

УДК 534.232.46.001.24

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ КОЛЕЦ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ

*Бушер М. К.*

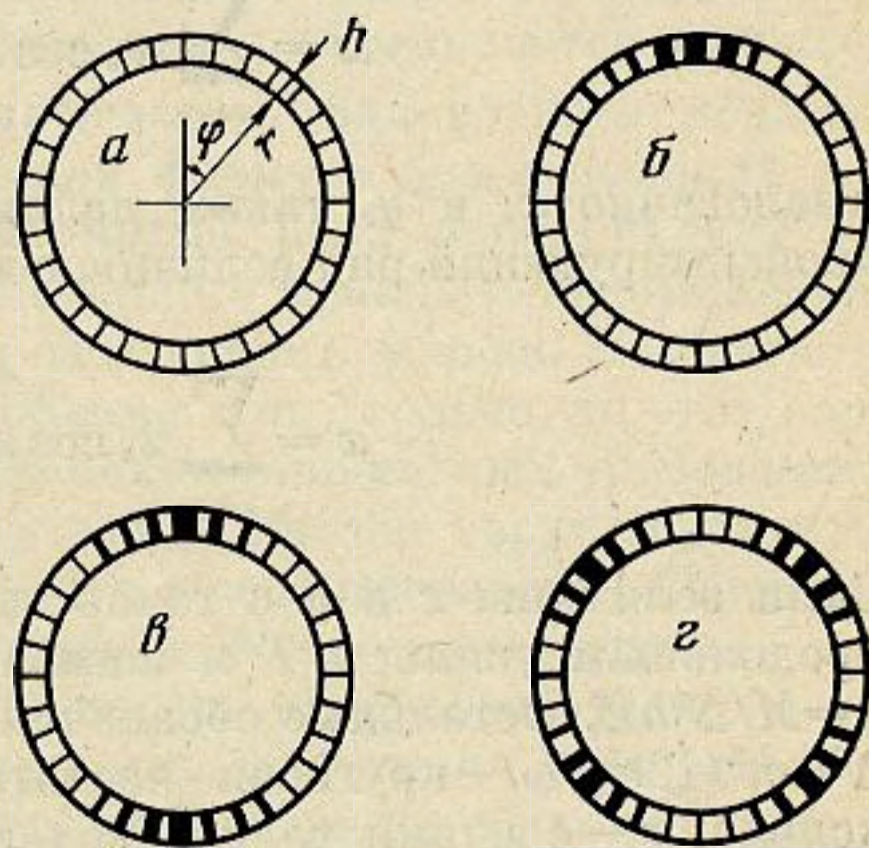
Рассмотрен класс цилиндрических пьезокерамических преобразователей, гибкость и плотность которых изменяется в окружном направлении по гармоническому закону. Показано, что такие преобразователи обладают свойствами, которые могут быть использованы при проектировании излучающих устройств.

В общем виде метод динамического расчета пьезокерамических колец неоднородной структуры, содержащих между пьезоэлементами гибкие вставки из пластика, изложен в работе [1]. Однако анализ конкретных механических систем в известной автору литературе изложен только для случаев равномерно расположенных по окружности гибких вставок [2] и для четырех сосредоточенных гибких вставок, расположенных в двух взаимно перпендикулярных направлениях [3].

В последней работе показано, что даже при осесимметричном электрическом возбуждении кольца вследствие влияния гибких вставок амплитуда колебаний по окружности меняется почти на порядок. Кроме того, в кольце генерируются паразитные изгибные напряжения такого же порядка, что и основные напряжения от продольных усилий. Представляет интерес рассмотреть кольца с плавно меняющимися по окружности механическими параметрами. В достаточно общем виде такую структуру можно описать выражениями

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} (1 + \mu_\rho \cos k\varphi), \\ 1/E &= 1/\bar{E} (1 + \mu_E \cos k\varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi$  — угловая координата;  $\rho$ ,  $E$  — плотность и модуль упругости в текущей точке кольца соответственно;  $k$  — коэффициент, характеризующий период структуры.



