АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 6

УДК 551.463

Н. Г. Кузнецова, С. А. Рыбак

ИССЛЕДОВАНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ МИКРОСТРУКТУРНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В статье исследуется методом функции Грина среднее поле монохроматического источника в волноводе со случайными микроструктурными неоднородностями среды. Флуктуации показателя преломления среды считаются δ-коррелированными. Взаимодействия волн, вызванные случайными неоднородностями среды, влияют на характеристики среднего поля – фазовую скорость и постоянную затухания данного типа нормальных волн. Рассматривается стационарная задача, затем учитываются временные изменения в среде – дрейф случайных неоднородностей.

Для задач рассеяния звука в океанической среде помимо крупномасштабных неоднородностей существенная область масштабов неоднородностей от нескольких сантиметров до нескольких десятков или сотен метров, т. е. микроструктурная и тонкоструктурная турбулентность. Обычно микроструктурные неоднородности с характерными размерами от нескольких сантиметров до единиц метров можно считать изотропными.

Для оценки рассеяния звука на микроструктурных неоднородностях будем предполагать, что длина акустической волны велика по сравнению с масштабом микроструктуры ($k\rho\ll 1$).

Распространение волн в волноводе со случайными неоднородностями в первом порядке теории возмущений, учитывающем однократное рассеяние на мелкомасштабных неоднородностях, было изучено в работах [1, 2]. В работах [4, 5] привлечен метод функции Грина для расчета среднего поля путем решения уравнения Дайсона в применении Бурре, при этом случайной предполагалась форма границ плоского волновода, среда же, заполнявшая волновод, считалась однородной.

Рассмотрим двумерный волновод со случайными микроструктурными неоднородностями, в котором рассчитывается среднее поле точечного гармонического источника. Движение среды описывается неоднородным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta\varphi+k^2[1+\mu(x,z)]\varphi=\delta(x)A_p\sqrt{\frac{2}{H}}\cos q_pz, \tag{1}$$

$\mu(x, z)$ – отклонение показателя преломления среды от среднего значения, равного единице, $|\mu|\ll 1$, $\langle\mu\rangle=0$, k – волновое число, q_p – вертикальное волновое число, H – глубина океана, A_p – амплитуда источника, распределенного поперек волновода по закону $\sim\cos q_pz$. Должны выполняться граничные условия

$$\varphi|_{z=H}=0,\qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}=0. \tag{2}$$

Пусть $\mu(x, z)$ – центрированная δ-корреляционная случайная функция

$$\langle\mu(x,\ z)\mu(x+\xi,\ z+\zeta)\rangle=\langle\mu^2\rangle\rho^2\delta(\xi)\delta(\zeta). \tag{3}$$

Смысл условия δ-корреляции (3) заключается в малости радиуса корреляции ρ сравнительно с рассматриваемыми длинами волн (микроструктурные неоднородности): $k\rho\ll 1$.

Поглощение звука в среде учтем, вводя мнимый множитель в k^2 : $k^2=$

$=k_0^2(1+i\eta)$. Нормальные волны при $\mu=0$ представим в виде

$$\varphi_n=\sqrt{2/H}\cos q_n z\exp(ik_n x),\quad q_n=\pi(n+{}^1/_2)/H,\quad k_n=\sqrt{k^2-q_n^2}.$$

Если частота возбуждения ω не является критической, то при

$$\pi(n+{}^1/_2)/H<\omega/c_0,\quad k_n\approx\sqrt{k_0^2-q_n^2}+i\eta_n k_0,$$

$$\eta_n=k_0\eta/2k_{n0},\quad k_{n0}=\sqrt{k_0^2-q_n^2},$$

при

$$\pi=(n+{}^1/_2)/H>\omega/c_0,\ k_n=id_n\approx i\sqrt{q_n^2-k_0^2}+\eta_n' k_0,\ \eta_n'=k_0\eta/2\sqrt{q_n^2-k_0^2}.$$

