

УДК 534.231.1

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ  
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТРАНСФОРМАЦИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН  
НА НЕРЕГУЛЯРНОМ УЧАСТКЕ ВОЛНОВОДА**

*Завадский В. Ю., Крюков Ю. С.*

Применен метод конечных разностей к задаче о трансформации нормальных волн на нерегулярном участке волновода. Получены картины изолиний звукового поля трансформации 1-й нормальной волны на частоте 50 Гц. Приведены оценки точности конечно-разностных решений и дано сравнение расчетов звукового поля различными методами.

В ряде прикладных задач для вычисления акустических полей в переменных по трассе волноводах используются методы, основанные на конечно-разностном решении уравнения Гельмгольца. В настоящей работе конечно-разностный метод расчета акустических полей, развитый в работах [1, 2], применяется для исследования трансформации нормальных волн на нерегулярном участке волновода. Кроме того, в работе приведены оценки точности конечно-разностных решений и результаты сравнения расчетов по методу конечных разностей с расчетами по методу нормальных волн для регулярного волновода и методу, основанному на адиабатико-асимптотическом приближении для переменного по трассе волновода.

Рассмотрим акустическую модель нерегулярного волновода глубиной  $H$ , ограниченного двумя свободными границами и заполненного жидкой средой, в которой квадрат волнового числа имеет вид  $k^2(r, z) = =k_0^2(1-E\varphi(r, z))$ , где  $r, z$  — цилиндрические координаты;  $k_0 = 2\pi f_0/c_0$  — волновое число в точке излучения;  $k_0 H \gg 1$ , а  $|E| \ll 1$ ;  $\varphi(r, z) = [1 - c_0^2/c^2(r, z)]/E$ , причем  $|\varphi(r, z)| \leq 1$ ;  $c(r, z)$  — профиль скоростей звука. Звуковое давление  $p(r, z)$  является решением краевой задачи для уравнения Гельмгольца:

$$[\Delta + k^2(r, z)]p(r, z) = 4\pi Q \delta(z - z_0) \delta r/r; \quad p(r, 0) = 0; \quad p(r, H) = 0, \quad (1)$$

$\text{Im } k^2 > 0; \lim_{r \rightarrow \infty} p \rightarrow 0$ , где  $Q$  — сила источника. Воспользовавшись резуль-

татами работы [1], сведем решение краевой задачи (1) к решению начальной задачи для преобразованного уравнения Гельмгольца относительно медленно изменяющейся по горизонтали функции  $v(r, z)$  при условии, что  $k_0 r \gg 1$ :

$$v_{rr}(r, z) + 2ik_0 v_r(r, z) + v_{zz}(r, z) - Ek_0^2 \varphi(r, z) v(r, z) = 0, \\ v(r, 0) = 0; \quad v(r, H) = 0 \quad (2)$$

Функция  $v(r, z)$  связана с  $p(r, z)$  следующим соотношением при  $k_0 r \gg 1$ :

$$p(r, z) = v(r, z) \sqrt{2/\pi k_0 r} \exp(ik_0 r - i\pi/4). \quad (3)$$

Для решения задачи (2) в работе [1] использован метод конечных разностей. Рассмотрим более детально характеристическое уравнение для разностного аналога уравнения (2) и приведем оценки точности конечно-разностных решений, что не было сделано в работе [1]. Воспользуемся методом «замороженного» коэффициента [3]. С этой целью рассмотрим однородный волновод, ограниченный двумя свободными границами, в котором  $k_1^2 = k_0^2(1-E)$ , т. е.  $\varphi(r, z) = 1$ . Кроме того, перейдем к безразмер-

ным параметрам, положив  $H = \pi$  метров. Уравнению Гельмгольца  $[\Delta + k_0^2] \cdot p(r, z) = 0$  в этом случае удовлетворяют два решения. Асимптотики этих решений при  $k_0 r \gg 1$ , описывающие «прямые» волны  $p_+(r, z)$  и «обратные» волны  $p_-(r, z)$ , имеют следующий вид:

$$p_{\pm}(r, z) \sim \sqrt{2/\pi \lambda_n r} \exp\left(\pm \frac{i\pi}{4}\right) \sum_{n=1}^N \sin(nz) \exp(\pm i \lambda_n r), \quad (4)$$

где верхний знак соответствует «прямым», а нижний — обратным волнам;  $N$  — максимальное число учитываемых в решении нормальных волн, а  $\lambda_n = k_0(1-E)^{1/2}(1-n^2/(k_0^2(1-E)))^{1/2}$  — горизонтальная компонента волнового вектора. Рассмотрим только узкий пучок спектра нормальных волн такой, что  $n^2/k_0^2 < E$ , тогда, воспользовавшись разложением в ряд Тейлора,  $\lambda_n$  представим с точностью до членов  $O(E^2)$  в следующем виде:

$$\lambda_n = k_0(1 - n^2/2k_0^2 - E/2 + En^2/4k_0^2 - n^4/8k_0^4 - E^2/8 + O(E^4)); \quad (5)$$

здесь учитывалось, что  $n^2/(k_0^2(1-E)) = n^2(1+E)/k_0^2$ , так как  $k_0 \gg 1/\pi$ , а  $|E| \ll 1$ . Пренебрегая в амплитудном множителе решения (4) членами разложения (5) включительно до  $O(E)$ , имеем

$$p_{\pm}(r, z) \sim \sqrt{2/\pi k_0 r} \exp\left(\mp \frac{i\pi}{4}\right) \sum_{n=1}^N \sin(nz) \exp(\pm i \lambda_n r). \quad (6)$$

Оценим точность конечно-разностного решения уравнения (2) для случая  $\varphi(r, z) = 1$ , сравнивая его с выражением (6). Представим конечно-разностное решение в виде

$$v(r, z) \sim \sum_{n=1}^N \sin(nz) \exp(i \alpha_n r), \quad (7)$$

где  $\alpha_n$  является решением характеристического уравнения

$$-4h^{-2} \sin^2(\alpha_n h/2) - 2k_0 h^{-1} \sin(\alpha_n h) - (4/l^2) \sin(nl/2) - k_0 E = 0, \quad (8)$$

$h, l$  — шаги разностной сетки.

