

УДК 534.26

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ПЛАСТИНОЙ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ТОЛЩИНОЙ

Романов В. Н.

Решение задачи получено методом интегральных преобразований. Проанализировано влияние степени изменения толщины пластины на величину создаваемого ею акустического давления в жидкости.

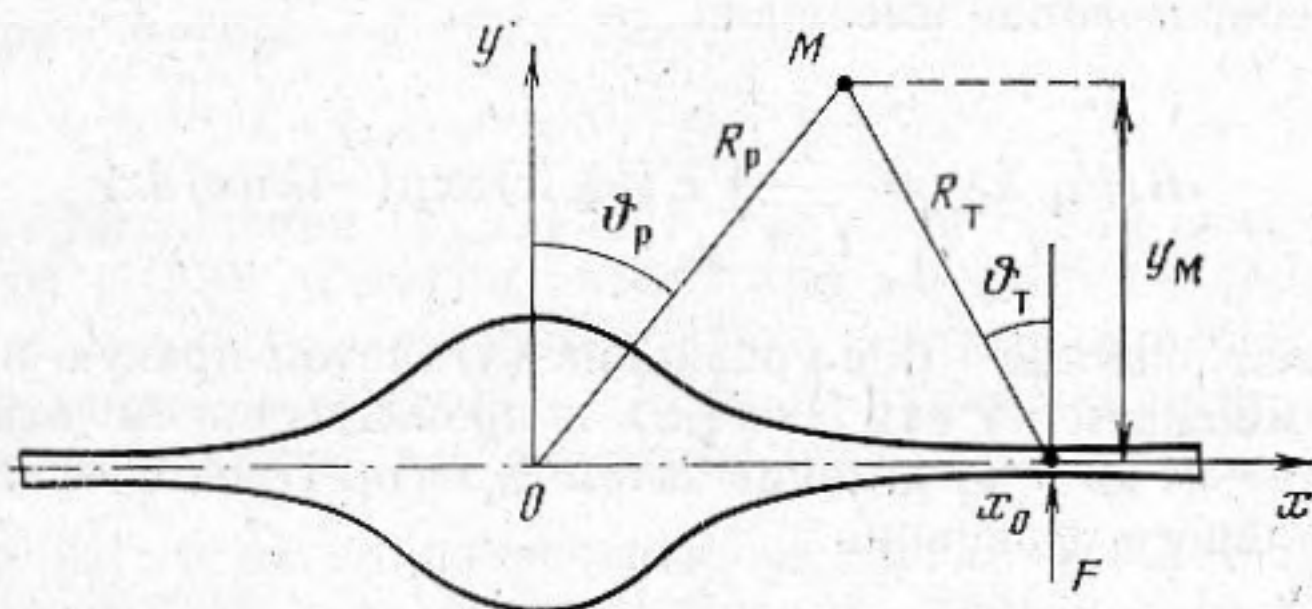
В ряде работ как отечественными, так и зарубежными исследователями были рассмотрены колебания стержней и пластин с изменяющейся толщиной [1-3]. На основании результатов этих работ можно составить дифференциальное уравнение колебаний пластины бесконечной длины с изменяющейся толщиной, находящейся в жидкости и возбуждающейся линейной силой $f_0 \exp(-i\omega t)$, приложенной в точке с координатой $x=x_0$ (фиг. 1). Экспоненциальный множитель в дальнейшем опускается.

При решении задачи будем полагать, что толщина пластины много меньше как длины изгибной волны, соответствующей этой толщине, так и длины волны в жидкости.

Тогда дифференциальное уравнение колебаний пластины имеет вид

$$l^3(x) \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial l^3(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w(x)}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 l^3(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} - \frac{\rho_1 h_1}{D_1} w^2 l(x) w(x) = [f_0 - P_1(x, 0) + P_2(x, 0)] / D_1, \quad (1)$$

где $w(x)$ — смещение нейтральной плоскости пластины, $l(x) = h(x)/h_1$, $h(x)$ — толщина пластины при координате x , h_1 — толщина тех частей



Фиг. 1. Система координат для пластины переменной толщины

пластины, где не происходит изменения ее сечения; D_1 — цилиндрическая жесткость этих частей пластины; ρ_1 — плотность материала пластины; $P_1(x, 0)$ и $P_2(x, 0)$ — звуковые давления, действующие на пластину со стороны верхнего и нижнего полупространств жидкости, $f_0 = F \cdot \delta(x - x_0)$.