На критической частоте возбуждения $k_n=(1+i)q_n\sqrt{\eta}/\sqrt{2}$, $\omega_{n\,kp}=q_n c_0$. Решение уравнения (1) будем искать в следующем виде:

$$\varphi(x,z)=\sum_n^{n_{\max}} f_n(x)\sqrt{2/H}\cos q_n z,\qquad \frac{\pi n_{\max}}{H}\sim\frac{1}{\rho}. \tag{4}$$

Подставив выражение (4) в уравнение (1) и воспользовавшись ортогональностью системы собственных функций, придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для $f_n(x)$:

$$\frac{d^2f_n}{dx^2}+k_n^2f_n+k^2\sum_n\mu_{nm}(x)f_m=A_p\delta(x)\delta_{pn}, \tag{5}$$

где

$$n=0,1,2\ldots+\infty,$$

$$\mu_{nm}(x)=\frac{2}{H}\int_0^H\mu(x,z)\cos q_m z\cdot\cos q_n z\,dz.$$

Систему уравнений (5) перепишем в форме интегральных уравнений:

$$f_n(x)=A_p\delta_{pn}G_{0p}(x)-k^2\int_{-\infty}^{\infty}G_{0n}(x-x_1)\sum_m\mu_{nm}(x_1)f_m(x_1)\,dx_1, \tag{6}$$

где

$$G_{0n}(x)=-i\exp(ik_n|x|)/2k_n.$$

Чтобы получить уравнение Дайсона в приближении Бурре для p-й нормальной волны, достаточно положить в уравнение (5) $n=p$, провести две итерации, и затем усреднить полученные соотношения по μ, после чего заменить под интегралом в правой части полученного выражения $f_{0p}=$ $=A_pG_{0p}(x)$ на $\langle f_p\rangle$. Тогда получим

$$\langle f_p(x)\rangle=A_pG_{0p}(x)+k^4\frac{\langle\mu^2\rangle\rho^2}{H}\sum_m G_{0m}(0)\int_{-\infty}^{\infty}G_{0p}(x-x_1)\langle f_p(x_1)\rangle dx_1. \tag{7}$$

Среднее от произведения $\mu_{mp}(x_1)\mu_{pm}(x_2)$, используемое при нахождении уравнения (7), вычислено в следующем виде:

$$\langle\mu_{mp}(x_1)\mu_{pm}(x_2)\rangle=\langle\mu^2\rangle\rho^2\delta(x_1-x_2)/H. \tag{8}$$

При этом принималось во внимание то, что падающая звуковая волна представляет собой нормальную волну номера p и $\langle A_p\rangle\sim1$. Амплитуда нормальной звуковой волны при $n\neq p$ возникает лишь вследствие рассеяния и величина $\langle A_n\rangle\sim\langle\mu^2\rangle k^2\rho^2$ предполагается малой. Более точно малый параметр задачи, по которому проведено разложение решения для $\langle f_p\rangle$, сформулируется несколько ниже. Переходя в (7) в фурье-представление, получим

$$\langle\hat f_p(s_p)\rangle=A_pG_{0p}(s_p)+k^4\frac{\langle\mu^2\rangle\rho^2}{H}\sum_m G_{0m}(0)\hat G_{0p}(s_p)\langle\hat f_p(s_p)\rangle, \tag{9}$$

$$\hat{f}_p(s_p)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-is_px)f_p(x)\,dx,\quad \hat{G}_{0p}=-1/(s_p^2-k_p^2),\quad G_{0m}(0)=-i/2k_m.$$

Из (9) находим:

$$\langle\hat{f}_p(s_p)\rangle=-A_p\bigg/\left(s_p^2-k_p^2-ik^4\frac{\langle\mu^2\rangle\rho^2}{2H}\sum_m\frac{1}{k_m}\right).\tag{10}$$

