АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 2

УДК 534.2:621.391

О ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ОБРАБОТКЕ ПОЛЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА

Лейкин Д. Е.

Рассмотрены вопросы обработки поля движущегося источника. Построена статистика алгоритма пространственно-временной обработки. Исследована чувствительность алгоритма к параметрам движения источника.

Пренебрежение эффектами, обусловленными движением источника сигнала, может приводить к значительным потерям при обработке наблюдений. В настоящей работе синтезирован алгоритм пространственно-временной обработки в задаче обнаружения слабого на фоне аддитивной помехи сигнала, излученного движущимся источником стационарного шума.

Пусть в пространственно-временной области Ω наблюдается скалярное комплексное волновое поле $\psi(\mathbf{x}, t)$, представляющее собой аддитивную смесь сигнала $s(\mathbf{x}, t)$ и помехи $n(\mathbf{x}, t)$:

$$\psi=s+n, \tag{1}$$

где $s(\mathbf{x}, t)$ — поле, излученное точечным источником стационарного гауссовского шума $q(t)$, движущимся в однородном свободном пространстве по траектории $\mathbf{r}(t)$:

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)s(\mathbf{x},t)=-4\pi q(t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)). \tag{2}$$

Достаточная статистика алгоритма обнаружения сигнала $s(x, t)$ в наблюдаемом поле (1) может быть представлена в виде [1]

$$\mathbf{T}=\langle\psi|\mathbf{W}\psi\rangle, \tag{3}$$

причем в случае малого уровня сигнала весовой оператор $\mathbf{W}$ имеет следующую структуру:

$$\mathbf{W}=\mathbf{N}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{N}^{-1}, \tag{4}$$

где $\mathbf{S}$ и $\mathbf{N}$ — операторы сигнала и помехи, определяемые ядрами [1]

$$S_{1,2}=\mathrm{E}\{s(1)s^*(2)\} \tag{5}$$

и $N_{1,2}=\mathrm{E}\{n(1)n^*(2)\}$; $\mathbf{N}^{-1}$ — обратный к $\mathbf{N}$ оператор. Коррелятор сигнала (5) определяется из уравнения (2) как

$$S_{1,2}=D_1D_2\int\exp\{i\omega[\tau_2-\tau_1]\}dG(\omega), \tag{6}$$

$1/D=(1+\partial R/c\partial\tau)R$, $R(\tau)=|\mathbf{x}-\mathbf{r}(\tau)|$, $\tau=\tau(\mathbf{x}, t)$ — единственный при $|\dot{R}_\tau|<c$ корень уравнения $|\mathbf{x}-\mathbf{r}(\tau)|/c+\tau=t$, $G(\omega)$ — спектральная интенсивность процесса $q(t)$. Соотношения (3), (4), (6) определяют статистику данной задачи:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}&=\int\ldots\int d\Gamma_1\ldots d\Gamma_4\psi_1{}^*N_{1,2}^{(-1)}S_{2,3}N_{3,4}^{(-1)}\psi_4=\\&=\iint\ldots\int d\Gamma_1\ldots d\Gamma_4\,dG(\omega)\,\psi_1{}^*N_{1,2}^{(-1)}D_2D_3\exp\{i\omega(\tau_3-\tau_2)\}N_{3,4}^{(-1)}\psi_4=\\&=\int dG(\omega)\left|\int\ldots\int d\Gamma_1\,d\Gamma_2\psi_1{}^*N_{1,2}^{(-1)}D_2\exp(-i\omega\tau_2)\right|^2.\end{aligned} \tag{7}$$

---

[1] Для краткости индексом у величин S, N, ψ, τ далее будет обозначаться совокупность всех аргументов: $S_{1,2}=S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2)$ и т. д.

Здесь $N^{(-1)}$ — ядро оператора N^{-1}; интегрирование по $d\Gamma=d^3x dt$ осуществляется в пространственно-временной области наблюдений Ω.

