

УДК 534

РАСЧЕТ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН С ПОМОЩЬЮ  
МЕТОДОВ ПОТЕНЦИАЛА*Ковинская С. И., Никифоров А. С.*

Получены интегральные соотношения для изгибных колебаний пластин с натяжением, изгибных колебаний трехслойных пластин и пластин на упругом основании.

Развитие средств вычислительной математики привело к появлению новых расчетных методов, одним из которых является метод граничных интегральных уравнений, развитый на основе классического метода потенциала. В последние годы в этом направлении опубликован ряд работ по задачам изгибных колебаний пластин в вакууме [1-3] и в акустической среде [4].

В настоящей работе граничные интегральные уравнения получены для изгибных колебаний пластин с натяжением, пластин на винклеровском упругом основании и трехслойных пластин.

Одним из возможных интегральных представлений при изгибных колебаниях пластины является представление в виде:

$$w(R) = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \Delta w}{\partial n} w_0 - \frac{\partial w_0}{\partial n} \Delta w + \Delta w_0 \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial \Delta w_0}{\partial n} w \right] d\Gamma + \int_S \int f w_0 dS, \quad (1)$$

где  $S$  — область колебаний пластины с гладким контуром  $\Gamma$ ,  $f$  — распределение возбуждающей силы,  $w(R)$  — поперечное перемещение пластины в точке  $R \in S$ ,

$$w_0(P) = \frac{1}{8Dk^2} \left[ H_0^{(1)}(kP) + \frac{2i}{\pi} K_0(kP) \right], \quad (2)$$

— перемещение бесконечной пластины под действием сосредоточенной силы в точке  $P=0$ ;  $H_0^{(1)}(kP)$  и  $K_0(kP)$  цилиндрические функции,  $D$  и  $k$  — жесткость и волновое число изгибных колебаний пластины.

В формуле (1)  $\Delta w(P) = -\frac{1}{8D} \left[ H_0^{(1)}(kP) - \frac{2i}{\pi} K_0(kP) \right]$  и представляет

собой инвариант относительно преобразований координат, равный

$$\Delta w = -\frac{1}{D(1+\nu)} (M_{nn} + M_{ss}), \quad (3)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона, а  $M_{nn}$  и  $M_{ss}$  — нормальный и касательный моменты. Производная  $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$  — перерезывающая сила. Аналогично рас-

смотренному в работе [3] представлению в формуле (1) первый член представляет собой вклад монопольных источников вида (2) с плотностью распределения, равной величине перерезывающей силы в рассматриваемой граничной задаче, второй член дает дипольное излучение с плотностью, пропорциональной сумме нормального и касательного моментов задачи, третий член — слой квадрупольных источников (3) с плотностью, равной углу наклона на границе  $\Gamma$  пластины и, наконец, последний член — двойной слой квадруполь (октиполей) с плотностью, равной заданному на границе  $\Gamma$  перемещению  $w(P)$ .

Из необходимых для вычисления по формуле (1) плотностей распределений в корректно поставленной задаче может быть известно лишь два значения, например  $w(P)|_{r=0}$  и  $\left. \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0$ . Для нахождения двух оставшихся неизвестными функций необходимо получить дополнительное уравнение путем дифференцирования (1) либо так, как это сделано в [3]; затем устремить точку  $R$  к границе  $\Gamma$  и получить два граничных интегральных уравнения. Дифференциальное уравнение для колебаний пластины, подвергнутой натяжению  $T$ , имеет вид:

$$(\Delta^2 - k^4)w(r) + \frac{T}{D}\Delta w(r) = f. \quad (4)$$

Для радиального натяжения с действующей в точке  $r=0$  силы в случае бесконечной пластины решение (4), представляющее собой поле монополюсного источника, имеет вид

$$w_0(r) = \frac{1}{8Dk^2} \left[ H_0^{(1)}(k_1 r) + \frac{2i}{\pi} K_0(k_2 r) \right], \text{ где}$$

$$k_1 = i \sqrt{\frac{T + \sqrt{T^2 + 4Dm\omega^2}}{2D}}; \quad k_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{T^2 + 4Dm\omega^2} - T}{2D}}. \quad (5)$$

