10. *Бибяев Н. П., Попов В. В.* Дифракция поверхностной волны на неоднородной поверхности. Акуст. журн., 1985, т. 31, № 5, с. 577–582.
11. *Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А.* Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход). М.: Наука, 1975. 343 с.

Омский государственный университет

Поступило в редакцию 15.VII.1984

УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕРОВНОСТЯМИ

Попов Ю. Ю.

Задача определения статистических характеристик акустических волн, отраженных в среднем плоской поверхностью, рассматривалась многими авторами в различных приближениях. Обширная библиография содержится в монографиях [1, 2]. В то же время для различных приложений гидроакустики [3–5], геоакустики [6], радиофизики [7] представляет интерес случай, когда подстилающая поверхность искривлена. Кривизна подстилающей поверхности может быть учтена в рамках двухмасштабной модели [1, 8], при этом поле нулевого приближения определяется по методу Кирхгофа (приближение касательной плоскости), а учет неровностей производится на основе теории возмущений. Найденное таким образом среднее отраженное поле имеет ту же структуру, что и для гладкой подстилающей поверхности, но со средним коэффициентом отражения, вычисленным для статистически неровной в среднем плоской поверхности.

Влияние малых по сравнению с длиной волны неровностей на рассеяние волн различной физической природы (акустических, электромагнитных, упругих) криволинейными поверхностями рассматривалось на основе теории возмущений в работах [6, 9–11] для детерминированных периодических неровностей и в [3, 4, 7] – для случайных неровностей. При определении рассеянных полей применялся метод последовательных приближений, решения получены в виде рядов по малому параметру, в качестве которого берется отношение амплитуды (среднеквадратичного смещения) неровностей к длине волны. Такой подход не позволяет учесть многократное рассеяние на неровностях, в отдельных случаях приводит к особенности в коэффициенте отражения, не имеющей физического смысла [12], не позволяет учесть влияние неровностей в дисперсионном уравнении для дифракционного поля и, следовательно, определить их влияние на скорость и затухание ползущих волн, распространяющихся вдоль искривленных поверхностей. Произвести частичный учет многократного рассеяния и избавиться от указанных недостатков позволяет применение нелокальных граничных условий для среднего поля.

Ниже с целью выяснения влияния кривизны подстилающей поверхности на средний коэффициент отражения рассматривается рассеяние плоской волны на статистически неровном абсолютно мягком или жестком цилиндрах. Поскольку для круговых цилиндров существует точное решение задачи дифракции (поле нулевого приближения), рассеянное на неровном цилиндре поле может быть получено без ограничения на величину радиуса кривизны. В случае больших радиусов кривизны применение полученных в работе нелокальных граничных условий позволяет исследовать влияние неровностей как на геометроакустическое, так и на дифракционное поля.

Поверхность цилиндра со статистически неровной границей зададим в полярных координатах $\{r, \varphi\}$ в виде $r=a+\zeta(\varphi)$, где a – радиус средней (подстилающей) поверхности, $\zeta(\varphi)$ – случайная функция с нулевым средним значением. Будем искать среднее поле в предположении малости ($k\zeta\ll 1$) и пологости ($|\nabla\zeta|\sim k\zeta$) неровностей, что делает возможным применение теории возмущений [1, 2].

Поле плоской волны, падающей нормально к оси цилиндра, описывается функцией $p_i(r,\varphi)=\exp(-ikr\cos\varphi)$, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опускаем. Полное поле $p^{(j)}(r,\varphi)$ ($j=1$ относится к мягкой, $j=2$ – к жесткой поверхности) в области $r>a+\zeta(\varphi)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+k^2\right]p^j(r,\varphi)=0,$$