Фиг. 1. Типы структур пьезокерамических колец с гибкими вставками: а —  $k=0$ ; б —  $k=1$ ; в —  $k=2$ ; г —  $k=4$

Практически интересны варианты структур, показанные на фиг. 1, с коэффициентами периодичности  $k=0, 1, 2, 4$ . Для проведения дальнейшего анализа выпишем из работы [1] общую систему разрешающих уравнений свободных колебаний неоднородного кольца:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \tilde{\omega}^2 \left( w_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_{i0}^{(\rho)} w_i \right), & w_0 &= x_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_{i0}^{(E)} x_i, & (s=0) \\
 x_s + s^2 \Delta^2 y_s &= \tilde{\omega}^2 \sum_{i=0}^N \lambda_{is}^{(\rho)} w_i, & w_s + s v_s &= \sum_{i=0}^N \lambda_{is}^{(E)} x_i, & (s=1, 2, \dots, N) \\
 s x_s + s \Delta^2 y_s &= \tilde{\omega}^2 \sum_{i=1}^N \gamma_{is}^{(\rho)} v_i, & s^2 w_s + s v_s &= \sum_{i=0}^N \lambda_{is}^{(E)} y_i, & (s=1, 2, \dots, N) \\
 y_0 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_{i0}^{(E)} y_i & (s=0).
 \end{aligned} \tag{2}$$

В этих уравнениях символами  $\lambda_{is}$  и  $\gamma_{is}$  обозначены следующие интегральные выражения:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{is}^{(\rho, E)} &= (2/\pi) \int_0^\pi (\rho/\bar{\rho}, \bar{E}/E) \cos i\varphi \cos s\varphi d\varphi, \\
 \gamma_{is}^{(\rho)} &= (2/\pi) \int_0^\pi (\rho/\bar{\rho}) \sin i\varphi \sin s\varphi d\varphi.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Величины  $w_s$  и  $v_s$  являются коэффициентами разложения в аппроксимирующий тригонометрический ряд нормального и тангенциального перемещений  $w$  и  $v$  поверхности кольца:

$$w = \sum_{s=0}^N w_s \cos s\varphi, \quad v = \sum_{s=1}^N v_s \sin s\varphi.$$

Аналогично  $x_s$  и  $y_s$  также являются коэффициентами разложения в аппроксимирующий ряд величин  $x$  и  $y$ :

$$x = \sum_{s=0}^N x_s \cos s\varphi, \quad y = \sum_{s=0}^N y_s \cos s\varphi.$$

Сами величины  $x$  и  $y$  с точностью до постоянного множителя являются продольным усилием  $T$  и изгибающим моментом  $M$  в кольце:  $x=rT/h\bar{E}$ ,  $y=M/\Delta^2 h\bar{E}$ . Остальные обозначения имеют следующий смысл:  $\tilde{\omega}^2 = \omega^2 r \bar{\rho} / \bar{E}$ ,  $\Delta^2 = h^2 / 12r^2$ ,  $\omega$  — круговая частота собственных колебаний;  $h$  — толщина кольца;  $r$  — средний радиус кольца. Вычисленные значения коэффициентов  $\lambda_{is}^{(\rho, E)}$  и  $\gamma_{is}^{(\rho)}$  с учетом формул (2) и (3) приведены в табл. 1. Числитель дроби для различных  $i$  и  $s$  соответствует параметру  $\lambda_{is}$ , а знаменатель — параметру  $\gamma_{is}$ . Рассмотрим динамические особенности каждой из структур. При равномерном распределении гибких вставок (фиг. 1, а) угловой период структуры  $\varphi_0$  выбирается значительно меньше  $2\pi$ . Осесимметричное электрическое возбуждение преобразователя генерирует в нем квазипульсирующую моду колебаний. Здесь и в дальнейшем приставку «квази» будем добавлять к названию мод колебаний, близких к аналогичным модам однородного кольца. Сделанные ограничения позволяют рассмотреть работу преобразователя на этой моде как однородную механиче-