Получение интегрального уравнения, основанное на методе, изложенном в [3], сводится к умножению уравнения (4) на функцию Грина (5) и умножению соответствующего (5) дифференциального уравнения с особенностью в правой части на  $w(r)$ , интегрированию по  $S$  каждого и вычитанию одного из другого, затем применению второй формулы Грина в виде

$$\iint_S (\Delta\psi v - \psi\Delta v) dS = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial\psi}{\partial n} v - \psi \frac{\partial v}{\partial n'} \right) d\Gamma, \quad (6)$$

где в качестве пары функций  $(\psi, v)$  берется  $(\Delta w, w_0)$ ,  $(\Delta w_0, w)$  и  $(w, w_0)$  соответственно. При этом предполагается, что необходимая для удовлетворения уравнения (6) непрерывность производных рассматриваемых функций имеется. Выполнение вышеуказанных процедур дает следующее представление для поперечного перемещения  $w(R)$  пластины под натяжением:

$$w(R) = \int_{\Gamma} \left[ w_0 \frac{\partial}{\partial n} \left( \Delta + \frac{T}{D} \right) w - \frac{\partial w_0}{\partial n} \left( \Delta + \frac{T}{D} \right) w + \right. \\ \left. + \Delta w_0 \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial \Delta w_0}{\partial n} w \right] d\Gamma + \iint_S f w_0 dS, \quad (7a)$$

перестановка членов с множителем  $\frac{T}{D}$  дает:

$$w(R) = \int_{\Gamma} \left[ w_0 \frac{\partial \Delta w}{\partial n} - \frac{\partial w_0}{\partial n} \Delta w + \frac{\partial w}{\partial n} \left( \Delta + \frac{T}{D} \right) w_0 - w \left( \frac{\partial \Delta}{\partial n} + \frac{T}{D} \right) w_0 \right] d\Gamma + \\ + \iint_S f w_0 dS, \quad (7b)$$

и, наконец,

$$w(R) = \int_{\Gamma} \left[ w_0 \frac{\partial \Delta w}{\partial n} - \frac{\partial w_0}{\partial n} \left( \Delta + \frac{T}{D} \right) w + \frac{\partial w}{\partial n} \left( \Delta + \frac{T}{D} \right) w_0 - w \frac{\partial \Delta w_0}{\partial n} \right] d\Gamma + \\ + \iint_S f w_0 dS. \quad (7b)$$

Первые два из приведенных равенств не являются симметричными. При этом в выражении (7а) четыре типа граничных источников остаются теми же, что и для пластины без натяжения, плотность же источников изменилась: у монополей плотность распределения пропорциональна сумме силы и произведения натяжения на угол наклона; у диполей к сумме моментов, представляющих плотность их граничного распределения, следует добавить перемещение с коэффициентом пропорциональности, равным  $T/D$ . Физически увеличение силы на границе, пропорциональное натяжению и углу наклона; а моментов — пропорциональное перемещению и натяжению — очевидно.

Для изгибных колебаний пластины на винклеровском основании упругости  $\alpha$  уравнение колебаний и решение его в случае сосредоточенной силы имеет вид

$$w_0^* = \frac{1}{8D\sqrt{k^4 - \alpha}} \left[ H_0^{(1)}(\sqrt{k^4 - \alpha} r) + \frac{2i}{\pi} K_0(\sqrt{k^4 - \alpha} r) \right].$$