где $k=\omega/c$, c – скорость звука. На поверхности цилиндра зададим граничные условия Дирихле $p^1=0$ или Неймана $\partial p^{(2)}/\partial n=0$, $\partial/\partial n$ означает производную по нормали к поверхности. Перенеся граничные условия на поверхность гладкого цилиндра $r=a$ путем разложения их в ряд по малому параметру $k\zeta$, производя усреднение и используя формулу Грина, несложно получить нелокальные граничные условия для среднего поля $\langle p^{(j)}(r,\varphi)\rangle$ (угловыми скобками обозначено усреднение по ансамблю реализаций ζ):

$$\langle p^{(1)}(r,\varphi)\rangle-\frac{\sigma^2}{2a}\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{1}{2a}\right)\langle p^{(1)}(r,\varphi)\rangle=$$

$$=\sigma^2 a\int\limits_{-\pi}^{\pi}N(\varphi,\varphi')\left[\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{1}{2a}\right)\langle p^{(1)}(a,\varphi)\rangle\right]\frac{\partial^2 G^{(1)}(r,\varphi,a,\varphi')}{\partial r\,\partial a}\Bigg|_{r=a}d\varphi' \qquad (1)$$

в случае мягкой поверхности и

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^3}{\partial a^3}\right)\langle p^{(2)}(a,\varphi)\rangle=-\sigma^2 a\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\varphi_1}\right)\times\right.$$

$$\left.\times G^{(2)}(r,\varphi,a,\varphi')\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi'\partial\varphi_2}\right)\langle p^{(2)}(r,\varphi')\rangle N(\varphi_1,\varphi_2)\right]\Bigg|_{\substack{r=a,\ r_1=a\\ \varphi_1=\varphi,\ \varphi_2=\varphi'}}d\varphi' \qquad (2)$$

в случае жесткой поверхности, $\sigma^2=\langle\zeta^2(\varphi)\rangle$, $N(\varphi_1,\varphi_2)=\sigma^{-2}\langle\zeta(\varphi_1)\zeta(\varphi_2)\rangle$, невозмущенные функции Грина для мягкого и жесткого цилиндров $G^{(j)}(r,\varphi,r',\varphi')$, удовлетворяющие на поверхности $r=a$ граничным условиям Дирихле или Неймана, определяются формулой

$$G^{(j)}(r,\varphi,r',\varphi')=(i/4)\sum_{n=-\infty}^{\infty}[J_n(kr_1)-b_n^{(j)}H_n^{(1)}(kr_1)]H_n^{(1)}(kr_2)e^{in(\varphi-\varphi')},$$

где $b_n^{(j)}=J_n(ka)/H_n^{(1)}(ka)$, $b_n^{(2)}=J_n'(ka)/H_n^{(1)'}(ka)$, J_n и $H_n^{(1)}$ – функции Бесселя и Ханкеля первого рода, $r_1=\min\{r,r'\}$, $r_2=\max\{r,r'\}$.

Отметим, что нелокальные граничные условия (1), (2) получены без ограничения на величину радиуса кривизны поверхности. Когда произведение ka велико, можно пренебречь вторым членом в левой части и вторым слагаемым в круглых скобках в правой части (1), после чего уравнение (1) совпадает с приведенным в монографии [1] нелокальным граничным условием для слабо искривленной поверхности.

Учитывая вид падающей волны, будем искать среднее поле в виде ряда

$$\langle p^{(j)}(r,\varphi)\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[J_n(kr)-b_n^{(j)}H_n^{(1)}(kr)+A_n^{(j)}H_n^{(1)}(kr)]\,e^{in\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}, \qquad (3)$$

первые два члена которого соответствуют рассеянию плоской волны на гладком цилиндре, а последний – добавке, обусловленной наличием неровностей. Будем предполагать неровности статистически однородными, в этом случае коэффициент корреляции N зависит лишь от разности $\psi=\varphi'-\varphi$. Тогда неизвестные коэффициенты $A_n^{(j)}$ можно найти, подставив ряд (3) в уравнения (1) и (2) и выполнив интегрирование. В результате ряд (3) примет вид

$$\langle p^{(j)}(r,\varphi)\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\left[J_n(kr)-H_n^{(1)}(kr)\frac{B_n^{(j)}(ka)J_n(ka)+C_n^{(j)}(ka)J_n'(ka)}{F_n^{(j)}(ka)}\right]. \qquad (4)$$

