

УДК 534.231.1

© 1990 г.

Д. И. Даровских, Г. Е. Мальцев

**ТОЧНОСТЬ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ
МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ
ПОДВОДНОЙ АКУСТИКИ**

На основе анализа операторов перехода на слой изучены ошибки коэффициентов возбуждения и фазовых функций конечно-разностных (КР) мод для различных КР-моделей, описывающих распространение звука в стратифицированном океане от точечного гармонического источника. Предложен простой критерий, позволяющий оценивать точность различных КР-моделей. На основе анализа ошибок фазовых функций КР-нормальных мод получены оценки оптимальных шагов сетки, позволяющие для выбранной точности добиваться максимальной эффективности.

Широкий класс задач распространения звука описывается с помощью краевой задачи для уравнения Гельмгольца (УГ)

$$\Delta p + k_0^2 n^2(x) p = -\delta(x - x_0). \quad (1)$$

В рамках метода конечных разностей (МКР) можно корректно аппроксимировать и решить полную краевую задачу для уравнения (1), однако это потребовало бы даже в двумерном случае обращения матриц высокого порядка, что довольно затруднительно даже для новейших ЭВМ. Поэтому обычно исходную краевую задачу (1) аппроксимируют некоторой эволюционной задачей, доступной для моделирования на ЭВМ. Ограничиваясь рассмотрением цилиндрически симметричного океана и переходя к функции $u(r, z)$

$$p(r, z) = u(r, z) H_0^{(1)}(k_0 r), \quad (2)$$

получаем с использованием техники факторизации [1] уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial r} + ik_0 u - ik_0 (1 + D)^{1/2} u = 0 \quad (3)$$

(где $D = n^2(r, z) - 1 + k_0^{-2} \partial^2 / \partial z^2$), которое не учитывает эффектов обратного рассеяния и правильно описывает поле прямой волны с точностью до ошибки, связанной с некоммутативностью операторов $\partial / \partial r$ и $n^2(r, z)$. Источник в этом случае моделируется заданием функции $u(r_0, z)$ на дистанции расположения источника r_0 , которую без ограничения общности положим равным нулю:

$$u(0, z) = u_0(z). \quad (4)$$

Если скорость звука является функцией только глубины, то уравнение (3) является точным. Представляет интерес именно в этом случае исследовать точность МКР, так как здесь решения краевой и эволюционной задач для (1) и (3) соответственно допускают аналитические представления.

Рассмотрим океан конечной глубины H с произвольной зависимостью скорости звука от глубины $c(z)$. Допускается существование произвольного числа горизонтальных границ разрыва $c(z)$ и плотности ρ . Граничные условия могут быть любыми; для простоты положим их нулевыми:

$$u(r, 0) = u(r, H) = 0. \quad (5)$$

Решение краевой задачи (1) в этом случае записывается в виде

$$p(r, z) = \frac{i}{4} \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_l(z_0) \varphi_l(z) H_0^{(1)}(\xi_l r), \quad (6)$$

где $\xi_l = (k_0^2 - \zeta_l^2)^{1/2}$, $\varphi_l(z)$ и ζ_l — собственные функции (СФ) и собственные значения (СЗ) поперечной задачи Штурма — Лиувилля (ШЛ):

$$\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} + [\zeta_l^2 + k_0^2(n^2(z) - 1)] \varphi(z) = 0, \quad (7)$$

$$\varphi(0) = \varphi(H) = 0.$$

Используя асимптотическое выражение для $H_0^{(1)}$ в (2) и (6) в приближении дальнего поля, перепишем (6) в виде

$$u(r, z) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \varphi_l(z) \exp(i\mu_l r), \quad (8)$$

$$\mu_l = (k_0^2 - \zeta_l^2)^{1/2} - k_0, \quad a_l = i\varphi_l(z_0) \left(1 - \left(\frac{\zeta_l}{k_0}\right)^2\right)^{-1/4} / 4. \quad (9)$$

Решение эволюционной задачи (3) — (5) для стратифицированного океана также записывается в виде (8), однако a_l здесь представляют собой коэффициенты разложения функции источника $u_0(z)$ в ряд по СФ $\varphi_l(z)$:

$$a_l = \int_0^H \varphi_l(z) u_0(z) dz. \quad (10)$$

При построении численных алгоритмов для задачи (3) необходимо придать смысл псевдодифференциальному оператору $(1+D)^{1/2}$. Наиболее известные и широко используемые параболическая и дробно-линейная аппроксимации этого оператора приводят соответственно к параболическому уравнению (ПУ)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{ik_0}{2} Du \quad (11)$$

и широкоугольному параболическому уравнению (ШПУ)

$$\left(1 + \frac{1}{4} D\right) \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{ik_0}{2} Du. \quad (12)$$

Решения (11) и (12) с начальными и граничными условиями (4), (5) для стратифицированного океана имеют вид

$$u_\theta(r, z) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \varphi_l(z) \exp(i\mu_{l,\theta} r), \quad (13)$$