Соответствующее интегральное соотношение можно получить из выражения (1) путем замены  $k$  на  $\sqrt{k^4 - \alpha}$  и  $w_0$  на  $w_0^*$ . Колебания трехслойной пластины с упругим внутренним слоем описываются системой уравнений [5]:

$$\begin{cases} \Delta^2 w - k_1^4 w = -\frac{G}{D_1} \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=\frac{h}{2}}, \\ \Delta^2 u - k_2^4 u = -\frac{G}{D_2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=-\frac{h}{2}}, \\ \frac{d^2 \psi}{dy^2} + k_n^2 \psi = 0 \end{cases} \quad (8a)$$

где  $D_i$ ,  $k_i$  — жесткость и волновое число  $i$ -й пластины ( $i=1, 2$ ),  $k_n$  — волновое число продольных колебаний среднего слоя,  $G$  — модуль упругости слоя. Система (8а) рассматривается при граничных условиях контакта (первая пластина расположена при  $y=h/2$ , вторая —  $y=-h/2$ , толщина упругого слоя  $h$ ):

$$\psi \Big|_{y=\frac{h}{2}} = w; \quad \psi \Big|_{y=-\frac{h}{2}} = u.$$

Из третьего уравнения системы и граничных условий нетрудно получить выражение для  $\psi$  через значения  $w$  и  $u$ , затем можно исключить  $\psi$  из первых двух уравнений системы, в результате имеем

$$\begin{cases} \Delta^2 w - k_1^4 w = -\frac{Gk_n}{D_1} \left[ w \frac{\cos k_n h}{\sin k_n h} - u \frac{1}{\sin k_n h} \right], \\ \Delta^2 u - k_2^4 u = -\frac{Gk_n}{D_2} \left[ w \frac{1}{\sin k_n h} - u \frac{\cos k_n h}{\sin k_n h} \right]. \end{cases} \quad (8б)$$

Обозначив

$$\gamma_1 = k_1^4 - \frac{Gk_n}{D_1} \frac{1}{\operatorname{tg} k_n h}; \quad \gamma_2 = k_2^4 - \frac{Gk_n}{D_2} \frac{1}{\operatorname{tg} k_n h}$$

и подействовав на первое уравнение системы (8б) оператором  $L_1 = \Delta^2 - \gamma_2$ , а на второе  $L_2 = Gk_n/D_1 \sin k_n h$  и вычтя одно из другого, систему (8б) можно свести к уравнению для  $w$ :

$$\left[ \Delta^4 - \Delta^2(\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_1 \gamma_2 - \frac{G^2 k_n^2}{D_1 D_2 \sin^2 k_n h} \right] w = 0. \quad (9)$$

На основе свойств корней квадратного уравнения не представляет труда нахождение корней дисперсионного уравнения, соответствующего урав-

нению (9):

$$a_{1,2} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 \pm \sqrt{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + 4 \left( \frac{Gk_n}{\sin k_n h} \right)^2 \frac{1}{D_1 D_2}}}{2},$$

что позволяет представить (9) в виде  $(\Delta^2 - a_1)(\Delta^2 - a_2)w = 0$ . Обозначив  $(\Delta^2 - a_2)w = \Phi$  и используя функцию  $\chi$ , удовлетворяющую уравнению  $(\Delta^2 - a_1)\chi = \frac{\delta(r)}{2\pi r}$ , можно аналогично предыдущему получить

$$\Phi = \iint (\Delta^2 \Phi \chi - \Delta^2 \chi \Phi) dS. \quad (10)$$

Заменяя

$$\Phi = (a_1 - \gamma_2)w + \frac{Gk_n u}{D_1 \sin k_n h}$$

и, используя вторую формулу Грина, уравнение (10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} (\Delta^2 - a_2)w = \int_{\Gamma} \left\{ (a_1 - \gamma_2) \left[ \frac{\partial \Delta w}{\partial n} \chi - \frac{\partial \chi}{\partial n} \Delta w + \frac{\partial w}{\partial n} \Delta \chi - \frac{\partial \Delta \chi}{\partial n} w \right] + \right. \\ \left. + \frac{Gk_n}{D_1} \frac{1}{\sin k_n h} \left[ \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \chi - \frac{\partial \chi}{\partial n} \Delta u + \frac{\partial u}{\partial n} \Delta \chi - \frac{\partial \Delta \chi}{\partial n} u \right] \right\} d\Gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично используя решение уравнения  $(\Delta^2 - a_2)\theta = \delta(r)/2\pi r$ , можно получить вторую интегральную формулу:

$$\begin{aligned} (\Delta^2 - a_1)w = \int_{\Gamma} \left\{ (a_2 - \gamma_2) \left[ \frac{\partial \Delta w}{\partial n} \theta - \frac{\partial \theta}{\partial n} \Delta w + \frac{\partial w}{\partial n} \Delta \theta - \frac{\partial \Delta \theta}{\partial n} w \right] + \right. \\ \left. + \frac{Gk_n}{D_1 \sin k_n h} \left[ \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \theta - \frac{\partial \theta}{\partial n} \Delta u + \frac{\partial u}{\partial n} \Delta \theta - \frac{\partial \Delta \theta}{\partial n} u \right] \right\} d\Gamma. \end{aligned} \quad (12)$$

Вычитая из уравнения (11) уравнение (12), будем иметь искомое интегральное соотношение

$$(a_1 - a_2)w = \int_{\Gamma} \left[ (a_1 - \gamma_2) L(w, \chi) - (a_2 - \gamma_2) L(w, \theta) + \frac{Gk_n}{D_1 \sin k_n h} L(u, \chi - \theta) \right] d\Gamma, \quad (13)$$

где обозначено:

$$L(x, y) = \frac{\partial \Delta x}{\partial n} y - \frac{\partial y}{\partial n} \Delta x + \frac{\partial x}{\partial n} \Delta y - \frac{\partial \Delta y}{\partial n} x. \quad (14)$$

Заметим, что второе граничное уравнение может быть получено путем сложения уравнений (11) и (12) с соответствующими множителями, а физический смысл каждого слагаемого в (14) описан выше.

Таким образом, поле изгибных волн в одной из пластин трехслойной конструкции представляет собой сумму вкладов четырех источников (монополь, диполь, квадруполь и октиполь) с соответствующими плотностями, определяемыми граничными значениями перемещений сил, углов поворота и моментов. При этом указанная сумма состоит из источников с двумя постоянными распространения ( $a_1$  и  $a_2$ ) и граничными значениями, взятыми по рассматриваемой пластине (первые два члена в (13)), а также влияние присоединенной пластины и ее граничных значений с источниками, каждый из которых представляет собой разность соответствующих источников (монопольного и т. д.) с волновыми числами  $a_1$  и  $a_2$  (третий член в (13)).

Использование формулы (13) и аналогичной ей позволяет свести решение задачи о колебаниях трехслойных пластин к системе граничных

интегральных уравнений по заданным на каждой из пластин граничным условиям и известным источникам и позволяет понижать размерность задачи, подлежащей расчету, что упрощает их решение.

В заключение остановимся на одной из возможностей практического использования результатов работы. При решении численными методами задачи об изгибных колебаниях пластин при заданных на границе пластины углах поворота  $\frac{\partial w}{\partial n}$  и перемещениях  $w$  (в случае эксперимен-