Пусть  $k_0 h \ll 1$  и  $\alpha_n h \ll 1$ . Тогда  $\sin(\alpha_n h/2) = \alpha_n h/2 + O(\alpha_n h/2)^2$ , и из уравнения (8) имеем с точностью до членов  $O(E^4)$  два решения, описывающие прямые волны  $\alpha_{n+}$  и обратные волны  $\alpha_{n-}$ :

$$\alpha_{n\pm} = -k_0(1 - n^2/2k_0^2 - E/2 + En^2/4k_0^2 - n^4/8k_0^4 - E^2/8 + O(E^4)). \quad (9)$$

Учитывая вид соотношений (3) и (7), получим конечно-разностные решения, которые с точностью до членов  $O(E^4)$  совпадают с аналитическими решениями (6). Таким образом, в случае, когда на разностной сетке шаг дискретизации по дальности выбирается согласно условию  $k_0 h \ll 1$ , то разностный аналог преобразованного уравнения Гельмгольца (2) описывает достаточно хорошо с точностью до членов  $O(E^4)$ , где  $|E| \ll 1$ , как прямые волны, так и обратные волны.

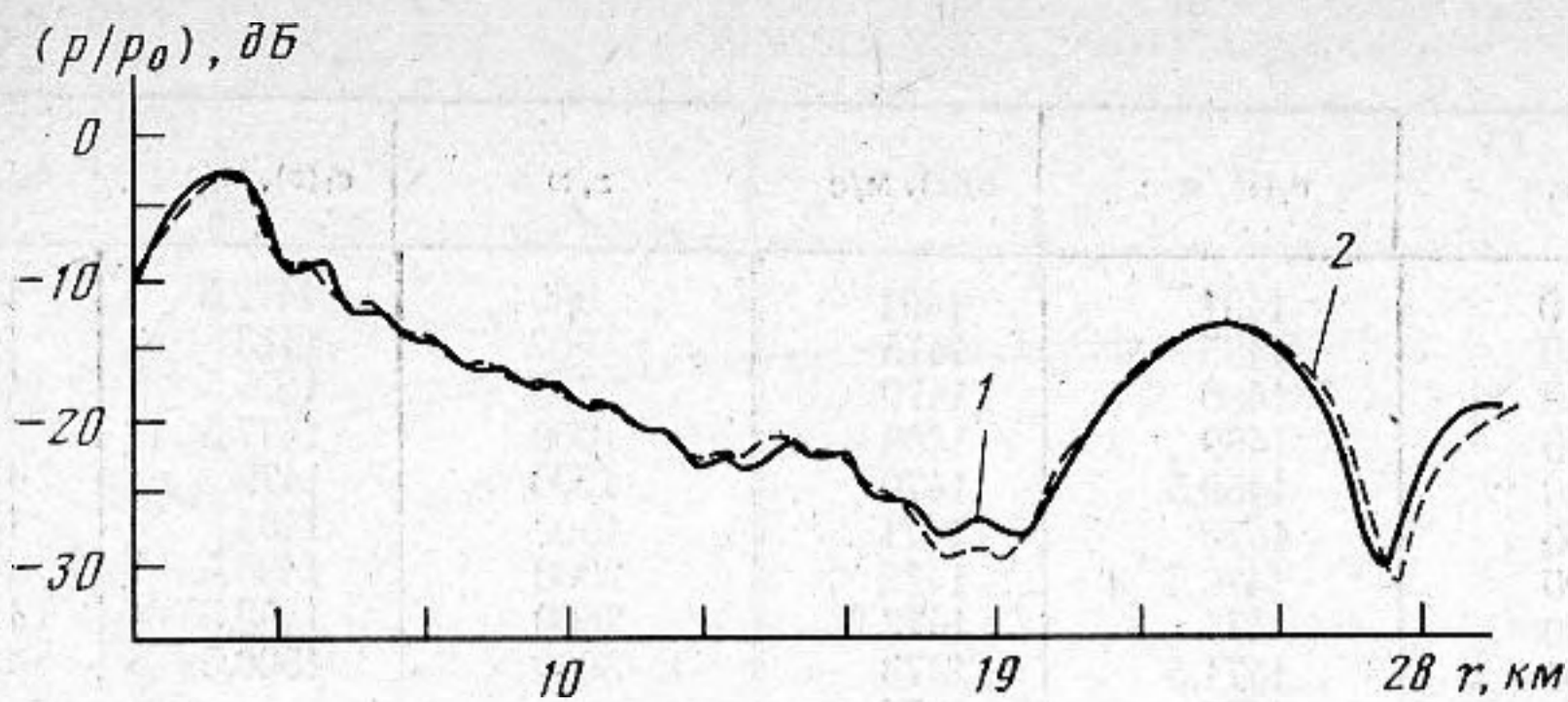
Пусть  $1 \ll k_0 h < 1/E$ . Разрешая уравнение (8) относительно  $\sin(\alpha_n h)$  и воспользовавшись разложением функции  $\arcsin$  в ряд Тейлора, имеем с точностью до членов порядка  $E^2$  для прямых волн

$$\begin{aligned} \alpha_{n+} = & -n^2/2k_0 - Ek_0/2 - n^4/8k_0^3 + En^2/4k_0 - \\ & - k_0 E^2/8 - n^6 h^2/48k_0^3 - k_0^3 E^3 h^2/48 + O(E^3), \end{aligned} \quad (10)$$