где a_l выражается из (10), $\mu_{l,\theta}$ — фазовая функция соответствующей по угольности модели. Например, для ПУ

$$\mu_{l, \text{ПУ}} = -\zeta_l^2 / 2k_0 = \mu_l - \Delta\mu_{l, \text{ПУ}} + O((\zeta_l/k_0)^6), \quad (14)$$

$$\Delta\mu_{l, \text{ПУ}} = \zeta_l^4 / 8k_0^3,$$

а для ШПУ

$$\mu_{l, \text{ШПУ}} = -\zeta_l^2 / (2k_0 - \zeta_l^2 / 2k_0) = \mu_l - \Delta\mu_{l, \text{ШПУ}} + O((\zeta_l/k_0)^8), \quad (15)$$

$$\Delta\mu_{l, \text{ШПУ}} = \zeta_l^6 / 32k_0^5.$$

Интересно отметить, что для стратифицированного океана можно кор-

ректно поставить задачу Коши и для так называемого преобразованного уравнения Гельмгольца (ПУГ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2ik_0 \frac{\partial u}{\partial r} + k_0^2 Du = 0, \quad (16)$$

$$u(0, z) = u_0(z), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(0, z) = u_1(z),$$

если так задать функцию $u_1(z)$, чтобы в решении остались только уходящие волны. Решение (16) в этом случае имеет вид (8), где a_l выражаются из (10), и отличается от точного решения краевой задачи (1) только способом моделирования источника.

Дальнейшие ошибки, вносимые МКР, обусловлены КР-аппроксимацией эволюционной дифференциальной задачи. Величина этих ошибок зависит от используемых КР-схем и шагов сетки по всем координатам. В общем случае решение КР-задачи, аппроксимирующее решение краевой задачи (1) на сетке $\omega_{m,n}: \{z_m = mh, m=0, \dots, M; r_n = n\tau, n=0, \dots\}$ можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{u}}(r_n, z_m) = \sum_{l=1}^{M-1} \tilde{a}_l \tilde{\varphi}_l(z_m) \hat{T}^n(\psi, \tau) \mathbf{x}_l^0, \quad (17)$$

где $\tilde{\xi}_l$ и $\tilde{\varphi}_l(z_m)$ — собственные значения и собственные функции КР-задачи ШЛ:

$$L_n^2 \tilde{\varphi}(z_m) + [\tilde{\xi}_l^2 + k_0^2(n^2(z_m) - 1)] \tilde{\varphi}(z_m), \quad (18)$$

$$\tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}(H) = 0,$$

\tilde{a}_l — коэффициенты разложения КР функции источника $\tilde{u}_0(z_m)$ по СФ $\tilde{\varphi}_l(z_m)$, $\hat{T}(\psi, \tau)$ — оператор перехода на слой, $\psi = \psi(\tau, \tilde{\xi}_l)$. Векторные обозначения в (17) введены для того, чтобы включить в рассмотрение многослойные схемы. Для трехслойных схем, например, удобно положить $\tilde{\mathbf{u}}(r_n, z_m) = (\tilde{u}(r_n, z_m), \tilde{u}(r_{n-1}, z_m))^T$, где вектор \mathbf{x}_l^0 зависит от способа аппроксимации функции источника на втором слое.

Все свойства рассматриваемой КР-схемы однозначно определяются оператором перехода \hat{T} [3]. Можно показать, что устойчивость вытекает из требования $|\lambda_i| \leq 1$, где λ_i — СЗ оператора \hat{T} . Вообще говоря, КР-аппроксимация вносит ошибки как в фазовые скорости, так и в амплитуды нормальных мод, причем можно показать, что последние характеризуются величиной

$$\chi_l = \sup_{\mathbf{x}_l} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_n \frac{\|\hat{T}^n(\psi + \varepsilon, \tau) \mathbf{x}_l\|}{\|\mathbf{x}_l\|}. \quad (19)$$

Если $\chi_l = 1$, то коэффициенты возбуждения аппроксимируются точно. Это имеет место, если оператор \hat{T} унитарен. Схемы, обладающие таким свойством, называются консервативными, так как для них выполняется аналог закона сохранения энергии на сетке. В случае $\chi_l = O(1)$ КР-схема будет устойчивой, но коэффициенты возбуждения будут аппроксимироваться с ошибкой; случай $\chi_l \rightarrow \infty$ соответствует неустойчивым схемам.

Рассмотрим далее несколько самых широко используемых КР-схем для однонаправленных уравнений подводной акустики. Для ПУ, аппроксимированного на сетку согласно схеме Кранка — Никольсона, оператор перехода имеет вид

$$\hat{T}(\psi, \tau) = \exp(-2i\psi), \quad (20)$$

где $\text{tg } \psi = \tilde{\xi}^2 \tau / 4k_0$. Подставляя (20) в (17), имеем

$$u(r_n, z_m) = \sum_{l=1}^{M-1} \tilde{a}_l \tilde{\varphi}_l(z_m) \exp(i\mu_l \text{пу} r_n), \quad (21)$$

$$\tilde{\mu}_{i \text{ пУ}} = -\frac{2}{\tau} \operatorname{arctg}(\tilde{\xi}_i^2 \tau / 4k_0). \quad (22)$$

Из (22) можно найти ошибки, вносимые в фазовые функции нормальных мод дискретизацией по z и r . Разлагая (22) в ряд Тэйлора, имеем

$$\tilde{\mu}_{i \text{ пУ}} = \mu_{i \text{ пУ}}^h - \Delta \mu_i^\tau + O(\tau^4), \quad (23)$$

$$\Delta \mu_i^\tau = \xi_i^6 \tau^2 / 96k_0^3, \quad \mu_{i \text{ пУ}}^h = \tilde{\xi}_i^2 \tau / 2k_0.$$