Чувствительность алгоритма к параметрам сигнала, в том числе и к параметрам движения источника, можно определить с помощью отношения сигнал/помеха (ОСП)

$$\rho=Sp[\mathbf{WS}]/\{Sp[\mathbf{WN}]^2\}^{1/2} \tag{8}$$

через обобщенную функцию неопределенности (ОФН) [2], имеющую структуру нормированного ОСП ($\varkappa=\rho(\mathbf{W})/\rho(\mathbf{W}_{opt})$)

$$\varkappa=Sp[\mathbf{N}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{N}^{-1}\tilde{\mathbf{S}}]/\{Sp[\mathbf{N}^{-1}\mathbf{S}]^2 Sp[\mathbf{N}^{-1}\tilde{\mathbf{S}}]^2\}^{1/2}.$$

Здесь $\tilde{\mathbf{S}}=\mathbf{S}[\tilde{\mathbf{r}}(t)]$ — коррелятор сигнала, на который настроен алгоритм, а $\mathbf{S}=\mathbf{S}[\mathbf{r}(t)]$ и $\mathbf{r}(t)$ — истинный коррелятор и истинная траектория источника.

Найдем $\varkappa$ для нескольких типов спектров излученного сигнала. Вычисления проведем для случая белого шума $n(\mathbf{x}, t)$: $N_{1,2}^{(-1)}=\delta(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\delta(t_1-t_2)$. Относительно области наблюдений Ω будем далее предполагать, что зафиксирована некоторая антенна $A(\mathbf{x})$, в каждой точке которой поле ψ наблюдается в течение интервала времени $(0, T)$, и выполняется условие

$$cT\gg\max(l, L), \tag{9}$$

где L — характерный размер антенны, l — перемещение источника за время T.

В случае широкополосного сигнала q_1 (ширина полосы считается большой по сравнению с величиной разрешения по частоте $\Delta f_1\gg 1/T$, а также по сравнению с возможными доплеровскими сдвигами) интеграл

$$I_1=\mathrm{Sp}[\mathbf{S}\tilde{\mathbf{S}}]=\iint g_1(\omega_1)g_1(\omega_2)\left|\int\ldots\int \exp\{i(\omega_1-\omega_2)t\}D(\tau)\tilde{D}(\tilde{\tau})\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left\{\frac{i}{c}[\omega_1 R(\tau)-\omega_2\tilde{R}(\tilde{\tau})]\right\}d^3x\,dt\right|^2 d\omega_1\,d\omega_2, \tag{10}$$

где g_1 — спектральная плотность мощности q_1, можно вычислить в следующем приближении. Пусть g_1 мало изменяется на масштабах порядка разрешения по частоте: $dg_1/Td\omega\ll g_1$. Пусть также выполняется условие $\omega_{\min}T\gg 1$, где $\omega_{\min}$ — нижняя граничная частота в спектре сигнала. Перейдем в формуле (10) к интегрированию по переменным $\omega^+=\omega_1+\omega_2$, $\omega^-=\omega_1-\omega_2$. Интеграл по $d\omega^+$ вычислим по теореме о среднем. Замечая далее, что существенный вклад в интеграл по $d\omega^-$ дает только узкая полоса частот $|\omega^-|\leqslant 1/T$, в пределах которой подынтегральное выражение заметно отлично от нуля, пределы интегрирования по $d\omega^-$ можно сделать бесконечными, опустив в силу (9) член $\omega^-(R+\tilde{R})/c\sim\omega^- l/c$ в аргументе экспоненты:

$$I_1=\Delta f_1 g_1^2(\bar{\omega})\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int \exp(i\omega^- t)P(t)\,dt\right|^2 d\omega^-=2\pi\Delta f_1 g_1^2(\bar{\omega})\int|P|^2\,dt,$$

$$P(t)=\int_{A(\mathbf{x})}\ldots\int D(\tau)\tilde{D}(\tilde{\tau})\exp\{i\bar{k}[R(\tau)-\tilde{R}(\tilde{\tau})]\}\,d^3x,$$

$\bar{k}=\bar{\omega}/c$, $\bar{\omega}$ — характерная частота в спектре сигнала. Отсюда после нормировки находим для $\varkappa_1$ следующее выражение:

$$\varkappa_1(\mathbf{r}(t), \tilde{\mathbf{r}}(t))=\theta(\bar{\omega})\frac{\overline{\left|\int_A D(\tau)\tilde{D}(\tilde{\tau})\exp\{i\bar{k}[R(\tau)-\tilde{R}(\tilde{\tau})]\}d^3x\right|^2}}{\left\{\overline{\left|\int_A D^2 d^3x\right|^2}\times\overline{\left|\int_A \tilde{D}^2 d^3x\right|^2}\right\}^{1/2}}, \tag{11}$$