Значения коэффициентов  $\lambda_{is}^{(E, \rho)}$  и  $\gamma_{is}^{(\rho)}$  для различных типов структур колец

S	$\lambda_{is}/\gamma_{is}$				K
	0	1	2	4	
0	1/0	$\mu/0$	0/0	0/0	1
	1/0	0/0	$\mu/0$	0/0	2
	1/0	0/0	0/0	$\mu/0$	4
1	$\mu/0$	1/1	$\frac{1}{2}\mu/\frac{1}{2}\mu$	0/0	1
	0/0	$1 + \frac{1}{2}\mu/1 - \frac{1}{2}\mu$	0/0	0/0	2
	0/0	1/1	0/0	0/0	4
	0/0	$\frac{1}{2}\mu/\frac{1}{2}\mu$	1/1	0/0	1
2	$\mu/0$	0/0	1/1	$\frac{1}{2}\mu/\frac{1}{2}\mu$	2
	0/0	0/0	$1 + \frac{1}{2}\mu/1 - \frac{1}{2}\mu$	0/0	4
	0/0	0/0	0/0	1/1	1
4	0/0	0/0	$\frac{1}{2}\mu/\frac{1}{2}\mu$	1/1	2
	0/0	0/0	0/0	1/1	4

скую систему с усредненной гибкостью  $1/\bar{E}$  и плотностью  $\bar{\rho}$ , которые могут быть рассчитаны по следующим простым формулам:

$$1/\bar{E} = \theta_E/E_n, \quad \bar{\rho} = \theta_\rho \rho_n, \quad \theta_E = (1-\theta) + \theta E_n/E_v, \quad \theta_\rho = (1-\theta) + \theta \rho_v/\rho_n, \quad (4)$$

где  $\theta = \varphi_v/\varphi_n$  — коэффициент заполнения,  $\varphi_n$  и  $\varphi_v$  — угловые размеры пьезоэлемента и вставки;  $E_n$  и  $E_v$  — модули упругости материалов пьезоэлемента и вставки;  $\rho_n$  и  $\rho_v$  — плотности материалов пьезоэлемента и вставки.

Резонансная частота квазипульсирующей моды определяется выражением  $\omega_0 = \omega_{ок}/\sqrt{\theta_E \theta_\rho}$ , где  $\omega_{ок}$  — резонансная частота однородного керамического кольца. Определение по аналогичной формуле более высоких резонансных частот будет, по-видимому, правомерно: пока период структуры мал по сравнению с периодом формы однородного кольца с подстановкой туда вместо  $\omega_{ок}$  соответствующей частоты однородного кольца. Что касается выбора материала вставок, их доли в объеме всего кольца, то этот вопрос может быть разрешен на основе применения конкретных требований. В качестве критерия эффективности излучателя обычно берут мощность, излучаемую единицей свободной поверхности преобразователя. Факторами, ограничивающими излучаемую мощность, в большинстве случаев являются электрическая и механическая прочность преобразователя.

Формулы, связывающие удельную мощность излучения преобразователя, содержащего в активном элементе гибкие вставки и не содержащего их, имеют вид

$$W^{(\sigma)} = W_0^{(\sigma)} (\theta_E/\theta_\rho), \quad W^{(эл)} = W_0^{(эл)} [(1-\theta)/\theta_E]^2, \quad (5)$$

где  $W^{(\sigma)}$  и  $W^{(эл)}$  — удельные мощности, выраженные через допускаемые механические напряжения в преобразователе  $[\sigma]$  и допускаемую напряженность электрического поля  $[E^{(эл)}]$  в нем соответственно. Эти формулы относятся к преобразователю с экранированной внутренней поверхностью, работающему вблизи частоты механического резонанса. Если в качестве материала для вставок использовать текстолит ( $\rho_v = 1,35 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $E_v = 0,7 \cdot 10^4$  МПа), а для пьезоэлементов — керамику состава ЦТБС-3 ( $\rho_n = 7,2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $E_n = 0,7 \cdot 10^5$  МПа), то при коэффициенте запол-

нения  $\theta=0,2$  коэффициенты в формулах (5), вычисленные по выражениям (4), получают следующие значения:  $W^{(o)}=3,34W_0^{(o)}$   $W^{(эл)}=0,082W_0^{(эл)}$ .