Представим далее СЗ КР-задачи ШЛ (18) в виде

$$\tilde{\xi}_i = \xi_i - \Delta \xi_i. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23) и учитывая (14), получаем

$$\mu_{i \text{ пУ}} = \mu_i - \Delta \mu_i^\tau - \Delta \mu_i^h - \Delta \mu_{i \text{ пУ}} + O(\tau^4 + \Delta \xi_i^2 + (\xi_i/k_0)^6), \quad \Delta \mu_i^h = \xi_i \Delta \xi_i / k_0. \quad (25)$$

Оператор перехода \hat{T} для ШПУ (12), аппроксимированного на сетку с использованием той же схемы Кранка — Никольсона, что и для ПУ, также имеет вид (20), где $\operatorname{tg} \psi = \xi_i^2 \tau / (4k_0 - \xi_i^2/k_0)$. Для фазовой функции ШПУ с учетом (15) получаем выражение

$$\mu_{i \text{ шПУ}} = \mu_i - \Delta \mu_i^\tau - \Delta \mu_i^h - \Delta \mu_{i \text{ шПУ}} + O(\tau^4 + \Delta \xi_i^2 + (\xi_i/k_0)^6). \quad (26)$$

Отметим, что для двух рассмотренных выше шеститочечных схем оператор перехода (20) унитарен, откуда сразу следует, что эти схемы безусловно устойчивы и консервативны ($\chi_i = 1$).

Рассмотрим теперь явную трехслойную схему для ПУГ (16). Оператор перехода для нее имеет вид

$$\hat{T}(\psi, \tau) = \begin{pmatrix} 2 \cos \psi & -e^{-i\beta} \\ e^{i\beta} & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\cos \psi = (1 + \tau^2 \tilde{\xi}_i^2 / 2) (1 + k_0^2 \tau^2)^{-1/2}, \quad (28)$$

$$\operatorname{tg} \beta = k_0 \tau.$$

Условия устойчивости следуют из (28):

$$\tau \leq \frac{2}{\tilde{\xi}_{M-1}^2} (k_0^2 - \tilde{\xi}_{M-1}^2)^{1/2}, \quad \tilde{\xi}_{M-1} < k_0. \quad (29)$$

Для однородного океана они превращаются в известные неравенства $\tau \leq k_0 h^2 (1 - (2/k_0 h)^2)^{1/2} / 2$, $k_0 h > 2$ [2]. Вычисление величины χ_i приводит к следующему результату: $\chi_i = (1 + \cos \psi) / \sin \psi \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \infty$, из которого заключаем, что в общем случае КР-задача Коши для ПУГ неустойчива по начальным данным. Однако обычно на выбор начального значения X_i^0 накладываются ограничения физического характера. Для трехслойных схем, например, начальное значение функции источника на втором слое обычно принимают равным этой же функции на первом слое. Величину, характеризующую ошибки аппроксимации коэффициентов возбуждения нормальных мод, в этом случае можно выписать аналогично (19):

$$\tilde{\chi}_i = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_n \frac{\|\hat{T}^n(\psi + \varepsilon, \tau) X_i^0\|}{\|X_i^0\|}. \quad (30)$$

Для оператора перехода (27), подставляя $X_i^0 = (1, 1)^T$ в (30), получаем

$$\tilde{\chi}_i = (1 + \cos^2 \psi - 2 \cos \psi \cos \beta)^{1/2} / \sin \psi \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} k_0 / (k_0^2 - \tilde{\xi}_i^2)^{1/2}. \quad \text{Таким образом, для}$$

естественного выбора начального условия задача становится устойчивой,

хотя имеют место ошибки аппроксимации коэффициентов возбуждения нормальных мод, возрастающие при увеличении угла их распространения.

Выражение для фазовой функции получаем из (28):

$$\bar{\mu}_l \text{ ПУГ} = \frac{1}{\tau} \left\{ \arccos \left(\frac{1 + \tau^2 \tilde{\xi}_l^2 / 2}{(1 + k_0^2 \tau^2)^{1/2}} \right) - \text{arctg}(k_0 \tau) \right\},$$

разлагая которое в ряд Тэйлора, имеем

$$\bar{\mu}_l \text{ ПУГ} = \mu_l + 2\Delta\mu_l^\tau - \Delta\mu_l^h + O(\tau^4 + \Delta\xi_l^2). \quad (31)$$

Отметим, что так как мы имеем дело непосредственно с ПУГ, то (31) не содержит члена, связанного с угольностью (ср. с (25) и (26)); тем не менее ограничение (29) на шаг h снизу приводит к тому, что ошибка фазовой функции $\Delta\mu_l^h$ не может быть сделана сколь угодно малой дроблением шага h . Существует, однако, еще один способ уменьшения ошибки $\Delta\mu_l^h$ — это использование многоточечных по z шаблонов [4]. Все рассмотренные выше схемы использовали трехточечную аппроксимацию оператора L_h^2 из (18), обладающую вторым порядком точности по h :

$$L_h^2 \varphi_m = \frac{1}{h^2} (\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Big|_{z=z_m} + O(h^2).$$

Легко показать, что пятиточечная аппроксимация L_h^2 обладает четвертым порядком точности и т. д. Оказывается [5], что трехточечная аппроксимация оператора L_h^2 обеспечивает в случае явных схем для ПУГ точность, по порядку величины равную точности узкоугольного ПУ, пятиточечная аппроксимация L_h^2 — ШПУ и т. д., т. е. точность аппроксимации оператора L_h^2 соответствует определенной угольности в ряде широкоугольных ПУ.