где $\theta(\bar{\omega})=\Delta f_1 g_1^2(\bar{\omega})/\int g_1^2(\omega)d\omega\approx 1$; прямая черта обозначает усреднение за время наблюдения

$$\overline{[*]}=T^{-1}\int_0^T [*]dt.$$

Для узкополосного сигнала (ширина полосы сигнала считается малой по сравнению с разрешением по частоте) можно положить $g_2(\omega)=\delta(\omega-\bar{\omega})$, $\bar{\omega}$ – характерная частота в спектре. Выполняя интегрирование

$$I_2=\mathrm{Sp}[\mathrm{S}\tilde{\mathrm{S}}]=\left|\int_A D(\tau)\tilde{D}(\tilde{\tau})\exp\{i\bar{k}[R(\tau)-\tilde{R}(\tilde{\tau})]\}d^3x\right|^2$$

и вводя нормировку, получим

$$\varkappa_2(\mathbf{r}(t),\tilde{\mathbf{r}}(t))=\frac{\overline{\left|\int_A D\tilde{D}\exp\{i\bar{k}[R(\tau)-\tilde{R}(\tilde{\tau})]\}d^3x\right|^2}}{\int_A D^2(\tau)d^3x\times\int_A \tilde{D}^2(\tilde{\tau})d^3x}. \tag{12}$$

И наконец, разберем случай, когда в сплошном спектре g_1 сигнала имеется узкополосный выброс, причем $\Delta f_B\leqslant 1/T$. Полагая $g_3(\omega)=g_1(\omega)+a\delta(\omega-\omega_0)$, находим

$$\varkappa_3=I_3(\mathrm{S},\tilde{\mathrm{S}})/\{I_3(\mathrm{S},\mathrm{S})I_3(\tilde{\mathrm{S}},\tilde{\mathrm{S}})\}^{1/2},$$

$$I_3=I_1(\bar{k})+\frac{2ag_1(\omega_0)}{\Delta f_1 g_1^2(\bar{\omega})}I_1(k_0)+a^2I_2(k_0). \tag{13}$$

Заметим, что для неподвижного источника чувствительность к параметрам сигнала определяется теми же выражениями $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$. При этом величины R, $\tilde{R}$ не зависят от времени и формулы (11)–(13) определяют границы области пространственного разрешения алгоритма. Нетрудно видеть, что при $\tilde{k}\sim k_0$ соответствующие размеры элемента разрешения во всех трех случаях приблизительно одинаковы. Для движущегося источника положение качественно изменяется. В этом случае чувствительность алгоритма к параметрам сигнала зависит также от спектрального состава сигнала и длительности наблюдения. Как показывает анализ выражения (11), границы чувствительности к параметрам движения определяются соотношением

$$\delta r=\max_t|R-\tilde{R}|<\Delta, \tag{14}$$

где под Δ понимается размер элемента разрешения при $\dot{R}_t=\dot{\tilde{R}}_t=0$ по соответствующему направлению. Отсюда следует, что потери при обработке широкополосного сигнала окажутся существенными в тех случаях, когда за время, отвечающее интервалу T, источник выходит за пределы зоны разрешения. Оценивая δr как $\delta r\sim v^- T$, где $v^-=|\partial(R-\bar{R})/\partial t|$, условие (14) можно записать в виде

$$v^-<\Delta/T, \tag{15}$$

определив таким образом чувствительность к рассогласованию по скорости.

В случае узкополосного сигнала (см. формулу (12)) аналогичные условия имеют иной вид:

$$\delta r<\lambda,\ v^-<\lambda/T, \tag{16}$$

где $\lambda=2\pi\bar{k}^{-1}$.

Наконец, в третьем случае (см. (13)) имеется, очевидно, два характерных масштаба:

$$\delta r_1<\lambda,\ v_1^-<\lambda/T,$$
$$\delta r_2<\Delta,\ v_2^-<\Delta/T. \tag{17}$$

Укажем, что условия (14)–(17) можно рассматривать как ограничения на размеры антенны и длительности накопления при обработке сигналов от источника, скорость которого известна с погрешностью порядка v^{-1}.