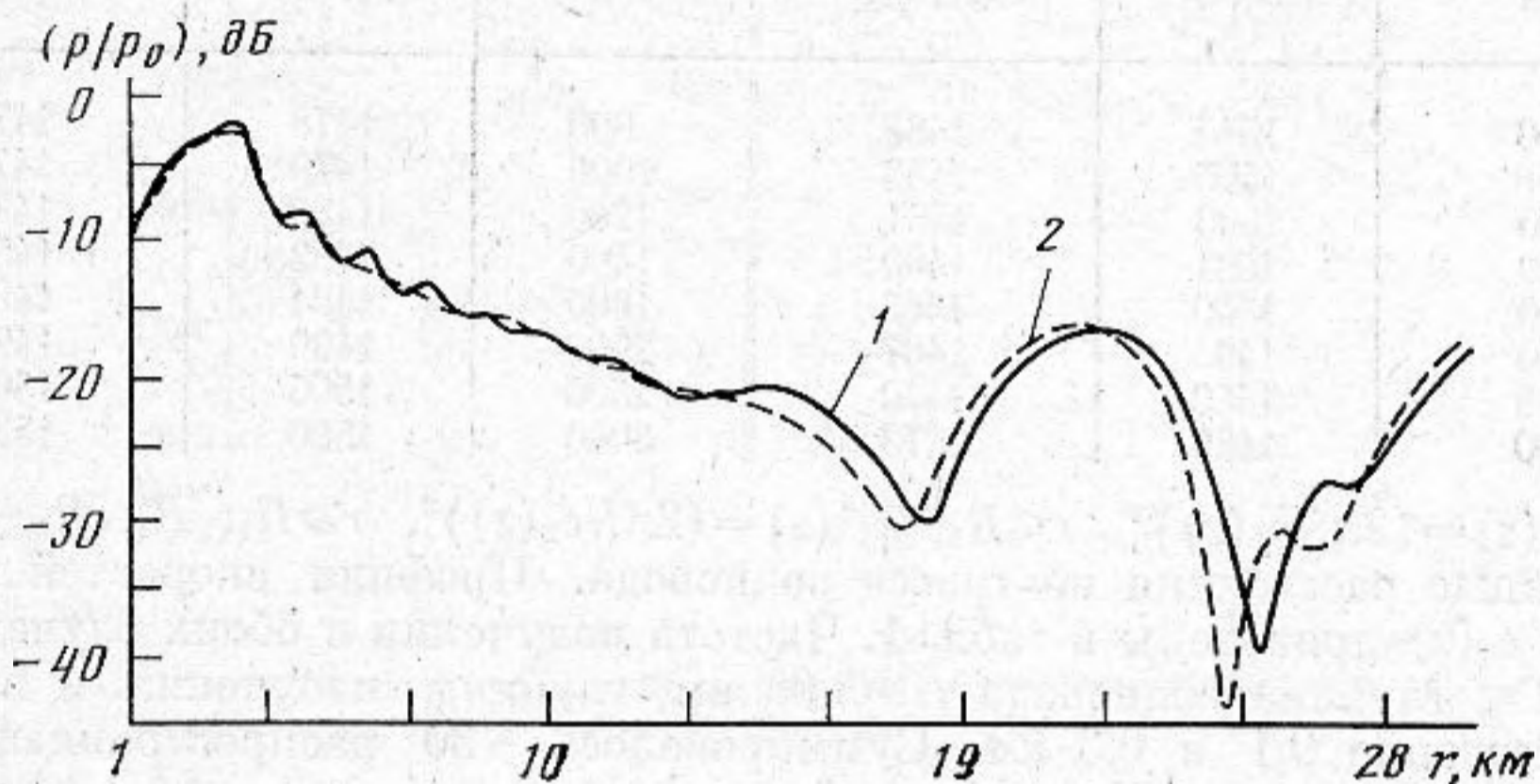
и для обратных волн

$$\begin{aligned} \alpha_{n-} = & -2/k_0 h^2 + n^2/2k_0 + Ek_0/2 + n^4/8k_0^3 - En^2/4k_0 + \\ & + k_0 E^2/8 + n^6 h^2/48k_0^2 + k_0^3 E^3 h^2/48 + O(E^3). \end{aligned} \quad (11)$$

Для прямых волн величина относительной ошибки  $\delta_{n+}$  в фазовом члене общего конечно-разностного решения (7) сравнительно с аналитическим



Фиг. 1. Горизонтальный разрез звукового поля на частоте 100 Гц в регулярном волноводе, вычисленный: 1 — по программе [1]; 2 — по программе [4]



Фиг. 2. Горизонтальный разрез звукового поля на частоте 100 Гц в нерегулярном по трассе волноводе, вычисленный: 1 — по программе [1]; 2 — по программе [5]

решением (6) определяется соотношением  $\delta_{n+} = |(\lambda_n - k_0 - \alpha_{n+})/k_0| = (h^2/48k_0^2) |n^6/k_0^3 + E^3 k_0^3|$ . Так, например, для первой нормальной волны, при  $E=10^{-2}$  и  $k_0 h=10$ , имеем  $\delta_{1+} \sim 2 \cdot 10^{-6}$ . Для обратных волн величина относительной ошибки  $\delta_{n-}$  определяется соотношением  $\delta_{n-} = |2/k_0 h^2 + (h^2/48k_0^2) (n^6/k_0^3 + E^3 k_0^3)|$  и для первой нормальной волны имеем  $\delta_{1-} \simeq 2 \cdot 10^{-2}$ .