Итак, для повышения широкоугольности КР-моделей можно двигаться двумя путями: переходить к ШПУ, очень широкоугольному ПУ и т. д.; использовать явные многоточечные схемы для ПУГ. Первый путь в случае использования неявных схем заметно снижает эффективность соответствующих алгоритмов из-за необходимости обращать пяти и более диагональные матрицы. Второй путь, казалось бы, выглядит в этом плане более перспективно, так как КР-схемы в этом случае остаются явными, а условия устойчивости для них сохраняют вид (29). Однако, используя степенную аппроксимацию оператора $(1+D)^{1/2}$, можно построить явные двуслойные многоточечные схемы для сколь угодно широкоугольных ПУ. Таким образом, эти два указанных способа повышения широкоугольности КР-моделей обладают сравнимыми характеристиками как по точности, так и по эффективности.

Приведенные выше оценки точности и эффективности различных КР-моделей справедливы лишь в случае особо неоднородного по трассе распространения океана. При наличии в океане сильных горизонтальных неоднородностей в случае использования модели ПУГ в решении может возникнуть составляющая, соответствующая обратным волнам от мнимых источников. Выражение для χ_l показывает, что в этом случае может произойти существенная потеря точности, причем тем большая, чем мельче шаг сетки τ , и предпочтение здесь следует отдать КР-моделям для ШПУ.

Ошибки фазовой функции и коэффициентов возбуждения КР нормальных мод еще не дают полного представления о суммарной точности рассматриваемой модели, которая, как видно из структуры решения (17), зависит от расстояния r , до которого необходимо провести вычисление звукового поля, от точности моделирования источника и от числа возбужденных мод.

Специфика задач по распространению звука в океане заключается в том, что основной вклад в поле на больших расстояниях от источника дают моды, захваченные каналом. Такие моды распространяются в огра-

Профиль скорости звука

z , км	$c(z)$, км/с	z , км	$c(z)$, км/с
0	1,5365	0,8635	1,47919
0,1524	1,53924	1,0159	1,47188
0,2539	1,52401	5,5879	1,5496
0,4063	1,50114	5,5879	1,55552

ниченном секторе углов $\sin \theta \leq (1 - (k_{гр}/k_0)^2)^{1/2}$, $k_{гр}$ — волновое число в грунте.

Для того чтобы дать определенный ответ на вопрос о точности той или иной КР-модели, необходимо, во-первых, знать точное решение дифференциальной задачи (1) и, во-вторых, определить критерий сравнения между точным решением u и КР-решением \tilde{u} , т. е. ввести некоторую норму $\|\cdot\|$, в которой бы имела место сходимость $\tilde{u} \rightarrow u$. Тогда точность будет характеризоваться величиной $\varepsilon = \|\tilde{u} - u\|$. На практике мы не только не знаем точного решения u , но и не располагаем каким-либо однозначным критерием сравнения. Поэтому необходимо выработать простой практический критерий, позволяющий получать представление о суммарной точности. В качестве такого критерия предлагается следующий.

Пусть в океане распространяется N первых мод, захваченных подводным звуковым каналом. Для того чтобы КР-решение правильно аппроксимировало точное решение на заданном расстоянии r от источника, потребуем, чтобы ошибка фазовой функции моды, распространяющейся под максимальным углом θ_{max} , не превышала некоторой величины, зависящей от желаемой точности вычислений

$$(\Delta\mu_N^r + \Delta\mu_N^h + \Delta\mu_{N,\theta})r \leq C(\varepsilon). \quad (32)$$

Для определения оптимальных шагов сетки вместо (32) удобнее пользоваться более жесткими условиями:

$$\Delta\mu_N^r r \leq C(\varepsilon), \quad \Delta\mu_N^h r \leq C(\varepsilon), \quad \Delta\mu_{N,\theta} r \leq C(\varepsilon). \quad (33)$$

Выбор константы C неоднозначен и зависит от желаемой точности вычислений. Но коль скоро она выбрана и фиксирована, из (32) определяется максимальное расстояние, до которого рассматриваемая модель обеспечивает приемлемую точность.

Для проверки критерия (33) был проведен ряд численных экспериментов с самыми разнообразными гидрологическими условиями для стратифицированного океана и визуальная оценка точности различных моделей при сравнении с точными решениями, полученными по программе нормальных мод. Удовлетворительное совпадение результатов выполняется, если положить $C=3$.

Итак, сначала для заданной точности расчетов находим максимальную дистанцию, вплоть до которой верна рассматриваемая модель.