где $F_n^{(j)}(x)=B_n^{(j)}(x)H_n^{(1)}(x)+C_n^{(j)}(x)H_n^{(1)}(x)$, $\quad B_n^{(1)}(x)=1-C_n^{(1)}(x)/(2x)$,

$$C_n^{(1)}(x)=k^2\sigma^2/(2x)+k^2\sigma^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{N}_{n-m}H_m^{(1)'}(x)/[H_m^{(1)}(x)2\pi],$$

$$B_n^{(2)}(x)=-k^2\sigma^2\left[1+\frac{n^2}{x^2}+x\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{N}_{n-m}\left(1-\frac{mn}{x^2}\right)^2\frac{H_m^{(1)}(x)}{\pi H_m^{(1)'}(x)}\right](2x)^{-1},$$

$$C_n^{(2)}(x)=1-\frac{k^2\sigma^2}{2}\left[1-\frac{n^2}{x^2}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{H_m^{(1)}(x)}{H_m^{(1)'}(x)}\overline{N}_{n-m}\left(1-\frac{mn}{x^2}\right)\right],$$

$$\overline{N}_n=\int\limits_{-\pi}^{\pi}N(\psi)\,e^{in\psi}d\psi.$$

Полученное решение описывает среднее поле при произвольных радиусах подстилающей поверхности. Однако поскольку ряд (4) медленно сходится при больших волновых размерах цилиндра ($ka \gg 1$), преобразуем его по методу Зоммерфельда – Ватсона [13], представив (4) в виде интеграла

$$\langle p^{(j)}(r, \varphi)\rangle = i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \nu(\varphi - \pi)}{\sin \nu\pi} \frac{D_\nu^{(j)}(ka, kr)}{F_\nu^{(j)}(ka)} d\nu, \tag{5}$$

где $D_\nu^{(j)}(x,z) = [H_\nu^{(2)}(z) H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(1)}(z) H_\nu^{(2)}(x)] B_\nu^{(j)}(x) +$

$$+ [H_\nu^{(2)}(z) H_\nu^{(1)'}(x) - H_\nu^{(1)}(z) H_\nu^{(2)'}(x)] C_\nu^{(j)}(x).$$

Используя тождество $\cos \nu(\varphi - \pi) = \exp(i\nu\pi)\cos \nu\varphi - i\exp(i\nu\varphi)\sin \nu\pi$, интеграл (5) запишем в виде суммы геометроакустического и дифракционного полей $\langle p^{(j)}(r,\varphi)\rangle = p_\text{Г}^{(j)} + p_\text{Д}^{(j)}$. Дифракционное поле $p_\text{Д}^{(j)}$ может быть представлено в виде ряда по вычетам

$$p_\text{Д}^{(j)} = -2\pi \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{i\nu\pi}\cos \nu\varphi}{\sin \nu\pi} \frac{D_\nu^{(j)}(ka, kr)}{\partial F_\nu^{(j)}(ka)/\partial\nu}\bigg|_{\nu=\nu_s},$$

где ν_s – корни дисперсионного уравнения $F_\nu^{(j)}(ka) = 0$, расположенные в первом квадранте плоскости комплексной переменной ν. Этот ряд представляет собой суперпозицию ползущих (стелющихся) волн [13, 14], подробное исследование которых выходит за рамки настоящей раобты. Отметим, однако, что в отличие от метода последовательных приближений применение нелокальных граничных условий (1), (2) привело в выражении для функции $F_\nu^{(j)}(ka)$ к появлению поправочного члена, описывающего влияние неровностей на скорость распространения и затухание ползущих волн.

Геометроакустическое поле описывается интегралом

$$p_\text{Г}^{(j)} = -\frac{1}{2}\int\limits_\Gamma e^{i\nu\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} H_\nu^{(1)}(kr) \frac{H_\nu^{(2)}(ka) B_\nu^{(j)}(ka) + H_\nu^{(2)'}(ka) C_\nu^{(j)}(ka)}{F_\nu^{(j)}(ka)} d\nu, \tag{6}$$