Таким образом, введение в структуру «активного» элемента гибких вставок приводит к существенному снижению эффективности преобразователя при сохранении подводимого к преобразователю электрического напряжения. С другой стороны, если преобразователь обладает большим запасом электрической прочности, т. е. в его активном элементе можно развить механические напряжения такие же, что и в активном элементе без вставок, то излучаемая преобразователем со вставками мощность будет больше. Сделанные выводы сохраняют свою силу и для остальных вариантов структур.

Рассмотрим теперь следующий вариант структуры активного элемента, соответствующий значению  $k=1$  (фиг. 1, б). Ограничимся областью собственных частот, которые соответствуют квазипульсирующей и квазиосциллирующей формам колебаний. Иначе говоря, в уравнениях (2) будем сохранять члены, соответствующие нулевой и первой формам разложения в тригонометрический ряд. Как будет показано ниже, моментными членами при таких ограничениях можно пренебречь. Используя табл. 1, получим следующую систему уравнений свободных колебаний:

$$\begin{aligned} x_0 &= \tilde{\omega}^2 \left( w_0 + \frac{1}{2} \mu_p w_1 \right), & w_0 &= x_0 + \frac{1}{2} \mu_E x_1, \\ x_1 &= \tilde{\omega}^2 (\mu_p w_0 + w_1), & w_1 + v_1 &= \mu_E x_0 + x_1, \\ x_1 &= \tilde{\omega}^2 v_1, \end{aligned} \quad (6)$$

Исключив из этой системы величины  $x_0, x_1, v_1$ , получим следующую разрешающую систему однородных уравнений:

$$\begin{aligned} \left[ 1 - \tilde{\omega}^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \mu_E \mu_p \right) \right] w_0 - \tilde{\omega}^2 \frac{1}{2} (\mu_E + \mu_p) w_1 &= 0, \\ [\mu_p - \tilde{\omega}^2 (\mu_E + \mu_p)] w_0 + \left[ 2 - \tilde{\omega}^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \mu_E \mu_p \right) \right] w_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Система имеет две собственные частоты, формулы для вычисления которых с точностью до членов  $\mu^2$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_0^2 &= 1 - \mu_E \left( \frac{1}{2} \mu_E + \mu_p \right), \\ \tilde{\omega}_1^2 &= 2 \left( 1 + \mu_E + \mu_E \mu_p + \frac{1}{9} \mu_p^2 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

На частотах  $\tilde{\omega}_0$  и  $\tilde{\omega}_1$  имеют место следующие соотношения между амплитудами форм:

$$\begin{aligned} w_{1|\omega_0} &= \mu_E [1 - (\mu_E + \mu_p)^2] w_0, \\ w_{0|\omega_1} &= -(\mu_E + \mu_p) \left[ 1 - \mu_E^2 + \frac{1}{9} \mu_p^2 + 2\mu_E \mu_p \right] w_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть теперь преобразователь имеет на окружности активного элемента два сгущения гибких вставок (фиг. 1, в). Симметрия структуры кольца обуславливает распад уравнений на две группы, описывающие симметричные и антисимметричные формы относительно горизонтального диаметра:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \tilde{\omega}^2 \left( w_0 + \frac{1}{2} \mu_p w_2 \right), & w_0 &= x_0 + \frac{1}{2} \mu_E x_2, \\ x_2 + 4\Delta^2 y_2 &= \tilde{\omega}^2 (\mu_p w_0 + w_2), & w_2 + 2v_2 &= \mu_E x_0 + x_2, \\ 2x_2 + 2\Delta^2 y_2 &= \tilde{\omega}^2 v_2, & 4w_2 + 2v_2 &= \mu_E y_0 + y_2 \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \Delta^2 y_1 &= \tilde{\omega}^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \mu_p \right) w_1, & w_1 + v_1 &= \left( 1 + \frac{1}{2} \mu_E \right) x_1, \\ x_1 + \Delta^2 y_1 &= \tilde{\omega}^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \mu_p \right) v_1, & w_1 + v_1 &= \left( 1 + \frac{1}{2} \mu_E \right) y_1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Исключив из уравнений (10) силовые величины  $x_0$  и  $x_2$  и моментные члены, содержащие малый параметр  $\Delta^2$ , получим следующую систему разрешающих уравнений:

$$\begin{aligned} \left( \tilde{\omega}^2 - \frac{1-2\mu_p\mu_E}{1-\mu_E^2/2} \right) w_0 + \left( \tilde{\omega}^2 \frac{1}{2} \mu_p + \frac{2,5\mu_E}{1-\mu_E^2/2} \right) w_2 &= 0, \\ \left( \tilde{\omega}^2 \mu_p + \frac{\mu_E-4\mu_p}{1-\mu_E^2/2} \right) w_0 + \left( \tilde{\omega}^2 - \frac{5}{1-\mu_E^2/2} \right) w_2 &= 0, \\ v_2 &= 2(\mu_p w_0 + w_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Решая частотное уравнение этой системы, получим следующие выражения для квадратов собственных частот:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_0^2 &= 1 + \frac{3}{8} \mu_p^2 - \frac{1}{8} \mu_E^2 - \frac{1}{4} \mu_E \mu_p, \\ \tilde{\omega}_2^2 &= 5 \left( 1 + \frac{1}{4} \mu_E \mu_p + \frac{1}{8} \mu_p^2 + \frac{5}{8} \mu_E^2 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим теперь антисимметричную форму колебаний, описываемую уравнениями (11). Исключим из них силовые величины  $x_1$  и  $y_1$  и получим

$$\begin{aligned} \left[ \tilde{\omega}^2 - \frac{2(1+\Delta^2)}{(1+\mu_E/2)(1-\mu_p^2/4)} \right] w_1 &= 0, \\ v_1 &= \frac{1+\mu_p/2}{1-\mu_p/2} w_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Собственная частота кольца определится из формулы

$$\tilde{\omega}_1^2 = 2 / \left[ (1+\mu_E/2)(1-\mu_p^2/4) \right]. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь вариант, который соответствует четырем сгущениям гибких вставок (фиг. 1, з). В отличие от рассмотренных выше случаев будем считать, что преобразователь устанавливается в антенне так, что ось его характеристики направленности будет проходить через минимум гибкости. При анализе работы преобразователя вблизи первых частот, соответствующих квазиульсирующим формам колебаний, в разрешающих уравнениях сохраним члены нулевой и четвертой форм аппроксимирующих разложений:

$$\begin{aligned} x_0 &= \tilde{\omega}^2 \left( w_0 + \frac{1}{2} \mu_p w_4 \right), & w_0 &= x_0 + \frac{1}{2} \mu_E x_4, \\ x_4 + 16\Delta^2 y_4 &= \tilde{\omega}^2 (\mu_p w_0 + w_4), & w_4 + 4v_4 &= \mu_E x_0 + x_4, \end{aligned} \quad (16)$$

$$4x_4 + 4\Delta^2 y_4 = \tilde{\omega}^2 v_4, \quad 16w_4 + 4v_4 = \mu_E y_0 + y_4, \quad y_0 = -\frac{1}{2} \mu_E y_4.$$