Например, для ПУ $r_{ПУ}^{max} = 8C/k_0 \varepsilon_{угл}^4$, где $\varepsilon_{угл} = \sin \theta_{max}$. Если заданная дистанция r превышает r^{max} , это говорит о том, что точности рассматриваемой модели недостаточно и необходимо использовать более широкоугольную модель. Затем для выбранной модели определяем оптимальный шаг τ_{opt} . Например, для неявных двухслойных схем для ПУ и ПШУ

$$\tau_{opt} = \frac{4}{k_0 \varepsilon_{угл}^3} \left(\frac{6C}{k_0 r} \right)^{1/2}. \quad (34)$$

Сложнее найти оптимальный шаг h_{opt} , так как неизвестна ошибка $\Delta\zeta_N$ из (24). Точное значение $\Delta\zeta_N$ можно получить для однородного океана. Например, для трехточечной аппроксимации второй производной

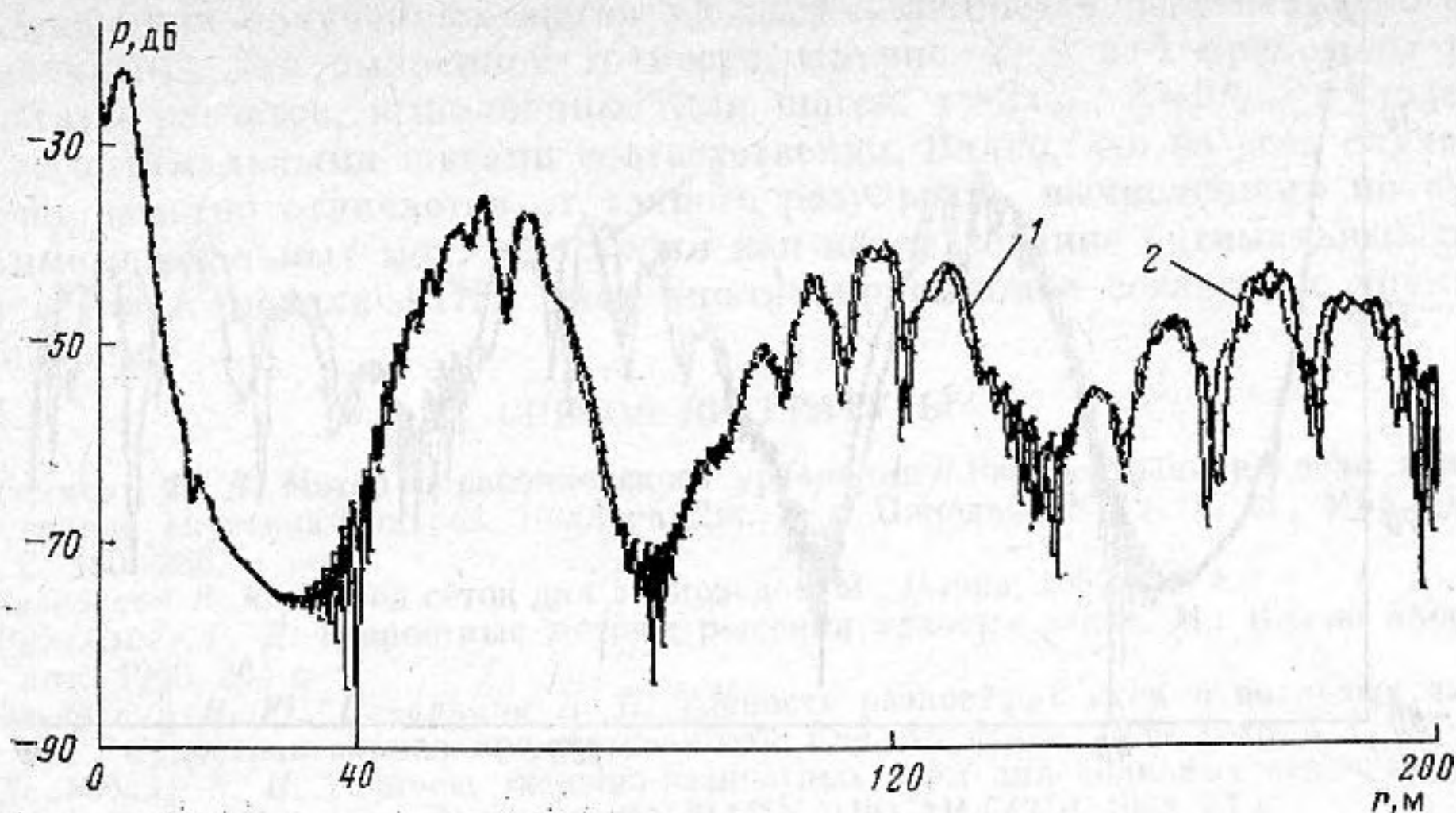


Рис. 1. Сравнение точности КР-моделей: P — потери при распространении, r — расстояние; 1 — модель ШПУ с использованием оптимальных шагов сетки: $\tau=32,4$ м, $h=10,2$ м; 2 — нормальные моды