где контур интегрирования Г (см. [9]) охватывает нули функции $F_\nu^{(j)}(ka)$, которые обходятся в положительном направлении. На больших расстояниях ($kr \gg 1$, $r > a$) в освещенной области, определяемой неравенством [14] $\gamma < \pi/2 - \delta$ (γ – угол между падающим лучом и нормалью к поверхности цилиндра в точке падения луча, δ – угол порядка $O[(ka)^{-1/3}]$), интеграл (6) с использованием асимптотик Дебая для функций Ханкеля может быть вычислен по методу перевала и представлен в виде суммы падающей и отраженной волн:

$$p_\text{Г}^{(j)} = p_i(r,\varphi) + V^{(j)}\left(\frac{a\cos\gamma}{2\sqrt{r^2 - a^2\sin^2\gamma} - a\cos\gamma}\right)^{1/2} e^{ik(\sqrt{r^2 - a^2\sin^2\gamma} - 2a\cos\gamma)} f^{(j)}, \tag{7}$$

$$V^{(1)} = -1 - C_\mu^{(1)}(ka)4i/[\pi ka H_\mu^{(1)}(ka) H_\mu^{(2)}(ka)],$$

$$V^{(2)} = 1 + B_\mu^{(2)}(ka)4i/[\pi ka H_\mu^{(1)'}(ka) H_\mu^{(2)'}(ka)],$$

$$\mu = ka\sin\gamma, \quad f^{(j)} = 1 - 3i/(16ka\cos\gamma + (-1)^{j+1} i/(2ka\cos^3\gamma)), \tag{8}$$

коэффициенты $C_\mu^{(1)}(x)$ и $B_\mu^{(2)}(x)$ удобно представить в виде

$$C_\mu^{(1)}(x) = \frac{k^2\sigma^2}{2x} + \frac{k^2\sigma^2}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\pi x(kl)^{-1}}^{\pi x(kl)^{-1}} e^{iy(kl\sin\gamma - q)} \frac{H_\alpha^{(1)'}(x)}{H_\alpha^{(1)}(x)} N_1(y)\, dy\, dq,$$

$$B_\mu^{(2)}(x) = -\frac{k^2\sigma^2}{2x}(1 + \sin^2\gamma) - \frac{k^2\sigma^2}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\pi x(kl)^{-1}}^{\pi x(kl)^{-1}} e^{iy(kl\sin\gamma - q)} \times$$

$$\times \frac{H_\alpha^{(1)}(x)}{H_\alpha^{(1)'}(x)} \left\{N_1(y)\cos^4\gamma + \frac{i}{kl} N_1'(y)\left[\sin\gamma(1 + \cos^2\gamma) - \frac{q}{kl}\sin^2\gamma\right]\right\} dy\, dq, \tag{9}$$

где $\alpha = xq/(kl)$, $N_1(y) = N(ykl/x)$, $l = a\int\limits_{-\pi}^{\pi} N(\psi)\, d\psi$ – радиус корреляции неровностей.

Устремив a к бесконечности (при этом цилиндрическая поверхность вырождается в плоскую), можно убедиться в том, что в этом случае второй член в выражении (7) описывает зеркально отраженную плоскую волну, а коэффициенты $V^{(j)}$ имеют смысл средних коэффициентов отражения плоской волны от статистически неровной в среднем плоской поверхности и совпадают с известными [1]. В отсутствие неровностей коэффициенты отражения равны $V^{(1)}=-1$ для мягкой и $V^{(2)}=1$ для жесткой поверхностей.

Перейдем к анализу частных случаев, когда для коэфициентов $V^{(j)}$ удается получить простые выражения. Если радиус корреляции неровностей много меньше радиуса кривизны подстилающей поверхности ($l/a \ll 1$), то интегрирование по y в (9) можно проводить в бесконечных пределах. В случае крупномасштабных неровностей и нескользящего падения волны, когда выполнены неравенства $kl \gg 1$, $\pi/2-\gamma \gg \gg (kl)^{-1/2}$, в (9) можно выполнить интегрирование по y, используя медленность изменения функции $N_1(y)$ по сравнению с экспоненциальным множителем. Вынося функцию $N_1(y)$ из-под знака интегрирования в точке $y=0$, получим

$$C_\mu^{(1)}(x)=\frac{k^2\sigma^2}{2x}+k^2\sigma^2\frac{H_\mu^{(1)\prime}(x)}{H_\mu^{(1)}(x)},\quad B_\mu^{(2)}(x)=-\frac{k^2\sigma^2}{2x}(1+\sin^2\gamma)-k^2\sigma^2\cos^4\gamma\frac{H_\mu^{(1)}(x)}{H_\mu^{(1)\prime}(x)}.$$