Таким образом, применение разностного аналога преобразованного уравнения Гельмгольца для вычисления акустического поля позволяет использовать конечно-разностную сетку с большим шагом дискретизации по дальности. При этом прямые волны описываются с удовлетворительной точностью, а обратные — с неудовлетворительной точностью. Однако для слабо нерегулярных волноводов, где амплитуды обратных волн пренебрежимо малы, не вносятся существенных ошибок в общее решение (6). В том случае, когда необходимо учитывать обратные волны, шаг дискретизации сетки по дальности должен выбираться согласно условию  $k_0 h \ll 1$ .

Точность вычислений по программе, разработанной на основе метода конечных разностей [1], проиллюстрирована на фиг. 1 и 2 с помощью сравнения расчетов на основе метода нормальных волн [4] для регулярного волновода и на основе адиабатико-асимптотического приближения [5] для переменного по трассе волновода. При расчетах поля в регулярном волноводе использован профиль скоростей звука  $c_1(z)$  (см. табл. 1). В переменном по трассе волноводе изменение  $k^2(r, z)$  было задано согласно формуле

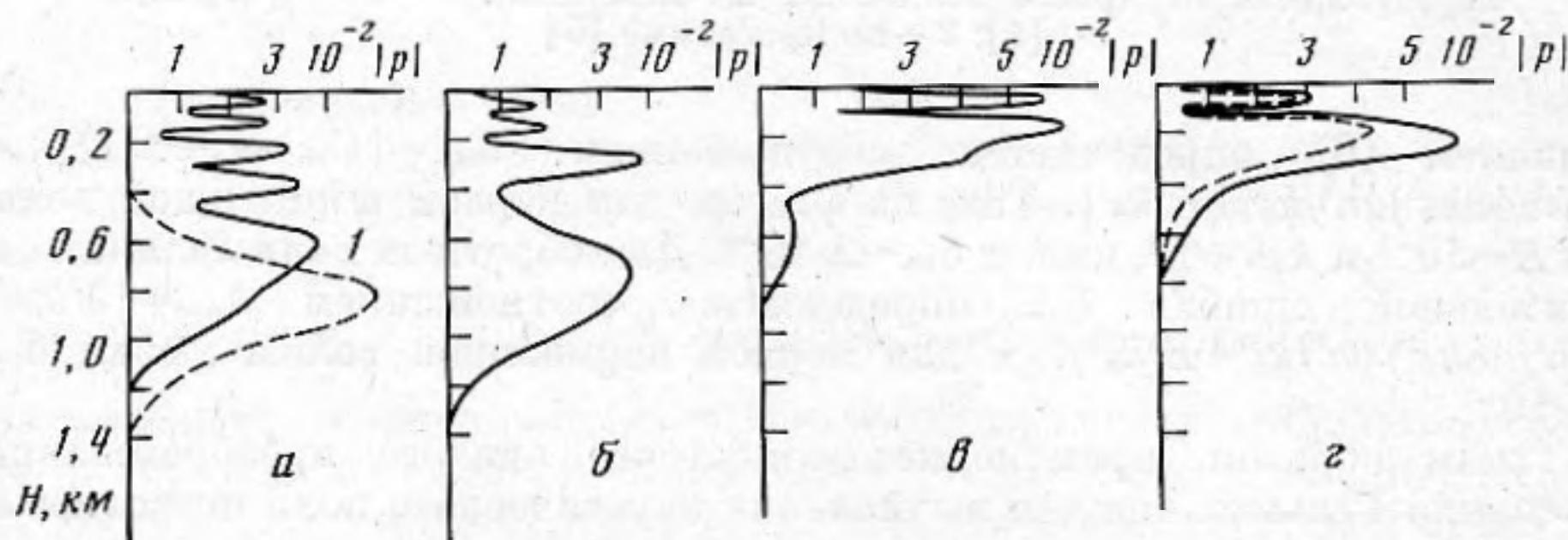
$$k^2(r, z) = \frac{k_1^2(z)(R_2 - r) + k_2^2(z)(r - R_1)}{R_2 - R_1}; \quad R_1 < r < R_2, \quad (12)$$

$z, \text{ м}$	$c_1(z), \text{ м/с}$	$c_2(z), \text{ м/с}$	$z, \text{ м}$	$c_1(z), \text{ м/с}$	$c_2(z), \text{ м/с}$
0	1491	1491	500	1472,5	1475
30	1485	1475	600	1473	1476
60	1480	1470	700	1475,5	1477
90	1469	1469	1000	1477,5	1478
120	1469,5	1470	1200	1479	1479
150	1470	1471	1500	1484	1484
200	1470,5	1472	2000	1490,5	1490
250	1471	1472,2	2500	1498,5	1498,5
300	1471,5	1473	3060	1506,5	1506,5
400	1472	1474			

Таблица 2

$z, \text{ м}$	$c_1(z), \text{ м/с}$	$c_2(z), \text{ м/с}$	$z, \text{ м}$	$c_1(z), \text{ м/с}$	$c_2(z)$
0	1515	1485	800	1478	1475
50	1505	1453	1000	1479	1477
100	1503	1451	1200	1480	1480
150	1501	1460	1400	1482	1482
200	1500	1465	1600	1484	1484
300	1495	1467	2000	1490	1490
400	1483	1470	2500	1505	1505
600	1480	1473	3060	1520	1520