Постоянная распространения p-й нормальной волны равна полюсу выражения (10):

$$s_p=\pm k_p\left(1+ik^4\frac{\langle\mu^2\rangle\rho^2}{2k_p^2H}\sum_m\frac{1}{k_m}\right)^{1/2}.\tag{11}$$

В действительности предполагается, что

$$\left|k^4\frac{\langle\mu^2\rangle\rho^2}{2k_p^2H}\sum_m\frac{1}{k_m}\right|\ll 1,$$

и это выражение является малым параметром задачи. Уместно заметить, что величины k_m не обращаются в нуль на критических частотах из-за наличия поглощения в волноводе. Учитывая это, вместо (11) получим

$$s_p\approx\pm k_p\left(1+ik^4\frac{\langle\mu^2\rangle\rho^2}{4k_p^2H}\sum_m\frac{1}{k_m}\right).\tag{12}$$

Последнее выражение выглядит по-разному при $|p|\leqslant n_1$ и $|p|>n_1$, где n_1 равно целому от дроби $(k_0H/\pi)-{}^1/_2$ (предполагается, что ω не совпадает ни с одной из критических мод волновода).

При $|p|\leqslant n_1$

$$s_p=k_p\left(1+\frac{k^4\rho^2\langle\mu^2\rangle}{4k_p^2H}\sum_{m=n_1+1}^{n_{\max}}\frac{1}{d_m}\right)+ik_p\left(\frac{\eta_p}{2}+\frac{k^4\langle\mu^2\rangle\rho^2}{4k_p^2H}\sum_{m=-n_1}^{n_1}\frac{1}{k_m}\right).$$

Ослабление среднего поля на моде $|p|<n_1$ из-за рассеяния учитывает переход энергии во все прочие нормальные волны с номерами $|p|<n_1$. Изменение волнового числа, а следовательно, скорости распространения волны происходит из-за реактивной связи с закритическими (неоднородными) нормальными волнами.

При $|p|>n_1$

$$s_p=id_p\left(1-\frac{k^4\langle\mu^2\rangle\rho^2}{4d_p^2H}\sum_{m=n_1+1}^{n_{\max}}\frac{1}{d_m}\right)-d_p\left(\frac{\eta_p}{2}-\frac{k^4\langle\mu^2\rangle\rho^2}{4d_p^2H}\sum_{m=-n_1}^{n_1}\frac{1}{k_m}\right).$$

Далее учтем влияние временных изменений в среде, а именно дрейфа микроструктурных неоднородностей на среднее поле в волноводе. Будем считать, что флуктуации показателя преломления среды зависят от времени следующим образом: $\mu(x-vt,z)$.

Тогда скалярное поле $\varphi(x,z,t)$ в волноводе с полностью отражающими поверхностями при $z=0$ и $z=H$ удовлетворяет волновому уравнению в виде

$$\varphi_{xx}+\varphi_{zz}-\frac{1}{c^2}[1+\mu(x-vt,z)]\varphi_{tt}=0.\tag{13}$$

Уравнение необходимо дополнить стандартными граничными условиями на поверхности и дне.

Представим $\varphi(x,z,t)$ в виде разложения

$$\varphi(x,z,t)=\sum_n\varphi_n(x,t)\psi_n(z)$$

по полной системе собственных ортонормированных функций $\psi_n(z)$.

После подстановки суммы, домножая уравнение (13) на $\psi_m(z)$ и интегрируя его по z в пределах глубины океана от 0 до H, введем новую переменную $\xi = x - vt$. Тогда получим следующее уравнение:

$$\varphi_{n\xi\xi} - q_n^2 \varphi_n - \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial \xi}\right]^2 \varphi_n = \frac{1}{c^2}\sum_m \mu_{nm}(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial \xi}\right]^2 \varphi_m, \tag{14}$$

где

$$\mu_{nm}(\xi) = \int_0^H \mu(\xi, z)\,\psi_n(z)\,\psi_m(z)\,dz.$$

Представив $\varphi_n = \Phi^n(\xi)\exp(-i\omega t)$ для гармонического сигнала, получим