Выражая силовые величины  $x_4$  и  $y_4$  через перемещения

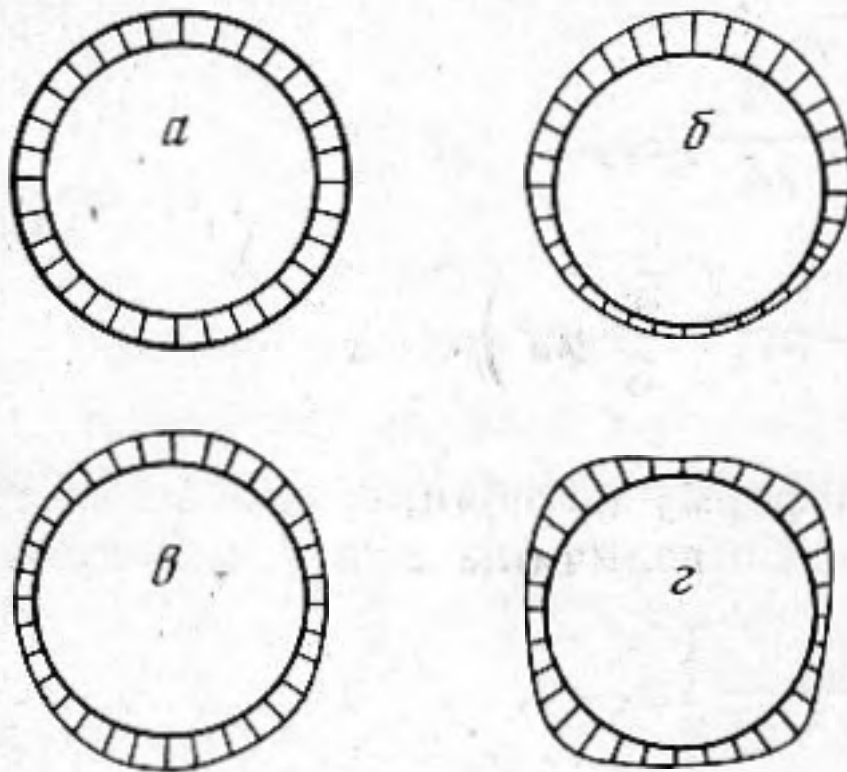
$$y_4 = \frac{\tilde{\omega}^2}{60\Delta^2} (4\mu_p w_0 + 4w_4 - v_4), \quad x_4 = \frac{\tilde{\omega}^2}{15} (-\mu_p w_0 - w_4 + 4v_4),$$

получим разрешающую систему уравнений

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - \tilde{\omega}^2 \left( 1 - \frac{1}{30} \mu_p \mu_E \right) \right] w_0 - \tilde{\omega}^2 \left( \frac{1}{2} \mu_p - \frac{1}{30} \mu_E \right) w_4 - \frac{\tilde{\omega}^2}{15} \mu_E v_4 = 0, \\ & -\tilde{\omega}^2 \left( \mu_E - \frac{1}{15} \mu_p \right) w_0 + \left[ 1 - \tilde{\omega}^2 \left( \frac{1}{2} \mu_E \mu_p - \frac{1}{5} \right) \right] w_4 + 4 \left( 1 - \frac{\tilde{\omega}^2}{15} \right) v_4 = 0, \\ & -\tilde{\omega}^2 \mu_p w_0 + \left( \frac{240 \Delta^2}{1 - \mu_E^2/2} - \tilde{\omega}^2 \right) w_4 + \left( \frac{60 \Delta^2}{1 - \mu_E^2/2} + \frac{\tilde{\omega}^2}{4} \right) v_4 = 0. \end{aligned}$$

Вследствие наличия довольно высоких форм колебаний, входящих в систему, моментными членами при решении уравнений пренебречь уже нельзя. Частотное уравнение становится бикубическим. Его три корня соответствуют трем формам колебаний:  $\tilde{\omega}_0$  — квазипульсирующей форме,  $\tilde{\omega}_{4н}$  — квазиизгибным и  $\tilde{\omega}_{4п}$  — квазипродольным колебаниям, распределенным в обоих случаях по окружности кольца в основном по закону  $\cos 4\varphi$ .