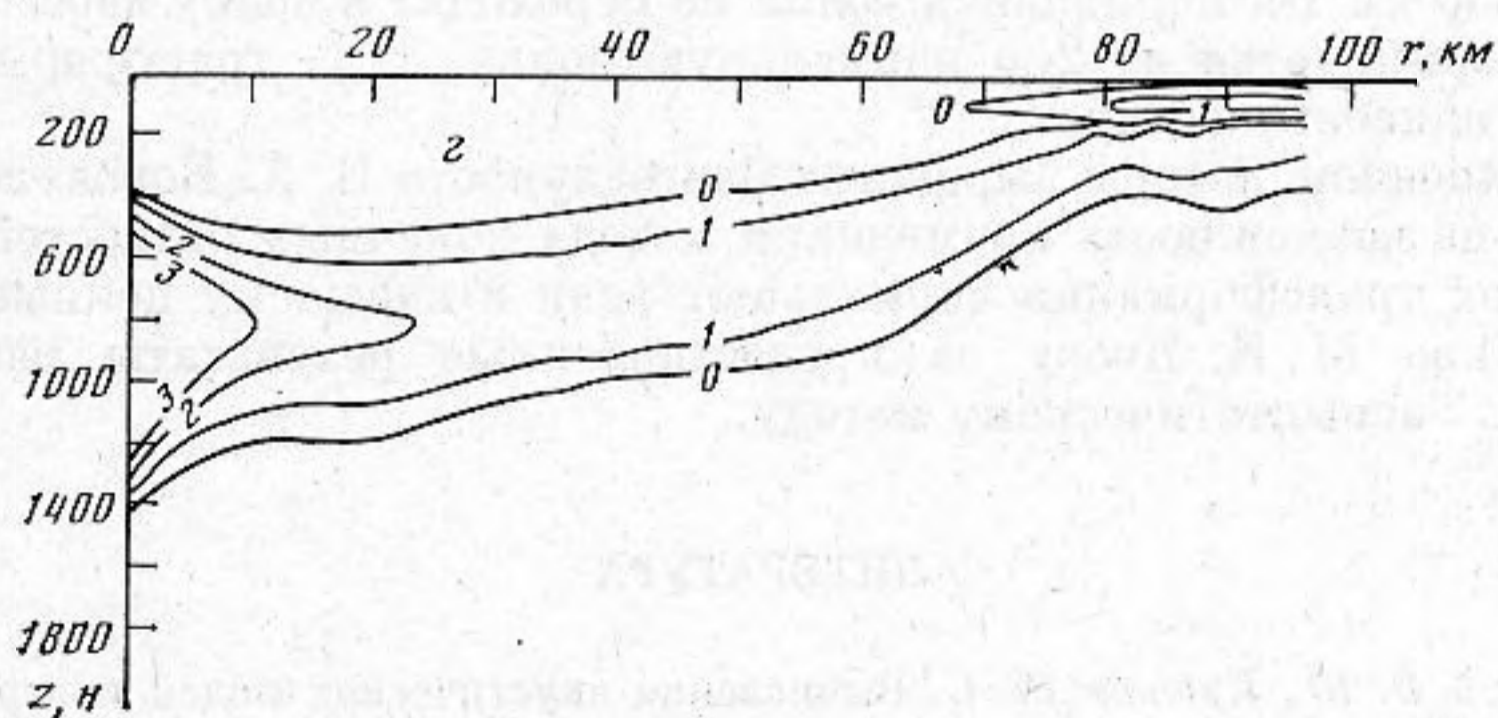
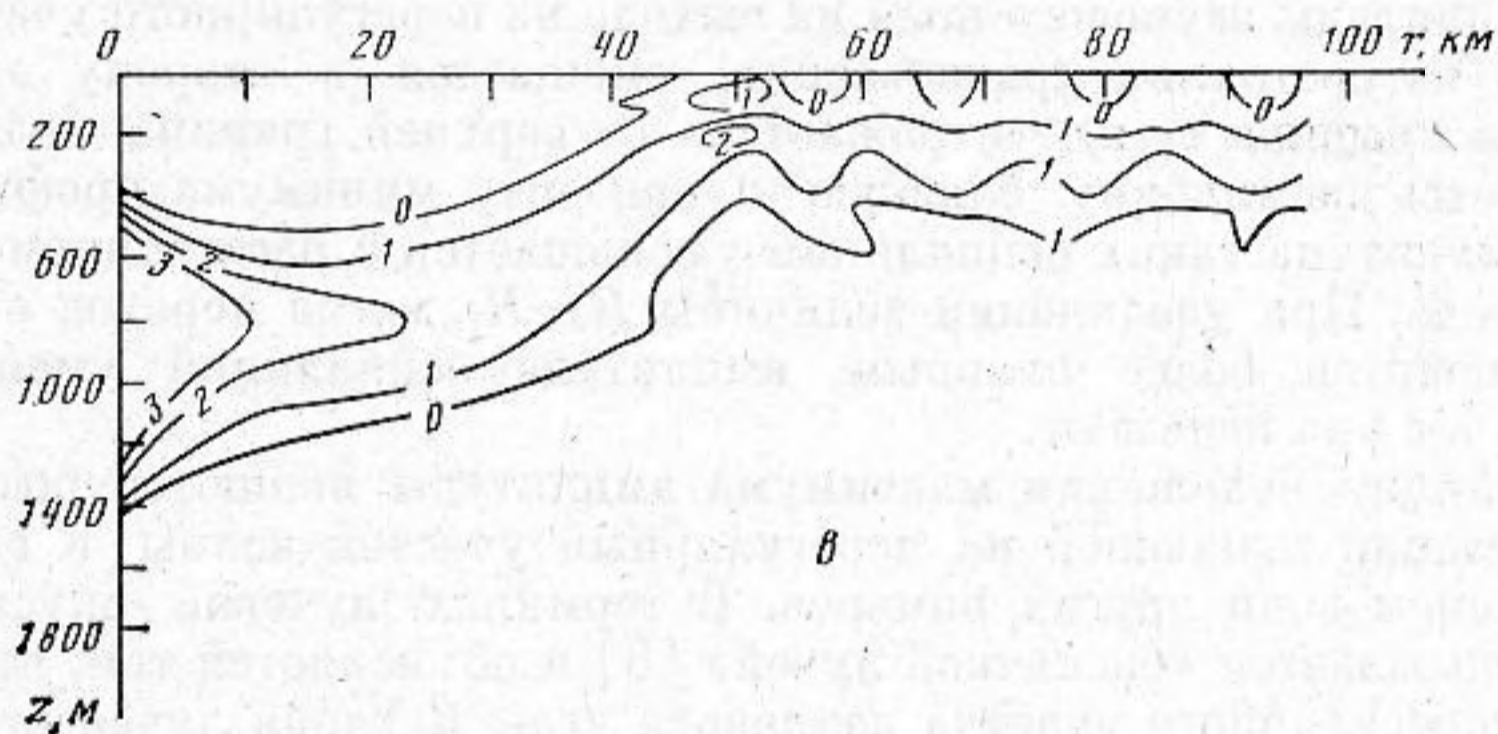
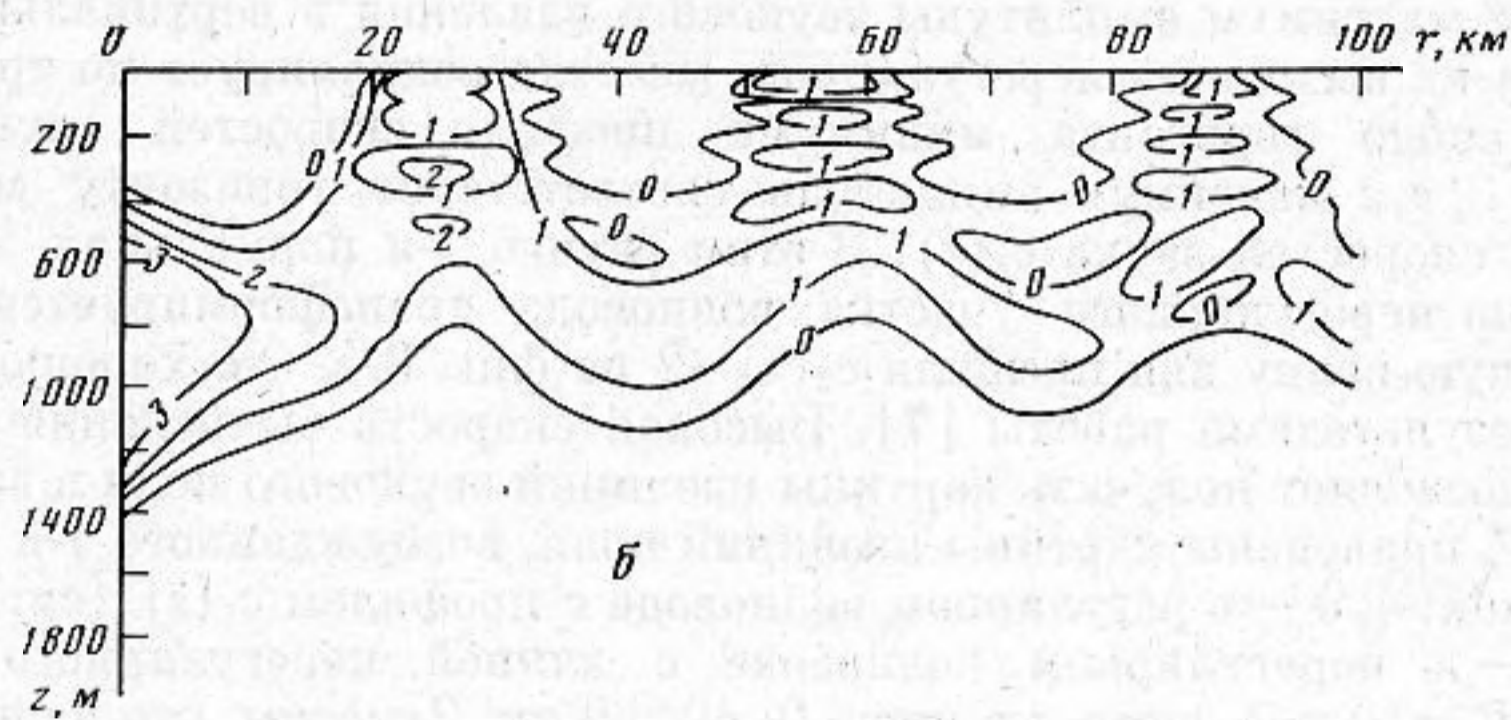
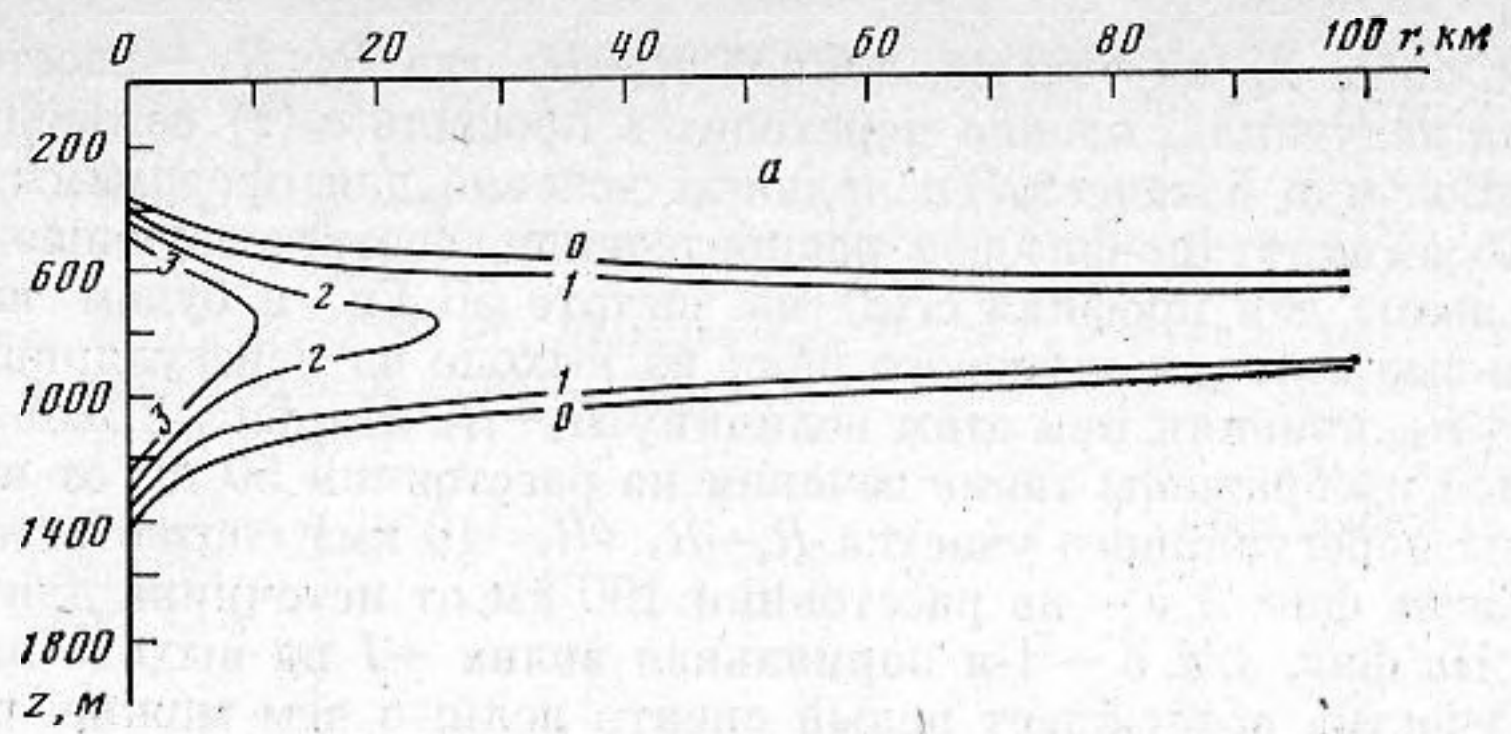
где  $k_1^2(z) = (2\pi f/c_1(z))^2$ ,  $r \leq R_2$ ;  $k_2^2(z) = (2\pi f/c_2(z))^2$ ,  $r \geq R_2$ ;  $R_1, R_2$  — фиксированные расстояния по трассе волновода. Профили скоростей звука  $c_1(z)$  и  $c_2(z)$  приведены в табл. 1. Частота излучения в обоих случаях  $f = 100$  Гц; глубина волновода  $H = 3,06$  км; глубины излучения и приема соответственно 0,1 и 0,3 км. Суммировалось  $\sim 30$  распространяющихся нормальных волн. На фиг. 1 интерференционные картины звукового поля практически полностью совпадают. Небольшой сдвиг в положениях зон