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Phi_{\xi\xi}{}^n - 2i\frac{\omega v}{c^2}\Phi_\xi{}^n + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - q_n{}^2\right)\Phi^n =$$
$$= \sum_m \mu_{nm}(\xi)\left\{-\frac{\omega^2}{c^2}\Phi^m + 2i\frac{\omega v}{c^2}\Phi_\xi{}^m + \frac{v^2}{c^2}\Phi_{\xi\xi}{}^m\right\}. \tag{15}$$

Усредним уравнение (15):

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\langle\Phi_{\xi\xi}{}^n\rangle - 2i\frac{\omega v}{c^2}\langle\Phi_\xi{}^n\rangle + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - q_n{}^2\right)\langle\Phi^n\rangle =$$
$$= \sum_m\left\{-\frac{\omega^2}{c^2}\langle\mu_{nm}\Phi^m\rangle + 2i\frac{\omega v}{c^2}\langle\mu_{nm}\Phi_\xi{}^m\rangle + \frac{v^2}{c^2}\langle\mu_{nm}\Phi_{\xi\xi}{}^m\rangle\right\}. \tag{16}$$

Разобьем полное поле $\Phi^n(\xi)$ на среднее поле и флуктуационную часть $\delta\Phi^n$ согласно равенству

$$\Phi^n = \langle\Phi^n\rangle + \delta\Phi^n, \tag{17}$$

причем $\langle\delta\Phi^n\rangle = 0$. Тогда, учитывая, что $\langle\mu_{nm}\rangle = 0$, уравнение (16) можно переписать в виде

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\langle\Phi_{\xi\xi}{}^n\rangle - 2i\frac{\omega v}{c^2}\langle\Phi_\xi{}^n\rangle + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - q_n{}^2\right)\langle\Phi^n\rangle =$$
$$= \sum_m\left\{-\frac{\omega^2}{c^2}\langle\mu_{nm}\delta\Phi^m\rangle + 2i\frac{\omega v}{c^2}\langle\mu_{nm}\delta\Phi_\xi{}^m\rangle + \frac{v^2}{c^2}\langle\mu_{nm}\delta\Phi_{\xi\xi}{}^m\rangle\right\}. \tag{18}$$

Подставим (17) в уравнение (15) и вычтем затем из него уравнение (18):

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\delta\Phi_{\xi\xi}{}^n - 2i\frac{\omega v}{c^2}\delta\Phi_\xi{}^n + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - q_n{}^2\right)\delta\Phi^n =$$
$$= \sum_m \mu_{nm}\left[-\frac{\omega^2}{c^2}\langle\Phi^m\rangle + 2i\frac{\omega v}{c^2}\langle\Phi_\xi{}^m\rangle + \frac{v^2}{c^2}\langle\Phi_{\xi\xi}{}^m\rangle\right]. \tag{19}$$

В этом уравнении в правой части отброшены члены, которые в конечном результате оказываются пропорциональными $\mu_{nm}{}^3$. Будем решать уравнение (19) методом функции Грина:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)G_{\xi\xi}{}^n - 2i\frac{\omega v}{c^2}G_\xi{}^n + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - q_n{}^2\right)G^n = \delta(\xi), \tag{20}$$

где при

$$\xi > 0 \quad G^n(\xi) = \frac{1}{1 - v^2/c^2}\,\frac{\exp(il_1\xi)}{i(l_1 - l_2)},$$

$$\xi < 0 \quad G^n(\xi) = \frac{1}{1 - v^2/c^2}\,\frac{\exp(il_2\xi)}{i(l_1 - l_2)}.$$

Из уравнения (20) после подстановки $G^n(\xi)$ получим

$$l^2-2\varkappa_1 l-\varkappa_2=0,$$

где

$$\varkappa_1=\frac{\omega v}{c^2(1-v^2/c^2)}, \quad \varkappa_2=\frac{\omega^2(c^2-q_n{}^2)}{1-v^2/c^2},$$