Решение задачи должно удовлетворять уравнению Гельмгольца в жидкости и граничному условию при $y=0$:

$$w(x) = \frac{1}{\rho \omega^2} \frac{\partial P_1(x, 0)}{\partial y} = \frac{1}{\rho \omega^2} \frac{\partial P_2(x, 0)}{\partial y}, \quad (2)$$

где ρ — плотность жидкости.

Решение задачи представим в виде интеграла Фурье:

$$w(x) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(k\xi) \exp(ik\xi x) d\xi, \quad (3)$$

$$P_{1,2}(x, y) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}_{1,2}(k\xi) \exp(ik\xi x \pm ky\sqrt{\xi^2 - 1}) d\xi,$$

где k — волновое число в жидкости.

Подставляя соотношения (2) и (3) в уравнение (1), для определения трансформант смещения $\tilde{w}(k\xi)$ получаем следующее интегральное уравнение:

$$\frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(k\xi) E(k\xi, x) d\xi = F\delta(x - x_0)/D_1, \quad (4)$$

где $E(k\xi, x) = \exp(ik\xi x) [l^3(x) (ik\xi)^4 + 2(ik\xi)^3 \partial^3 l(x)/\partial x^3 + \partial^2 l^3(x)/\partial x^2 - k_u^4 l(x) - 2\rho\omega^2/(kD_1\sqrt{\xi^2 - 1})]$, при этом $k_u^4 = \omega^2 \rho_1 h_1 / D_1$.

В случае однородной пластины $l(x) = 1$, а все производные от $l(x)$, естественно, равны 0, тогда ядро интегрального уравнения (4) оказывается зависящим от координаты x только через функцию $\exp(ik\xi x)$. Применяя в этом случае обратное преобразование Фурье по координате x , находим сразу алгебраическое выражение, определяющее трансформанту перемещения нейтральной плоскости пластины $\tilde{w}(k\xi)$ [4].

В рассматриваемом случае ядро интегрального уравнения сложным образом зависит от координаты x через функцию $l(x)$ и ее производные. Применим к ядру интегрального уравнения преобразование Фурье по координате x :

$$E(k\xi, x) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} B(k\eta, k\xi) \exp(ik\eta x) d\eta. \quad (5)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$B(k\eta, k\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(k\xi, x) \exp(-ik\eta x) dx.$$

Подставим соотношение (5) в уравнение (4), затем правую и левую части уравнения умножаем на $\exp(-ik\xi_1 x)$ и проинтегрируем эти части по x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, заменив затем ξ_1 на η . Приходим к следующему виду интегрального уравнения:

$$\tilde{w}(k\xi) - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{2b_0\beta^3} \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(k\eta) B_1(k\xi, k\eta) d\eta = \frac{F}{\sqrt{2\pi} 2k\rho c^2} \sqrt{\xi^2 - 1} \exp(ik\xi x_0), \quad (6)$$

где

$$B_1(k\xi, k\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[ikx(\eta - \xi)] \left[\eta^4 l^3(x) - 2i\eta^3 \frac{\partial l^3(x)}{k\partial x^3} - \frac{\eta^2 \partial^2 l^3(x)}{k^2 \partial x^2} - \beta^2 l(x) \right] dx. \quad (7)$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\beta = k_u^2/k^2$; $b_0\beta = \rho c / (\omega\rho_1 h_1)$; ρc — волновое сопротивление жидкости.

Таким образом, для нахождения трансформанты $\tilde{w}(k\xi)$ необходимо вначале найти ядро интегрального уравнения, вычислив интеграл (7), а затем уже решить интегральное уравнение (6).

Ядро интегрального уравнения зависит, естественно, от вида функции, описывающей зависимость изменения толщины пластины от координаты x .

Зададимся изменением толщины пластины в виде $h(x) = h_1 + d/(x^2 + a)$, где d и a — некоторые коэффициенты. Эта функция характеризует «приполнение» толщины пластины вблизи начала координат (см. фиг. 1). Тогда

$$l(x) = \frac{h(x)}{h_1} = 1 + \frac{b}{x^2 + a}; \quad b = \frac{d}{h_1}; \quad l^3(x) = \frac{(x^2 + a + b)^3}{(x^2 + a)^3};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} l^3(x) = \frac{-6bx(x^2 + a + b)^2}{(x^2 + a)^4}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} l^3(x) = \frac{6b(3x^4 + 2ax^2 + 7bx^2 - a^2 - ba)(x^2 + a + b)}{(x^2 + a)^5}.$$

Выражения (8) имеют полюса вплоть до 5-го порядка, расположенные на мнимой оси.