С использованием асимптотик Дебая для функций Ханкеля средний коэффициент отражения (8) в этом случае может быть представлен в виде

$$V^{(j)}=(-1)^j\left[1-2(k\sigma\cos\gamma)^2-i\frac{k\sigma^2}{a}\frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma}\right]. \tag{10}$$

В случае мелкомасштабных неровностей ($kl \ll 1$) в (9) можно приближенно принять $\exp(iykl\sin\gamma)\simeq 1$. В результате приходим к следующему выражению для среднего коэффициента отражения:

$$V^{(1)}=-1-4i\frac{k\sigma^2}{\pi l}\cos\gamma\int_0^\infty\frac{N_1'(x)}{x}dx-i\frac{k\sigma^2}{a}\cos\gamma, \tag{11}$$

$$V^{(2)}=1-4i\frac{k\sigma^2}{\pi l}\frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma}\int_0^\infty\frac{N_1'(x)}{x}dx-i\frac{k\sigma^2}{a}\frac{1+\sin^2\gamma}{\cos\gamma}.$$

Асимптотические формулы (10) и (11) являются обобщением выражений для коэффициентов отражения плоской волны от статистически неровной поверхности на случай, когда подстилающая поверхность искривлена. Они переходят в выражения для коэффициентов отражения от в среднем плоской поверхности [2] при устремлении a к бесконечности. В случае мелкомасштабных неровностей учет конечности кривизны подстилающей поверхности обеспечивает основной вклад в поправку к коэффициенту отражения (11) от абсолютно жесткой поверхности при малых углах γ. Полагая для оценки в (11) $k^2\sigma^2\cos^2\gamma=0{,}2$, $ka=10$, определим поправку $\Delta\varphi$ к фазе коэффициента отражения. При нормальном падении $\Delta\varphi\simeq 1°$. Из выражения (10) следует, что в случае крупномасштабных неровностей искривленность подстилающей поверхности приводит к появлению поправки $\Delta\varphi$ к фазе среднего коэффициента отражения. Эта поправка максимальна вблизи границы освещенной области, соответствующая оценка дает $\Delta\varphi\simeq 11°$. Отметим, что в случае в среднем плоской поверхности, покрытой крупномасштабными неровностями, средний коэффициент отражения является чисто действительной величиной и поправка к его фазе отсутствует.

Отметим отличия полученного решения для среднего поля от решения, когда поле на подстилающей поверхности определяется в приближении касательной плоскости. Они заключаются в том, что, во-первых, присутствует дифракционный член (ползущая волна) и, во-вторых, в выражениях (10) и (11) для среднего коэффициента отражения появляются дополнительные слагаемые, зависящие от кривизны подстилающей поверхности.

Автор благодарит Ю. П. Лысанова за полезные обсуждения и ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Басс Ф. Г., Фукс И. М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972.
2. *Лысанов Ю. П.* Рассеяние звука неровными поверхностями.– В кн.: Акустика океана. М.: Наука, 1974, с. 231–330.
3. *Chen J. M., Kim S. J.* Scattering of acoustic waves by a penetrable sphere with statistically corrugated surface.– J. Acoust. Soc. Amer., 1967, v. 42, № 1, p. 1–5.
4. *Chen J. M.* Scattering of scalar waves by a convex transparent object with statistical surface irregularities.– J. Math. Phys., 1968, v. 9, № 3, p. 439–450.
5. *Maerfeld J. F. G.-C., Maguer P.* Abnormal backscattering of low roughness surface of metallic object immersed in water.– Acoust. imaging, 1982, v. 12, p. 733–742. New York, London.