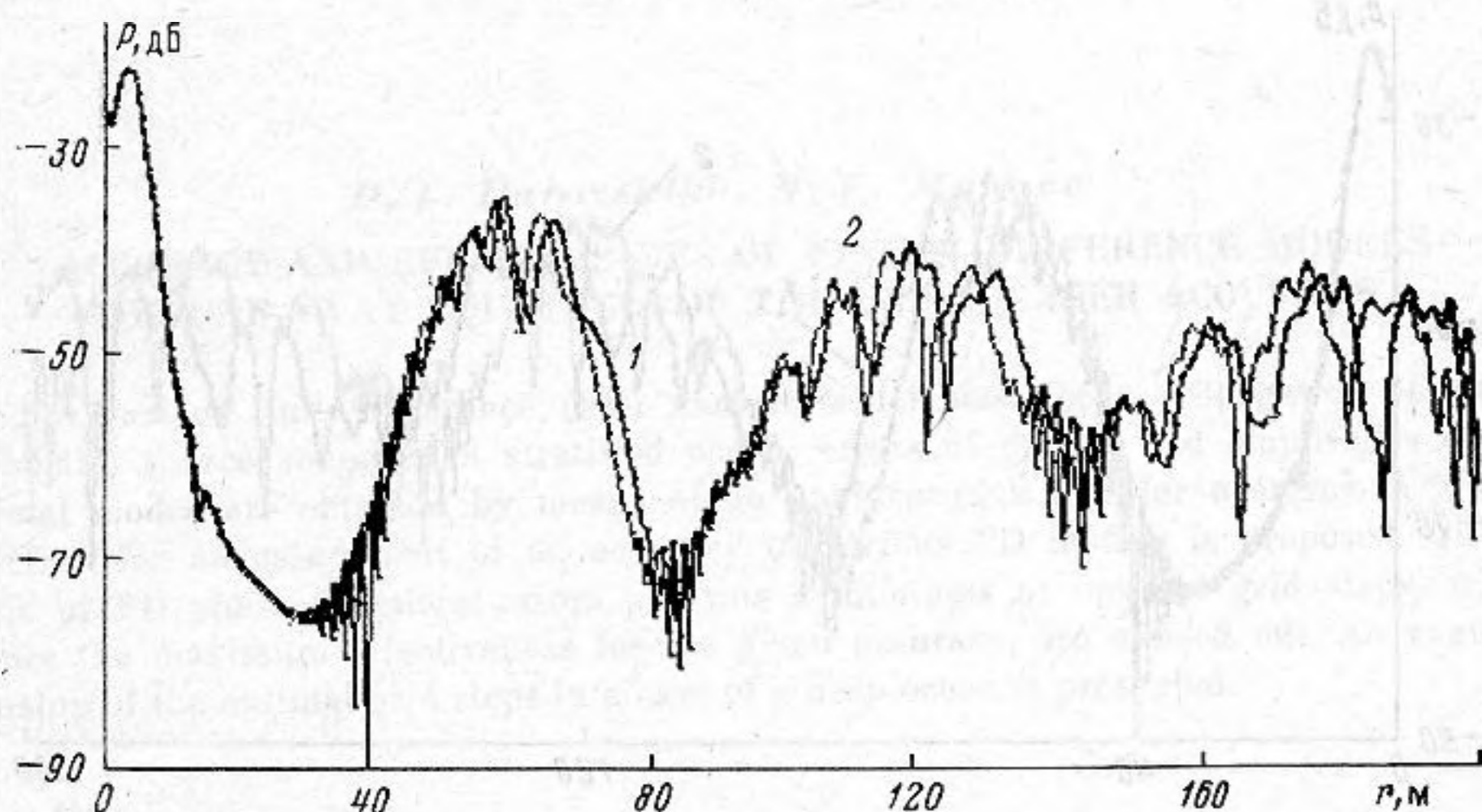


Рис. 2. Сравнение точности КР-моделей: P — потери при распространении, r — расстояние; 1 — модель ШПУ, шаг по горизонтали в 2 раза больше оптимального: $\tau=65,0$ м, $h=10,2$ м; 2 — нормальные моды

$\partial^2/\partial z^2$ имеем

$$\Delta \xi_N = \frac{\xi_N^3 h^2}{24} + O(h^4). \quad (35)$$

Оказывается, оценка (35) дает приблизительно правильное значение для оптимального шага $h_{\text{опт}}$ и в случае океана, неоднородного по глубине. Более того, во всех проведенных численных экспериментах эта оценка обеспечила желаемую точность с некоторым запасом. С учетом (24) и (35) имеем выражение для оптимального шага:

$$h_{\text{опт}} = \frac{2}{k_0 \varepsilon_{\text{угл}}^2} \left(\frac{6C}{k_0 r} \right)^{1/2}. \quad (36)$$

Для пятиточечной аппроксимации оператора $\partial^2/\partial z^2$

$$h_{\text{опт}} = \frac{1}{k_0 \varepsilon_{\text{угл}}^{1/2}} \left(\frac{180C}{k_0 r} \right)^{1/4}$$

и т. д.