Подставляя выражения (8) в соотношение (7) и используя метод вычетов, можно получить выражение для $B_1(k\xi, k\eta)$ в аналитическом виде. Подставляя затем полученное выражение для $B_1(k\xi, k\eta)$ в соотношение (6), можно привести его к следующей форме записи:

$$\tilde{w}(k\xi) + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\Delta(\xi)} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(k\eta) K(\xi, \eta) d\eta = f(\xi), \quad (9)$$

где $\Delta(\xi) = (\xi^4 - \beta^2)\sqrt{\xi^2 - 1} - 2b_0\beta^3$,

$$f(\xi) = \frac{Fb_0\beta^3\sqrt{\xi^2 - 1}}{\Delta(\xi)\sqrt{2\pi}rc^2k} \exp(-ik\xi x_0).$$

Ядро $K(\xi, \eta)$ имеют хотя и простой, но достаточно громоздкий вид. Введем обозначения: $\delta = k\sqrt{b}$ и $\alpha = k\sqrt{a}$. При этом

$$l(x) = 1 + \delta^2 / [(kx)^2 + \alpha^2]. \quad (10)$$

Из анализа выражения (9) следует, что наибольший вклад в величину трансформанты $\tilde{w}(k\xi)$ интеграл вносит при экстремуме функции $\Delta(\xi)$, которая определяет полюса на нашем листе римановой поверхности в случае пластины постоянной толщины. Эта функция достигает экстремума для распространяющихся по пластине изгибных волн в полюсе $q_1 \approx \sqrt[4]{\beta\sqrt{1 + 2b_0\sqrt{\beta}}}$ [4], а величина экстремума ограничивается наличием коэффициента потерь $\eta_{пл}$ в материале пластины. Введем потери через комплексный модуль Юнга $E = E_0(1 - i\eta_{пл})$, тогда величину полюса на вещественной оси можно представить в виде комплексного числа $q_1 = q_1(1 + i\eta_{пл}/4)$, аналогично комплексным числом станет и коэффициент β в выражении (9).

При $\xi > q_1$ функция $1/\Delta(\xi)$ очень быстро уменьшается, поэтому при решении интегрального уравнения (9) достаточно ограничиться максимальным значением $|\xi|$, не превышающим $2q_1$.

В связи с тем обстоятельством, что ядро $K(\xi, \eta)$ пропорционально $\exp(-\alpha|\eta - \xi|)$, то на максимальные значения $|\eta|$ накладываем те же ограничения, что и на максимальные значения $|\xi|$.

Интегральное уравнение (9) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, которое решаем методом замены интеграла конечной суммой, используя квадратурную формулу прямоугольников [6]. Приходим к следующей системе алгебраических уравнений, которую не-

обходимо решить для отыскания приближенных значений w_i решения $\tilde{w}(k\xi)$ в узлах $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$:

$$w_i + \frac{\sqrt{\xi_i^2 - 1}}{\Delta(\xi_i)} \sum_{j=1}^n w_j K_{ij} \Delta \xi = f_i, \quad (11)$$