6. *Chettopadhyay A., Mahata N. P.* Propagation of Love waves on a cylindrical earth model.— J. Acoust. Soc. Amer., 1983, v. 74, № 1, p. 286–293.
7. *Cabayan H. S., Murphy R. C.* Scattering of electromagnetic waves by rough perfectly conducting circular cylinders.— IEEE Trans., 1973, v. AP-21, № 6, p. 893–895.
8. *Курьянов Б. Ф.* Рассеяние звука на шероховатой поверхности с двумя шипами неровностей.— Акуст. журн., 1962, т. 8, № 3, с. 325–333.
9. *Mitzner K. M.* Effect of small irregularities on electromagnetic scattering from an interface of arbitrary shape.— J. Math. Phys., 1964, v. 5, № 12, p. 1776–1786.
10. *Euges Y., Nelson A.* Perturbation theory of scattering from irregular bodies.— Ann. Phys. (USA), 1976, v. 100, № 1–2, p. 37–61.
11. *Hayre H. S., Vroulis G.* Determination of microscale roughness cylindrical surface using ultrasonic creeping waves. Institute of Electrical and Electronics Engineers. N. Y.: Southwestern conf. 21-st. San Antonio (Tex.), 1969, p. 18D/1–18D/4.
12. *Watson J. G., Keller J. B.* Reflection, scattering and absorption of acoustic waves by rough surfaces.— J. Acoust. Soc. Amer., 1983, v. 74, № 6, p. 1887–1894.
13. *Хенл Х., Мауэ А., Вестифаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
14. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
2.VIII.1984

УДК 534.232

АКУСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УЗКОПОЛОСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ДВИЖУЩИХСЯ ИСТОЧНИКОВ

Хоха Ю. В.

Исследование многих вопросов аэрогидродинамической акустики существенно упрощается, если заменить излучающее тело эквивалентной системой распределенных соответствующим образом элементарных источников. Таково, например, известное решение задачи о звуковом поле вращающегося воздушного винта, полученное Гутиным, который действие лопастей на среду свел по существу к специально подобранному распределению источников нулевого и первого порядков.

Ниже с использованием этого приема рассмотрен общий вопрос о совместном влиянии конечности размеров и неравномерности движения излучающего тела на амплитуду и мгновенную частоту звукового давления. Учет конечности размеров тела выполнен на основе принципа суперпозиции с помощью потенциала Лиенара – Вихерта. Описание мгновенных характеристик звукового давления получено с использованием представления об аналитическом сигнале, для которого понятия амплитуды (огибающей), фазы и мгновенной частоты строго определены.

В качестве модели тела примем область конечных размеров с распределенными в ней узкополосными источниками нулевого порядка, движущуюся поступательно в безграничной среде. Считаем объемные скорости каждого элементарного источника системы не зависящими от действия остальных и от движения области T', а последнюю – гидродинамически прозрачной (модель проницаемого тела).

Звуковое поле движущегося точечного источника определяется [1] потенциалом Лиенара – Вихерта

$$d\varphi(\mathbf{x},t)=-\frac{dQ(t')}{4\pi r(t')\left\{1-\dfrac{1}{c}\mathbf{u}(t')\mathbf{n}(t')\right\}},$$

где $\mathbf{x}$ – неподвижная точка наблюдения, $r(t')=|\mathbf{x}-\mathbf{y}(t')|$, $\mathbf{y}(t')$ – положение, а $\mathbf{u}(t)=d\mathbf{y}(t')/dt'$ – скорость источника, $t'=t-r(t')/c$, $\mathbf{n}(t')=\mathbf{r}(t')/r(t)$, $dQ(t)$ – зависимость объемной скорости от времени в собственной системе, c – скорость распространения звука. Для нахождения поля, создаваемого всей областью T', выберем внутри T' некоторую точку O' и примем ее за начало движущейся системы координат с осями, параллельными осям неподвижной, в которой среда покоится на бесконечности. Тогда уравнение движения произвольной точки T' запишется как $\mathbf{y}(t)=\mathbf{Y}(t)-\mathbf{z}$, где $\mathbf{Y}(t)$ – уравнение движения полюса O', а $\mathbf{z}$ – положение той же точки относительно движущейся системы отсчета. Учитывая, что $dQ(t')=dQ(\mathbf{z},t')=q(\mathbf{z},t)d\tau(\mathbf{z})$, где q – плотность объемной скорости, а $d\tau$ – элемент объема в точке $\mathbf{z}\in T'$, воспользуемся принципом суперпозиции. Тогда

$$\varphi(\mathbf{x},t)=-\int\limits_{T'}\frac{q(\mathbf{z},t')\,d\tau(\mathbf{z})}{4\pi r(\mathbf{z},t')\{1-M(\mathbf{z},t')\mathbf{n}(\mathbf{z},t')\}},\tag{1}$$