тального задания краевых условий только эта пара величин может быть измерена) можно для пластины на упругом основании по результатам работы [3] и полученному в настоящей работе описанию поля перемещений представить систему граничных интегральных уравнений в виде

$$w = \frac{i}{\sqrt[4]{k^4 - \alpha}} \left\{ \int_{\Gamma} \left[ \Delta w \frac{\partial w_0^*}{\partial n} - w_0^* \frac{\partial \Delta w}{\partial n} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{k^4 - \alpha} \left( \bar{w}_0^* \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial n} \right) \right] d\Gamma + \iint_S f w_0^* dS \right\} \\ \Delta w = \frac{i}{4} \left\{ \int_{\Gamma} \left[ \left( \bar{w}_0^* \frac{\partial \Delta w}{\partial n} - \Delta w \frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial n} \right) + \sqrt{k^4 - \alpha} \left( w \frac{\partial w_0^*}{\partial n} - w_0^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right] d\Gamma + \right. \\ \left. + \sqrt{k^4 - \alpha} \iint_S f \bar{w}_0^* dS \right\}, \quad (15)$$

где  $\bar{w}_0^*$  может быть получена из  $w_0^*$  путем замены знака перед функцией  $K_0(\sqrt{k^4 - \alpha}r)$ , а все выписанные функции рассматриваются в точках границы  $\Gamma$ . Из системы (15) по известным величинам  $w$  и  $\frac{\partial w}{\partial n}$  могут быть найдены (как это обычно делается в методе граничных интегральных уравнений) неизвестные усилия  $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$  и  $\Delta w$ .

Численное задание всех необходимых плотностей потенциалов (перемещений, углов поворота, суммы моментов и перерезывающих сил) позволяет получить поле в любой точке пластины. Что касается пластины с натяжением, то, так как величина натяжения во многих случаях неизвестна, систему граничных интегральных уравнений для такой пластины, получить которую несложно, следуя методу, изложенному в [3]:

$$\begin{cases} \frac{T}{D} w = -\frac{i}{2} \left\{ \int_{\Gamma} \left[ w_0 \frac{\partial \Delta w}{\partial n} - \frac{\partial w_0}{\partial n} \Delta w - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( k_2^2 H_0(k_1 r) - \frac{2i}{\pi} k_1^2 K_0(k_2 r) \right) \frac{\partial w}{\partial n} \right] d\Gamma + \iint_S f w_0 dS \right\}, \\ \frac{T}{D} \Delta w = -\frac{1}{2} \left\{ \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \Delta w}{\partial n} \Delta w_0 - \Delta w \frac{\partial \Delta w_0}{\partial n} + \right. \right. \\ \left. \left. + k^4 \left[ \frac{\partial w}{\partial n} w_0 - w \frac{\partial w_0}{\partial n} \right] \right] d\Gamma + \iint_S f \Delta w_0 dS \right\} \end{cases}, \quad (16)$$

следует дополнить еще одним уравнением, например полученным в настоящей работе уравнением (7б), рассмотренным при  $R \rightarrow R_0 \in \Gamma$ . В результате по известным (например, измеренным) величинам  $\partial w / \partial n$  и  $w$  можно определить неизвестные величины  $\Delta w$ ,  $\partial \Delta w / \partial n$  и  $T$ . Приведенные выше граничных интегральные уравнения представляют собой расчетную форму метода потенциала, позволяющую численно определить недостающие величины плотностей потенциалов. В результате расчетов по приведенным

формулам можно определить не только поле колебания пластины, но и величины внешних по отношению к пластине краевых сил и моментов, которые в области низких частот, как известно, определяют излучающую способность конструкции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hansen E. B. Numerical solution of integro-differential and singular untegral equation for plate bending problems // J. of Elasticity. 1976. V. 6. № 1. P. 39-56.
2. Vivoli J. Vibrations de plaques et potentiels de couches // Acustica. 1972. V. 26. № 6. P. 305-314.
3. Ковинская С. И., Никифоров А. С. Применение методов граничных интегральных уравнений к решению задач об изгибных колебаниях пластин // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 5. С. 707-709.
4. Filippi P. Sound radiation by baffled plates and related boundary integral equation // J. Sound Vibration. 1985. V. 100. P. 69-81.
5. Ковинская С. И., Никифоров А. С. О волноводной изоляции изгибных волн // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 6. С. 792-798.

Поступила в редакцию  
24.III.1986