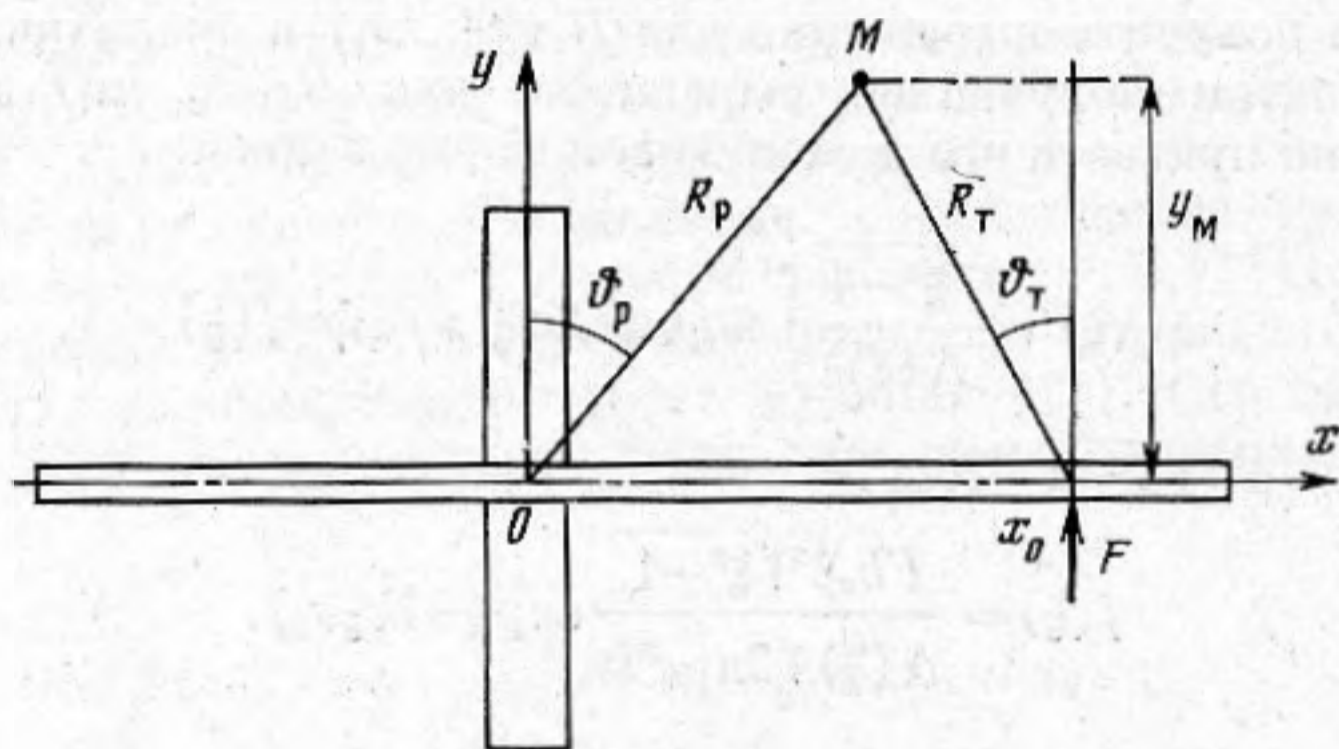
где

$$f_i = f(\xi_i) = \frac{F b_0 \beta^3}{\Delta(\xi_i)} \frac{\sqrt{\xi_i^2 - 1}}{\sqrt{2\pi} \rho c^2 k} \exp(-ik\xi_i x_0); \quad K_{ij} = K(\xi_i, \xi_j).$$

Решив на ЭВМ систему (11), найдем значения w_1, w_2, \dots, w_n , по которым процессом интерполяции получим приближенное решение интегрального уравнения (9) на всем отрезке $(-2q_1; 2q_1)$. За аналитическое выражение приближенного решения уравнения (9) можно принять функцию [6]

$$\tilde{w}(\xi) = f(\xi) - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\Delta(\xi)} \sum_{j=1}^n w_j K(\xi, \xi_j) \Delta \xi. \quad (12)$$

Шаг между соседними значениями ξ_j и ξ_{j+1} выбирается из условия, чтобы этот шаг не превышал ширину экстремума функции $\Delta(\xi_i)$. При этом условии $\Delta \xi = \eta_{пл} q_1 / 2$.



Фиг. 2. Система координат для пластины постоянной толщины с эквивалентным ребром

Используя выражение (12), соотношение (2) и метод перевала, найдем выражение для акустического давления, создаваемого пластиной в верхнем полупространстве на частотах, соответствующих $\beta > 1$:

$$P_1 = -\frac{k^2 \rho c^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(k\xi) \exp(ik\xi x - \sqrt{\xi^2 - 1} ky) / \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi = P_{1T} + P_{1P}, \quad (13)$$

где

$$P_{1T} = \frac{kF \cos \vartheta_T}{2\sqrt{2\pi} k R_T} \frac{\exp(ikR_T - i\pi/4)}{[1 - i \cos \vartheta_T (1 - \sin^4 \vartheta_T / \beta^2) / (b_0 \beta)]};$$

$$P_{1P} = \frac{kF \cos \vartheta_P}{2\sqrt{2\pi} k R_P} \frac{\exp(ikR_P - i\pi/4) \kappa_P}{[1 - i \cos \vartheta_P (1 - \sin^4 \vartheta_P / \beta^2) / (b_0 \beta)]}$$