Дадим физическую интерпретацию полученных результатов. Среди факторов, обусловливающих потери при несогласованной обработке наблюдений, можно выделить два основных: перемещение источника, приводящее к нарушению фазовых соотношений на антенне и, следовательно, к уменьшению ее коэффициента передачи, и доплеровскую деформацию спектра сигнала. Что касается узкополосного сигнала, то смысл явления предельно ясен. Действительно, как только величина нескомпенсированного доплеровского сдвига становится сравнимой с шириной полосы пропускания алгоритма, полезный сигнал оказывается фактически отфильтрованным, вследствие чего ОСП алгоритма падает. Сказанное в равной мере относится и к случаю узкополосной составляющей в спектре сигнала g_3 (формула (17)), причем относительное уменьшение ОСП для скоростей в интервале $\lambda/T\leqslant v^-\ll\Delta/T$ определяется соотношением (13) $\varkappa_3(v^-\geqslant\lambda/T)\approx1-aI_2(k_0)/\{I_3(\mathrm{S},\ \mathrm{S})I_3(\tilde{\mathrm{S}},\ \tilde{\mathrm{S}})\}^{1/2}$. Иначе обстоит дело для широкополосного сигнала. В этом случае на поведение ОСП алгоритма влияют оба указанных фактора. Интересно отметить, что для данного алгоритма обработки границы чувствительности, определяемые действием каждого из факторов, совпадают. Другими словами, уход источника из зоны разрешения приводит к тем же потерям, что и обусловленная им доплеровская деформация спектра сигнала. Чтобы убедиться в этом, выясним роль доплеровских сдвигов в системе обработки. Для простоты рассмотрения сделаем несколько предположений. Будем считать, что траектории $\mathbf{r}(t)$, $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ пересекаются в момент времени $t=0$: $\mathbf{r}(0)=\tilde{\mathbf{r}}(0)$. Пусть, кроме того, условия движения достаточно медленно меняются со временем. «Медленность» изменения здесь означает малость изменения величин R, $\tilde{R}$, $v=\dot{R}_t$, $\tilde{v}=\dot{\tilde{R}}_t$ за время наблюдения:

$$TdR/dt\ll R,\ Tdv/dt\ll v\ll c. \tag{18}$$

Отметим, что при этих ограничениях пройденный источником путь за время T может быть и не мал по сравнению с размером элемента разрешения алгоритма. Далее, в силу условий (18) множитель D можно положить $D=\tilde{D}=1/R(\mathbf{x},\ 0)$. Это дает возможность рассматривать обработку в частотной области, поскольку, как легко проверить, в системе координат $(\mathbf{x},\ \tau)$, определенной преобразованием

$$\mathbf{x}=\mathbf{x},\ \tau=\tau(\mathbf{x},\ t), \tag{19}$$

случайное поле (1) обладает требуемым свойством стационарности (разумеется, только в случае белого шума n и стационарного сигнала q). Для широкополосного сигнала $(g(\omega)=g_1(\omega))$ находим

$$\varkappa(\mathbf{r}(t),\tilde{\mathbf{r}}(t))=\mathrm{const}\iint d^2G\left|\int\limits_A d^3x\int\limits_0^T dt\exp\left\{it\left[\frac{\omega_1}{1+v/c}-\frac{\omega_2}{1+\tilde{v}/c}\right]\right\}\right|^2 \tag{20}$$

где $d^2G=g_1(\omega_1)g_1(\omega_2)d\omega_1d\omega_2$, а const – множитель, нормирующий $\varkappa$ на единицу при $v=\tilde{v}$. Укажем, что с точностью до величин порядка $v/c\ll1$ выражение (20) зависит только от разности $v^-=v-\tilde{v}$: $\varkappa(\mathbf{r}(t),\ \tilde{\mathbf{r}}(t))=\varkappa(v^-)$.

Формула (20) позволяет оценить интервал скоростей, на котором существенно изменяется значение $\varkappa(v^-)$. Величина этого интервала δv^- и определяет чувствительность алгоритма к рассогласованию по скорости.

Из (20) следует, что $\bar{k}\delta v^-$ должно быть порядка

$$\bar{k}\delta v^- \sim 1/T, \quad \delta v^- = \max_{\mathbf{x},\mathbf{x}'\in A} |v^-(\mathbf{x}) - v^-(\mathbf{x}')|. \tag{21}$$

Физическое содержание этого соотношения состоит в следующем. Когда изменение величины нескомпенсированного доплеровского сдвига $\bar{k}\delta v^-$ становится величиной порядка разрешения по частоте $1/T$, по пространству будут суммироваться некоррелированные частотные компоненты излученного сигнала, что и влечет уменьшение ОСП. Учитывая, что $\delta v^- \sim v^-/\bar{k}\Delta$, соотношение (21) можно записать в виде $v^- \sim \Delta/T$. Сравнение этого результата с условием (15) подтверждает правильность сделанного предположения.