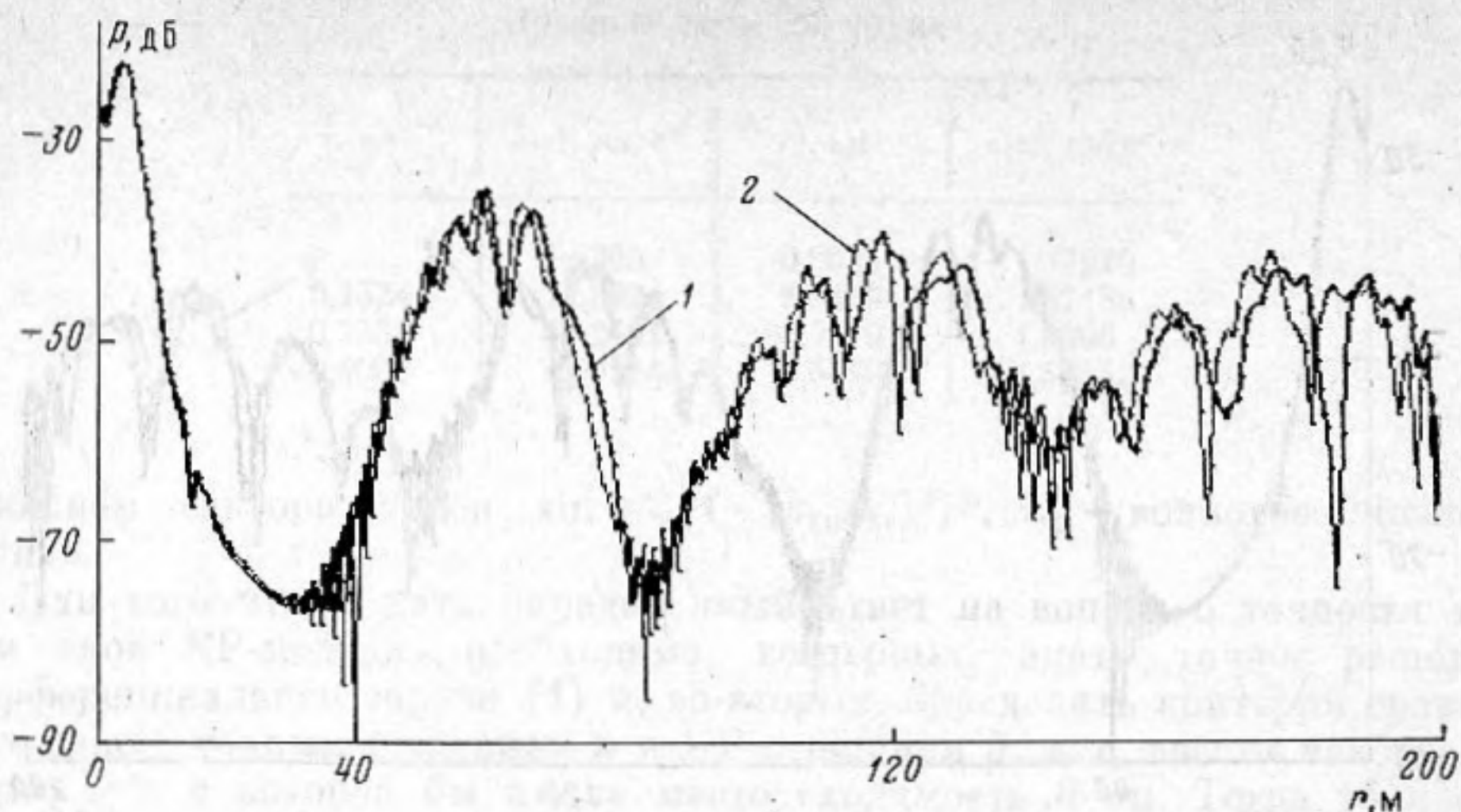


Рис. 3. Сравнение точности КР-моделей: P — потери при распространении, r — расстояние; 1 — модель ШПУ, шаг по вертикали в 2 раза больше оптимального: $\tau = 32,4$ м, $h = 20,3$ м; 2 — нормальные моды