откуда

$$l_{1,2}=\varkappa_1\pm\sqrt{\varkappa_1{}^2+\varkappa_2}.$$

Тогда для $\delta\Phi^n$ можно написать следующее решение:

$$\delta\Phi^n(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_m \mu_{nm}(\xi_1)\left[-\frac{\omega^2}{c^2}\langle\Phi^m\rangle+2i\frac{\omega v}{c^2}\langle\Phi_\xi{}^m\rangle+\frac{v^2}{c^2}\langle\Phi_{\xi\xi}{}^m\rangle\right]G^n(\xi-\xi_1)\,d\xi_1. \tag{21}$$

До сих пор мы не делали предположений относительно способа возбуждения нормальных волн $\langle\Phi^m\rangle$. Воспользуемся тем же рассуждением, что и в начале данной работы (уравнение (1) и замечание после (8)). При этом некоторая мода $\langle\Phi^p\rangle$ оказывается выделенной, поскольку она существует и в отсутствие неоднородностей μ.

Тогда вместо решения (21) следует написать

$$\delta\Phi^m(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu_{mp}(\xi_1)\left[-\frac{\omega^2}{c^2}\langle\Phi^p\rangle+2i\frac{\omega v}{c^2}\langle\Phi_\xi{}^p\rangle+\frac{v^2}{c^2}\langle\Phi_{\xi\xi}{}^p\rangle\right]G^m(\xi-\xi_1)\,d\xi_1. \tag{22}$$

Для замыкания уравнения (18) следует подставить в него вместо $\delta\Phi^m$ выражение (22), в результате чего получим

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\langle\Phi_{\xi\xi}{}^p\rangle-2i\frac{\omega v}{c^2}\langle\Phi_\xi{}^p\rangle+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-q_p{}^2\right)\langle\Phi^p\rangle=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_m\langle\mu_{mp}(\xi)\mu_{pm}(\xi_1)\rangle G^m(\xi-\xi_1)\left[-\frac{\omega^2}{c^2}\langle\Phi^p\rangle+2i\frac{\omega v}{c^2}\langle\Phi_\xi{}^p\rangle+\frac{v^2}{c^2}\langle\Phi_{\xi\xi}{}^p\rangle\right]\times$$

$$\times\left[-\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{2\omega v}{c^2}k_p-\frac{v^2}{c^2}k_p{}^2\right]d\xi_1. \tag{23}$$

Среднее от произведения $\mu_{mp}(\xi)\mu_{pm}(\xi_1)$ подставим, как и ранее, в виде (8). Тогда вместо (23) получим следующее уравнение:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\langle\Phi_{\xi\xi}{}^p\rangle-2i\frac{\omega v}{c^2}\langle\Phi_\xi{}^p\rangle+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-q_p{}^2\right)\langle\Phi^p\rangle=$$

$$=\frac{\langle\mu^2\rangle\rho^2}{H}\left(\frac{\omega^2}{c^2}+\frac{2\omega v}{c^2}k_p+\frac{v^2}{c^2}k_p{}^2\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\omega^2}{c^2}\langle\Phi^p\rangle-2i\frac{\omega v}{c^2}\langle\Phi_\xi{}^p\rangle-\frac{v^2}{c^2}\langle\Phi_{\xi\xi}{}^p\rangle\right)\sum_m G^m(0), \tag{24}$$

где

$$G^m(0)=1/2i\sqrt{\frac{\omega^2v^2}{c^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-q_m{}^2\right)(1-v^2/c^2)}.$$

Будем искать решение $\langle\Phi^p(\xi)\rangle$ в виде плоской волны: $\langle\Phi^p\rangle=\exp(is_p\xi)$. Подставляя экспоненту в уравнение (24), найдем следующее дисперсионное уравнение:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}a\right)s_p{}^2-\frac{2\omega v}{c^2}a\cdot s_p-\frac{\omega^2}{c^2}a+q_p{}^2=0,$$