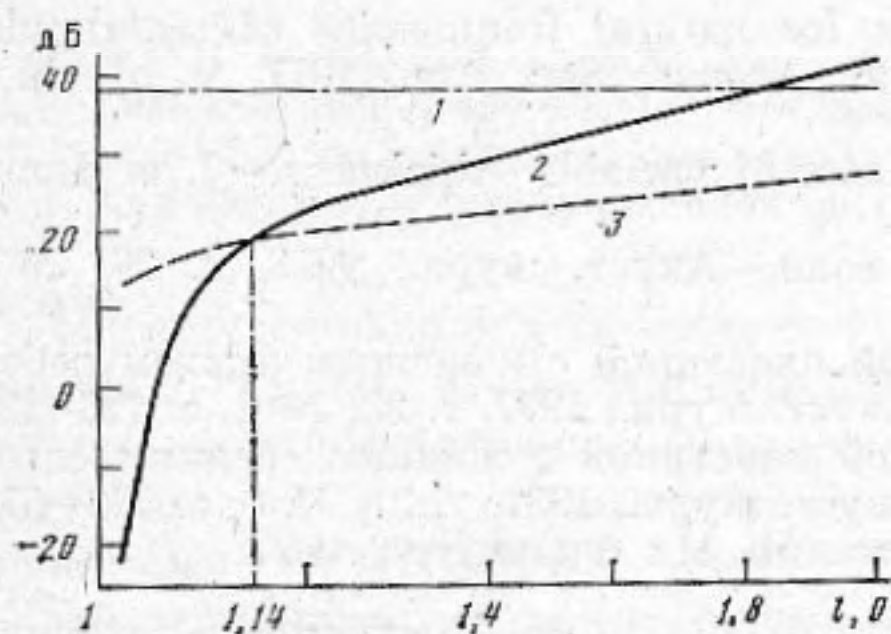
$$\kappa_P = \sum_{j=1}^N w_j K(\xi_{пер}, \xi_j) \Delta \xi.$$

Выражение P_{1T} определяет величину давления, создаваемого в жидкости бесконечной пластиной постоянной толщины, возбуждаемой линейной

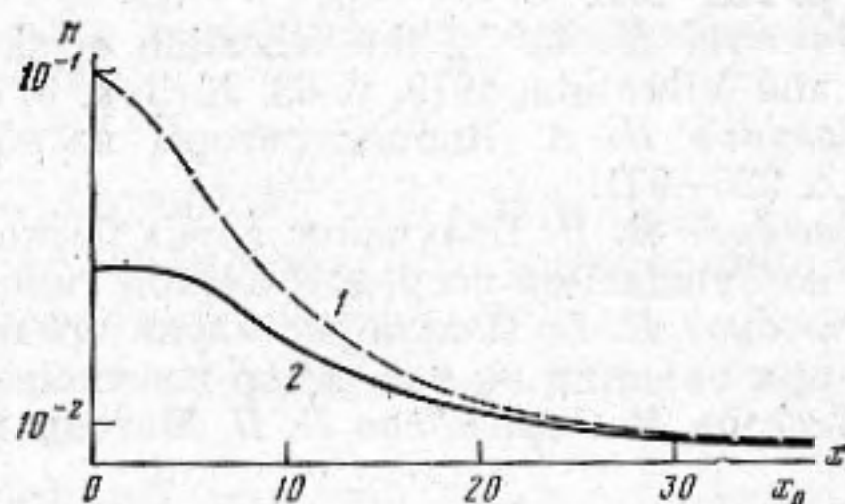
силой [5], а P_{1p} — давление, создаваемое в жидкости за счет «приполнения» пластины вблизи начала координат, величины ϑ_t , ϑ_p , R_t , R_p показаны на фиг. 1. Значение ξ в точке перевала определяется соотношением $\xi_{пер} = \sin \vartheta_p$.

Если точка наблюдения расположена над приполнением пластины (т. е. $x=0$), то $\vartheta_p=0$ и $\xi_{пер}=0$.