Фиг. 3. Трансформация 1-й нормальной волны при прохождении сигнала частотой 50 Гц через нерегулярный участок волновода при длине участка  $R_2 - R_1$  соответственно, км: а — 0; б — 10; в — 40; г — 80; 1 — профиль 1-й нормальной волны, соответствующей  $c_1(z)$ ; 2 — профиль 2-й нормальной волны, соответствующей  $c_2(z)$  (табл. 2)

интерференционных минимумов на фиг. 2 в случае переменного по трассе волновода, по-видимому, связан с различием в аппроксимации по глубине зависимости профиля скоростей звука между значениями гидрологических данных. Однако качественное совпадение интерференционных картин довольно хорошее.

Исследуем трансформацию нормальных волн на нерегулярном участке волновода. Если из левого регулярного участка волновода падает на нерегулярный участок  $R_1 < r < R_2$   $n$ -я нормальная волна, то она претерпевает фазовые и амплитудные искажения либо возбуждает целый спектр волн в правом регулярном участке волновода [6], т. е. трансформируется в зависимости от длины нерегулярного участка и характера изменения от  $k_1^2(z)$  к  $k_2^2(z)$ . Рассмотрим волновод, в котором профиль скоростей звука



Фиг. 4. Картины изолиний звукового поля, возбужденного 1-й нормальной волной на частоте 50 Гц: *a* — в регулярном волноводе с профилем  $c_1(z)$  (табл. 2); *б* — в волноводе с длиной нерегулярного участка  $R_2 - R_1 = 0$  км, *в* — в волноводе с длиной нерегулярного участка  $R_2 - R_1 = 40$  км; *г* — в волноводе с длиной нерегулярного участка  $R_2 - R_1 = 80$  км

$c_1(z)$  (см. табл. 2) на участке длиной  $R_2 - R_1$ , где  $R_1, R_2$  — расстояния от источника излучения, плавно переходит в профиль  $c_2(z)$  согласно формуле (12). Возьмем в качестве начальных условий для программы [1] вертикальное амплитудно-фазовое распределение, соответствующее 1-й нормальной волне для профиля  $c_1(z)$  на частоте 50 Гц, и будем вычислять вертикальные сечения звукового поля на выходе из нерегулярного участка  $R_1 < r < R_2$ , изменяя при этом величину  $R_2 - R_1$ . На фиг. 3, а, б, в сплошной линией изображены такие сечения на расстоянии 50 км от источника для длины нерегулярного участка  $R_2 - R_1$  ( $R_1 = 10$  км) соответственно 0, 10 и 40 км, а на фиг. 3, г — на расстоянии 100 км от источника для  $R_2 - R_1 = 80$  км. На фиг. 3, а, б — 1-я нормальная волна  $-1$  на выходе из нерегулярного участка возбуждает целый спектр волн, о чем можно предположить по наличию интерференции в вертикальном сечении звукового поля. При этом максимум амплитуды звукового давления в вертикальном сечении поля на выходе из нерегулярного участка осциллирует по трассе волновода около горизонта минимума профиля скоростей звука  $c_2(z)$ . На фиг. 3, в, г максимум амплитуды соответствует горизонту минимума профиля скоростей звука  $c_2(z)$ . В этом случае 1-я нормальная волна на выходе из нерегулярного участка волновода трансформируется во 2-ю нормальную волну для профиля  $c_2(z)$  — 2 на фиг. 3, г, что хорошо согласуется с результатами работы [7]. Высокая скорость вычисления программы [1] позволяет получать картины изолиний звукового поля в волноводе. На фиг. 4 приведены картины изолиний поля, возбужденного 1-й нормальной волной: 4, а — в регулярном волноводе с профилем  $c_1(z)$  (см. табл. 2); 4, б, в, г — в нерегулярном волноводе с длиной нерегулярного участка  $R_2 - R_1$  ( $R_1 = 10$  км) соответственно 0; 40; 80 км. Заметим, что в случае резкого изменения профиля скоростей звука, когда  $R_2 - R_1 = 0$  (фиг. 4, б), максимум амплитуды звукового поля на выходе из нерегулярного участка, выведенный из состояния «равновесия», смещается в сторону горизонта минимума профиля  $c_2(z)$ , «отражается» от верхней границы волновода и возвращается на глубину, близкую к горизонту минимума профиля  $c_1(z)$  и т. д. Амплитуда таких осцилляций уменьшается с расстоянием по трассе волновода. При увеличении величины  $R_2 - R_1$ , когда переход от  $c_1(z)$  к  $c_2(z)$  становится более плавным, амплитуда осцилляций уменьшается, а на фиг. 4, г они исчезают.

Осцилляции положения максимума амплитуды являются результатом трансформации падающей на нерегулярный участок волны и связаны с возбуждением волн других номеров. В терминах лучевой акустики это явление называется «раскачкой лучей» [6] и объясняется тем, что на выходе из нерегулярного участка волновода углы наклона лучей становятся непостоянными. Расчеты показали, что при  $R_2 - R_1 = 80$  км и даже при  $R_2 - R_1 = 300$  км 1-я нормальная волна не переходит в волну своего номера, а трансформируется во 2-ю нормальную волну, т. е. трансформация не является адиабатической.

В заключение авторы выражают благодарность В. А. Боровикову, указавшему на возможность применения метода конечных разностей для исследования трансформации нормальных волн и внесшему ценные замечания, а также М. И. Явору за предоставленные результаты расчета по адиабатико-асимптотическому методу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Завадский В. Ю., Крюков Ю. С. Вычисление акустических полей в нерегулярном океаническом подводном звуковом канале методом конечных разностей. — Акуст. журн., 1983, т. 29, № 6, с. 758–764.
2. Крюков Ю. С. Расчет дальнего распространения акустических сигналов в нерегулярном океаническом волноводе. — В сб.: Докл. Всесоюз. акуст. конф. Сек. А. М.: Акуст. ин-т, 1983, с. 53–56.
3. Завадский В. Ю. Метод конечных разностей в волновых задачах акустики. М.: Наука, 1982.
4. Вагин А. В., Мальцев Н. Е. Расчеты низкочастотных звуковых полей в слоистом океане. — Вопр. судостроения. Сер. Акустика, 1977, вып. 9, с. 61–80.

5. Булдырев В. С., Явор М. И. Асимптотические методы расчета звуковых полей в подводных волноводах на низких частотах.— Акуст. журн., 1982, т. 28, № 5, с. 601–606.
6. Боровиков В. А., Владимиров В. Ю. Сравнение двух методов оценки трансформации мод на неоднородном участке волновода.— Акуст. журн. 1981, т. 27, № 1, с. 56–69.
7. Вдовичева Н. К., Фикс Н. Ш., Шершевский И. А. Расчет характеристик звуковых полей в нерегулярных волноводах, модифицированных методом поперечных сечений.— Препринт ИПФ АН СССР, Горький, 1983, с. 24.

Акустический институт  
им. Н. Н. Андреева  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
20.XI.1984