где

$$a=1-\langle\mu^2\rangle\frac{\rho^2}{H}\left(\frac{\omega^2}{c^2}+\frac{2\omega v}{c^2}k_p+\frac{v^2}{c^2}k_p{}^2\right)\sum_m G^m(0).$$

Решая квадратичное уравнение для s_p, получим

$$s_p=\left[\frac{2\omega v}{c^2}a\pm\sqrt{\frac{4\omega^2v^2}{c^4}a^2+4\left(1-\frac{v^2}{c^2}a\right)\left(\frac{\omega^2}{c^2}a-q_p{}^2\right)}\right]\Big/\left(1-\frac{v^2}{c^2}a\right). \quad (25)$$

При отсутствии движения неоднородностей ($v=0$) вместо (25) придем к выражению, совпадающему с (11).

При рассмотрении выражения (25) все качественные выводы остаются прежними, как и для случая $v=0$, лишь количественные величины затухания среднего поля и изменения фазовой скорости p-й волны будут иметь добавки, пропорциональные $\frac{v}{c}$. Действительно, из (25) нетрудно получить с точностью до v/c

$$s_p=k_p\left(1+\frac{c_p}{c}\frac{v}{c}\right)+ik_p\left\{\frac{\langle\mu^2\rangle\rho^2k^4}{4Hk_p{}^2}\sum_m\frac{1}{k_m}+\frac{\langle\mu^2\rangle\rho^2k^2}{H}\frac{c_p}{c}\frac{v}{c}\sum_m\frac{1}{k_m}\right\} \quad (26)$$

где $c_p=\omega/k_p$ — фазовая скорость p-й нормальной волны. Из этого выражения следует, что величина v/c умножается на c_p/c. В окрестности критической частоты $c_p\to\infty$, поэтому добавка $\Delta s_p(v/c)$ может быть весьма большой. Например, при $v/c\sim10^{-3}$ и $c_p/c\sim10^3$ величина добавки $\Delta s_p(v/c)$ в затухании среднего поля имеет тот же порядок, что и первый член в фигурной скобке (26).

Таким образом, наличие дрейфа влияет как на скорость, так и на пространственное затухание когерентной части поля нормальной волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исакович М. А.* Рассеяние звуковых волн на малых неоднородностях в волноводе // Акуст. журн. 1957. Т. 3. № 1. С. 27–45.
2. *Лапин А. Д.* Звукоизоляция в волноводах и рассеяние звука в нерегулярных волноводах и на неровных поверхностях // Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: Акуст. инст. 1970. 322 с.
3. *Басс Ф. Г., Фрейлихер В. Д., Фукс И. М.* Среднее поле точечного источника в волноводе с шероховатыми стенками // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12. № 10. С. 1521–1531.
4. *Фрейлихер В. Д., Фукс И. М.* Метод функции Грина для уравнения Гельмгольца с возмущенными граничными условиями // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. № 1. С. 98–105.
5. *Рыбак С. А.* Постоянные распространения нормальных волн в волноводе со случайными неоднородностями // Сб. Акустика в судостроении. Вып. 213. Л.: Судостроение, 1974. С. 127–138.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20.06.89

N. G. Kuznetsova, S. A. Rybak

INVESTIGATION OF AN AVERAGE FIELD IN A WAVEGUIDE WITH RANDOM MICROSCALE INHOMOGENEITIES

An average field of a monochromatic source in a waveguide with random microscale inhomogeneities is investigated by means of the Green's function method. Fluctuations of a refraction index are supposed to be delta-correlated. Waves interactions caused by the random medium inhomogeneities influence on average field characteristics — a phase velocity and an attenuation constant of a given normal wave type. At first the stationary problem is considered and then time variations of a random inhomogeneities mean drift are taken into account.