Для последующего анализа целесообразно сопоставить вклад в излучение звука пластиной за счет приполнения ее толщины с вкладом в излучение звука той же пластины за счет наличия на ней ребра, масса



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Сопоставление уровней звукового давления, создаваемого в жидкости пластинами переменной и постоянной толщин. 1 — уровень звукового давления, создаваемого однородной пластиной постоянной толщины по линии действия силы; 2 — уровень звукового давления, создаваемого пластиной переменной толщины, в зависимости от величины приполнения $l(0) = h(0)/h_1$ (см. соотношение (10)); 3 — уровень звукового давления, создаваемого пластиной постоянной толщины с эквивалентным сосредоточенным ребром жесткости

Фиг. 4. Относительное изменение толщины пластин в зависимости от координаты x (1 — при $l(0)=1,2$; 2 — при $l(0)=1,1$)

которого равна «массе приполненной части пластины» (фиг. 2). Это излучение звука может быть определено по формулам, аналогичным тем, которые приведены в работах [4–5].

На рис. 3 представлены результаты расчета, усредненные в $1/3$ октавной полосе частот, отношений величин давлений, создаваемых пластиной в жидкости, к величине действующей на пластину силы (в дБ отн. $1/\text{м}^2$) при следующих параметрах задачи: $\beta=18,5$, $b_0=0,37$, $kh_1=0,08$, $kx_0=1,5$, $ky_M=1$. При этом принималось

$$\alpha^2 = k^2 x_0^2 \cdot 10^{-2} / [l(0) - 0,99]; \quad \delta^2 = \alpha^2 [l(0) - 1].$$

Вклад в излучение звука за счет приполнения пластины при малых величинах этого приполнения $l(0) < 1,14$ (см. фиг. 3) не превышает вклада в излучение звука эквивалентного по массе сосредоточенного ребра жесткости и при уменьшении «приполнения» это излучение звука существенно падает.

Однако при приполнениях пластины, для которых $l(0) > 1,14$, вклад в излучение звука увеличивается по сравнению с вкладом сосредоточенного ребра той же массы. Граничная величина $l(0)$ находится между $l(0)=1,1$ и $l(0)=1,2$.

Для используемых параметров задачи на фиг. 4 построены относительные изменения толщины пластины $n = [h(0) - h_1] / 2h_1$ при $x \geq 0$ по одну сторону от нейтральной плоскости пластины, соответствующие $l(0)=1,1$ и $l(0)=1,2$. При $l(0)=1,2$ имеет место более «резкое» изменение поперечного сечения пластины, чем при $l(0)=1,1$, что приводит к существенному изменению как амплитуды, так и волновых чисел изгибных волн в месте расположения приполнения на пластине. При этом на частотах, соответствующих $\beta > 1$, отсутствует полная компенсация излучения звука от изгибных полуволн, имеющая место для однородных по толщине пластин. Чем более резко изменяется поперечное сечение (например, $l(0)=1,2$),

тем менее эффективно происходит указанная выше компенсация и тем более значителен вклад в излучение звука пластиной за счет ее приполнения по сравнению с вкладом за счет наличия на пластине сосредоточенного ребра равной массы.

Из полученных результатов следует вывод, что «плавное» согласование толщины пластины с высотой ребра, как правило, в практически важных случаях не приводит к уменьшению величины звукового давления, обусловленного наличием ребра на пластине.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sacata T., Sacata Y.* Approximate formulas for natural frequencies of rectangular plates with linearly varying thickness.— *J. Acoust. Soc. Am.*, 1977, v. 61, № 4, p. 982–985.
2. *Banerjee M. M.* On the vibration of skew plates of variable thickness.— *J. of Sound and Vibration*, 1979, v. 63, № 3, p. 377–383.
3. *Сазонов И. А.* Концентраторы изгибных волн.— *Акуст. журн.*, 1978, т. 26, № 6, с. 925–931.
4. *Романов В. Н.* Излучение звука бесконечной пластиной с конечным числом ребер, возбуждаемой сосредоточенной силой.— *Акуст. журн.*, 1977, т. 23, № 2, с. 116–125.
5. *Романов В. Н.* Излучение звука трехслойной пластиной с жидким средним слоем при наличии на ней ребер жесткости.— *Акуст. журн.*, 1981, т. 27, № 4, с. 573–579.
6. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. М.: Физматгиз, 1960.

Поступила в редакцию
4.XII.1984