных приложений гидроакустики [3–5], геоакустики [6], радиофизики [7] представляет интерес случай, когда подстилающая поверхность искривлена. Кривизна подстилающей поверхности может быть учтена в рамках двухмасштабной модели [1, 8], при этом поле нулевого приближения определяется по методу Кирхгофа (приближение касательной плоскости), а учет неровностей производится на основе теории возмущений. Найденное таким образом среднее отраженное поле имеет ту же структуру, что и для гладкой подстилающей поверхности, но со средним коэффициентом отражения, вычисленным для статистически неровной в среднем плоской поверхности.

Влияние малых по сравнению с длиной волны неровностей на рассеяние волн различной физической природы (акустических, электромагнитных, упругих) криволинейными поверхностями рассматривалось на основе теории возмущений в работах [6, 9–11] для детерминированных периодических неровностей и в [3, 4, 7] – для случайных неровностей. При определении рассеянных полей применялся метод последовательных приближений, решения получены в виде рядов по малому параметру, в качестве которого берется отношение амплитуды (среднеквадратичного смещения) неровностей к длине волны. Такой подход не позволяет учесть многократное рассеяние на неровностях, в отдельных случаях приводит к особенности в коэффициенте отражения, не имеющей физического смысла [12], не позволяет учесть влияние неровностей в дисперсионном уравнении для дифракционного поля и, следовательно, определить их влияние на скорость и затухание ползущих волн, распространяющихся вдоль искривленных поверхностей. Произвести частичный учет многократного рассеяния и избавиться от указанных недостатков позволяет применение нелокальных граничных условий для среднего поля.

Ниже с целью выяснения влияния кривизны подстилающей поверхности на средний коэффициент отражения рассматривается рассеяние плоской волны на статистически неровном абсолютно мягком или жестком цилиндрах. Поскольку для круговых цилиндров существует точное решение задачи дифракции (поле нулевого приближения), рассеянное на неровном цилиндре поле может быть получено без ограничения на величину радиуса кривизны. В случае больших радиусов кривизны применение полученных в работе нелокальных граничных условий позволяет исследовать влияние неровностей как на геометроакустическое, так и на дифракционное поля.

Поверхность цилиндра со статистически неровной границей зададим в полярных координатах $\{r, \varphi\}$ в виде $r=a+\zeta(\varphi)$, где a – радиус средней (подстилающей) поверхности, $\zeta(\varphi)$ – случайная функция с нулевым средним значением. Будем искать среднее поле в предположении малости ($k\zeta \ll 1$) и пологости ($|\nabla\zeta| \sim k\zeta$) неровностей, что делает возможным применение теории возмущений [1, 2].

Поле плоской волны, падающей нормально к оси цилиндра, описывается функцией $p_i(r,\varphi)=\exp(-ikr\cos\varphi)$, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опускаем. Полное поле $p^{(j)}(r,\varphi)$ ($j=1$ относится к мягкой, $j=2$ – к жесткой поверхности) в области $r>a+\zeta(\varphi)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+k^2\right]p^j(r,\varphi)=0,$$

где $k=\omega/c$, c – скорость звука. На поверхности цилиндра зададим граничные условия Дирихле $p^1=0$ или Неймана $\partial p^{(2)}/\partial n=0$, $\partial/\partial n$ означает производную по нормали к поверхности. Перенеся граничные условия на поверхность гладкого цилиндра $r=a$ путем разложения их в ряд по малому параметру $k\zeta$, производя усреднение и используя формулу Грина, несложно получить нелокальные граничные условия для среднего поля $\langle p^{(j)}(r,\varphi)\rangle$ (угловыми скобками обозначено усреднение по ансамблю