Проведем анализ динамических особенностей рассмотренных структур, задавшись предварительно их конкретными параметрами. Пусть, как и



Фиг. 2. Собственные формы свободных колебаний пьезокерамических колец различных структур на частоте квазипульсирующей формы — радиальные смещения: а —  $k=0$ ; б —  $k=1$ ; в —  $k=2$ ; г —  $k=4$

в случае квазиоднородной структуры, процент пассивного материала в кольце составляет  $\theta=20\%$ . При тех же материалах, входящих в кольцо, конструктивно-технологически просто реализовать структуры с коэффициентами асимметрии  $\mu_E = \pm 0,63$ ,  $\mu_p = \mp 0,18$ . При этом нижний знак относится к структуре  $k=4$  (в силу оговоренной выше специфики установки преобразователя в антенне).

В табл. 2 приведены результаты расчета собственных частот свободных колебаний и соответствующих им амплитуд смещений с точностью до постоянного множителя. На фиг. 2 показаны формы колеблющейся поверхности колец различных структур.

Из общих уравнений колебаний системы (2) следует, что в неоднородном кольце изгибные колебания и колеба-

ния растяжения — сжатия оказываются принципиально связанными. Для рассмотренных выше структур  $k=1$  и  $k=2$  эта связь оказывается незначительной. Однако в кольце со структурой  $k=4$  даже на квазипульсирую-

Таблица 2  
Частоты и формы свободных колебаний колец

Параметр	Тип структуры кольца К			
	0	1	2	4
Собственные частоты	$\tilde{\omega}_0=1$	$\tilde{\omega}_0=0,965$ $\tilde{\omega}_1=1,2\sqrt{2}$	$\tilde{\omega}_0=0,996$ $\tilde{\omega}_2=1,112\sqrt{5}$ $\tilde{\omega}_1=0,875\sqrt{2}$	$\tilde{\omega}_0=1,019$ $\tilde{\omega}_{4п}=1,038\sqrt{17}$ $\tilde{\omega}_{4н}=0,633$
Амплитуды форм	—	$w_1(\omega_0)=0,5w_0$ $w_0(\omega_1)=-0,37w_1$	$w_2(\omega_0)=0,24w_0$ $w_0(\omega_2)=-0,32w_2$	$w_4(\omega_0)=-0,36w_0$ $v_4(\omega_0)=-0,063\omega_0$

щей частоте  $\tilde{\omega}_0$  генерируются достаточно интенсивные изгибные деформации.

При  $\mu_p=0,18$  и  $\mu_E=-0,63$  получим следующие выражения для напряжений на внутренней и наружной поверхностях кольца:

$$\sigma = [(0,968 + 0,005 \cos 4\varphi) + (-0,499)(0,315 + \cos 4\varphi)] (w_0/r) \bar{E}.$$

В сечении  $\varphi=0$  напряжения на внутренней и наружной поверхностях  $\sigma_{вн}=1,674[0,973(w_0/r)E]$  и  $\sigma_{нар}=0,326[0,973(w_0/r)E]$ , т. е. будут отличаться почти в 5 раз. По отношению к напряжениям от растягивающих усилий изгибные напряжения составляют 67%.

Из общих соображений можно утверждать, что при дальнейшем возрастании коэффициента периодичности  $k$  изгибные колебания на частоте квазипульсирующей формы вновь должны уменьшаться и кольцо по своим характеристикам будет приближаться к кольцу квазиоднородной структуры с усредненными механическими параметрами.

Таким образом, использование гибких вставок в структуре преобразователя позволяет снизить его волновой размер, деформировать частотный спектр и влиять на распределение скорости колебаний на его поверхности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бушер М. К. Уравнения динамики цилиндрического пьезокерамического преобразователя – излучателя неоднородной структуры. – Акуст. журн., 1978, т. 24, № 6, с. 835–842.
2. Справочник. Подводные электроакустические преобразователи./Под ред. В. В. Богородского. Л.: Судостроение, 1983.
3. Бушер М. К. Свободные колебания упругого кольца периодической структуры. – Акуст. журн., 1976, т. 22, № 4, с. 497–503.

Поступила в редакцию  
18.III.1985