Приведенные результаты позволяют описать фокусирующие свойства антенны при данной обработке (7) в задаче обнаружения поля движущегося источника. Формулы (11)—(13) при этом определяют чувствительность алгоритма к параметрам сигнала и в пределе v, $\tilde{v} \to 0$ переходят в известные выражения для неподвижного источника. Качественный анализ выявил физические причины ухудшения качества алгоритма для различных спектральных составов излученного сигнала. Найденные оценки (14)—(17) указывают пределы, в которых допустимо огрубление процедуры обработки (7) без существенного ухудшения качества, что может оказаться важным при практической реализации алгоритма. Выражения (11)—(17) устанавливают связь между величиной пространственного разрешения для неподвижного и движущегося источников при произвольной конфигурации антенны.

Все найденные соотношения легко обобщаются на тот случай, когда движется не только источник, но и сама приемная антенна. При этом входящие в формулы (11)—(13) величины τ должны определяться как $\tau(\mathbf{x}, t) = \tau(\mathbf{x}, t, t')|_{t'=t}$, где $\tau(\mathbf{x}, t, t')$ — решение уравнения $|\mathbf{r}_A(t') - \mathbf{r}(\tau)|/c + \tau = t$, $\mathbf{r}_A$ — координата точки приема, $\mathbf{r}(t)$ — траектория источника. Если скорость источника мала по сравнению со скоростью распространения сигнала в среде ($v/c \ll 1$), то имеет смысл говорить об относительной скорости источника в точке приема. При этом соотношения (14)—(17) сохраняют вид в сопутствующей системе координат.

Следует отметить, что выше рассматривались свойства весовой обработки по отношению к вариациям параметров сигнала. В силу сделанных предположений роль задержек на антенне была несущественной. Если же время интегрирования $T \sim \max(l, L)/c$, то конфигурация области наблюдений, обеспечивающая максимальное значение ОСП алгоритма, должна определяться следующим образом. Ограничимся здесь случаем широкополосного сигнала. Согласно выражениям (8), (19),

$$\rho(\mathbf{W}_{\text{opt}}) = \left\{ \iint d^2G \left| \int_\Omega D^2(\tau) \exp(i\omega^-\tau)\, d\mathbf{\Gamma} \right|^2 \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \iint d^2G \left| \int_{\Omega^*} \!\!\ldots\! \int \frac{D(\tau)}{R(\tau)} \exp(i\omega^-\tau)\, d^3x\, d\tau \right|^2 \right\}^{1/2},$$

где Ω^* — образ Ω в координатах (19). Наилучшая форма Ω^* определяется, очевидно, как $\Omega_0^* = \{A(\mathbf{x});\ (0, T)\}$. При этом ОСП достигает своего максимального значения

$$\rho(\Omega_0^*) = \left\{ \int g_1^2(\omega)\, d\omega \int_0^T \left| \int_A D(\tau)/R(\tau)\, d^3x \right|^2 d\tau \right\}^{1/2}.$$

Отсюда $\Omega_0 = \{A(\mathbf{x});\ (R(\mathbf{x}, 0)/c,\ T + R(\mathbf{x}, T)/c\}$. Этот результат легко объясним, поскольку время корреляции сигнала конечно и, следовательно, ОСП будет принимать максимальное значение, когда интервалы наблюдения во всех точках антенны отвечают одному и тому же интервалу времени на источнике. Добавим, что все изложенные результаты можно в равной степени отнести и к случаю негауссовского стационарного сигнала q, поскольку структура наилучшей квадратичной статистики (в смысле максимизации ОСП (8)) в точности совпадает со структурой, определяемой выражением (7), полученным из отношения правдоподобия для малого уровня сигнала.

В заключение автор выражает благодарность А. С. Якуничкину за внимание к работе и ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ван Трис Г. Л.* Теория обнаружения, оценок и модуляции: Перевод с англ. под ред. Тихонова В. И. М.: Сов. радио, 1972.
2. *Баронкин В. М., Якуничкин А. С.* Обобщенная функция неопределенности при квадратичной пространственно-временной обработке // X Всесоюзн. акуст. конф. Докл. Секция Т. М.: Акуст. ин-т, 1983.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29.VIII.1986