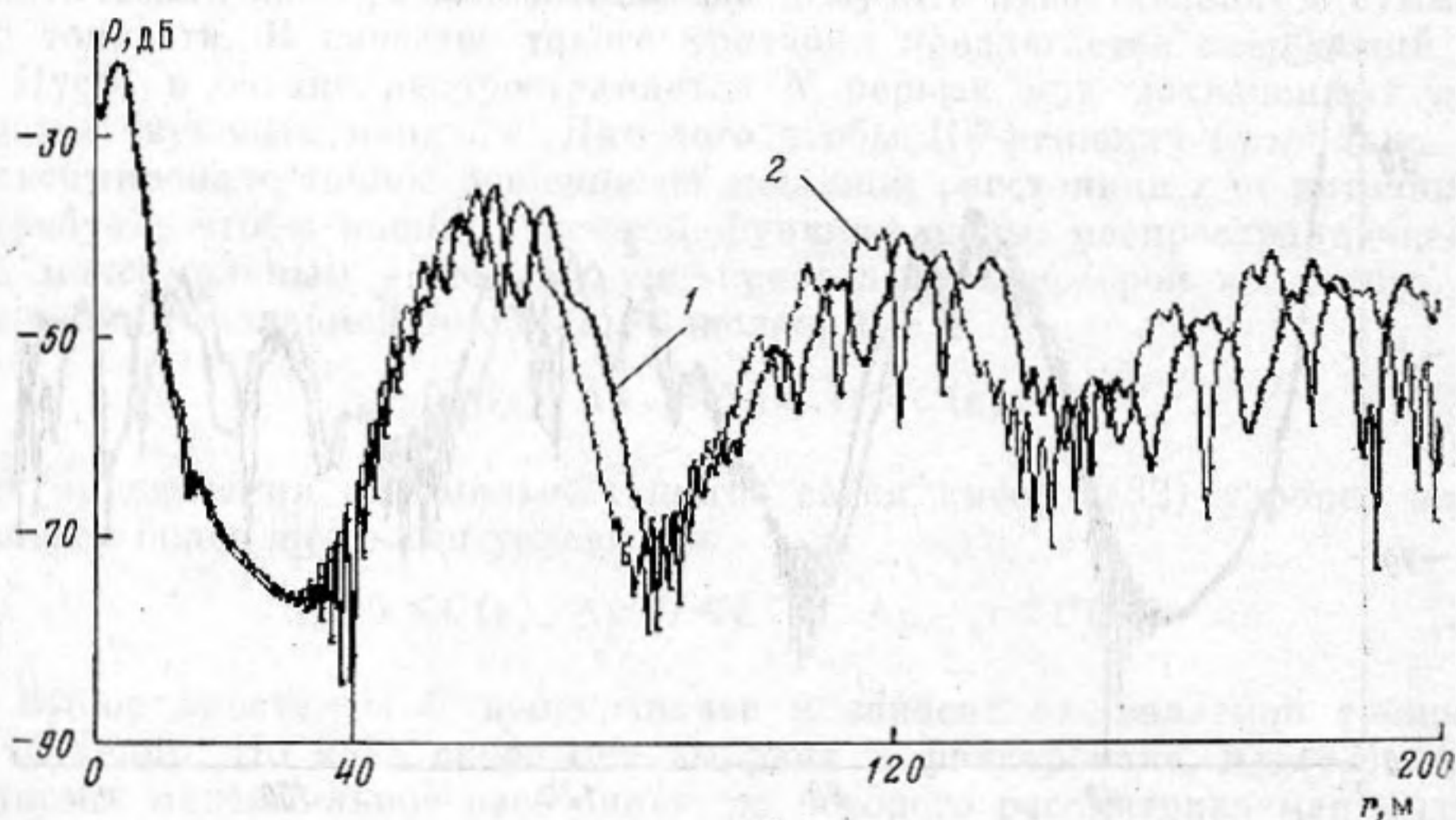


Рис. 4. Сравнение точности КР-моделей: P — потери при распространении, r — расстояние, 1 — модель ПУ с использованием оптимальных шагов сетки: $\tau = 32,4$ м, $h = 10,2$ м; 2 — нормальные моды

Как пример применения приведенной выше техники оценки оптимальных шагов сетки ниже приведен пример расчета потерь при распространении звука в стратифицированном океане глубиной 5,5879 км на частоте 25 Гц. Точечный гармонический источник расположен в точке с координатами $r_0 = 0$, $z_0 = 253,9$ м, приемник движется по глубине 865,5 м от 0 до 200 км. Дно моделируется жидким полупространством с плотностью $1,9176$ г/см³ и скоростью звука $c_{гр} = 1,55552$ км/с. Профиль скорости звука в водном слое приведен в таблице. Оценки для r^{\max} в этом случае дают $r_{ПУ}^{\max} = 21$ км, $r_{ШПУ}^{\max} = 800$ км, т. е. для выбранной нами точности необходимо использовать модель ШПУ. Оценки оптимальных шагов по (34) и (36) дают $\tau_{\text{опт}} = 32,4$ м, $h_{\text{опт}} = 5,2$ м. Более точное значение $\Delta\zeta_N$, вычисленное с помощью программы нормальных мод, дает для оптимального шага значение $h_{\text{опт}} = 10,2$ м. Таким образом, выражение (35), верное для однородного океана, обеспечивает заданную точность и для океана, неоднородного по глубине.

На рис. 1 приведен расчет потерь при распространении с использованием модели ШПУ и оптимальных шагов сетки. Чтобы убедиться,

что значения полученных шагов $\tau_{\text{опт}}$ и $h_{\text{опт}}$ являются действительно оптимальными для выбранной точности, на рис. 2, 3 и 4 приведены результаты расчетов, выполненных для шагов $\tau=2\tau_{\text{опт}}$, $h=2h_{\text{опт}}$ и модели ПУ с оптимальными шагами соответственно. Видно, что во всех случаях расчет заметно отличается от точного результата, вычисленного по программе нормальных мод, в то время как использование оптимальных шагов сетки и модели ШПУ дает вполне приемлемое согласие с точным решением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тапперт Ф. Д.* Метод параболического уравнения // Распространение волн и подводная акустика/Под ред. Келлера Дж. Б. и Пападакиса Дж. С. М.: Мир, 1980. С. 180–226.
2. *Завадский В. Ю.* Метод сеток для волноводов. М.: Наука, 1986. 368 с.
3. *Рихтмайер Р. Д.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 264 с.
4. *Завадский В. Ю., Поварнина Н. П.* Точность разностных схем в волновых задачах // Судостроительная промышленность. Сер. Акустика. 1989. Вып. 4. С. 72–82.
5. *Даровских Д. И.* Точность конечно-разностных схем для волновых задач акустики океана // Препринт. Владивосток: ИАПУ ДВО АН СССР, 1988. 21 с.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
25.01.89

D. I. Darovskikh, N. E. Maltsev

ACCURACY AND EFFECTIVENESS OF FINITE-DIFFERENCE MODELS FOR ONE-WAY EQUATIONS OF THE UNDERWATER ACOUSTICS

For various finite-difference (FD) models, which describe a propagation of monochromatic source sound in a stratified ocean, errors of phases and amplitudes of FD normal modes are obtained by means of an analysis of a transfer operator. A simple criterion for an assessment of an accuracy of various FD models is proposed. On the basis of FD phase functions errors analysis evaluations of optimal grid steps, which secure the maximum effectiveness for the given accuracy, are carried out. An example of using of the optimal grid steps in a case of a deep ocean is presented.