

УДК 534.232

© 1990 г.

И. Л. Рубанов, Г. М. Свердлин

**ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА РАДИАЛЬНО КОЛЕБЛЮЩИМСЯ
ОТРЕЗКОМ ТРУБЫ**

Решена задача об излучении звука радиально колеблющимся отрезком трубы с бесконечно тонкими стенками. Приведены результаты исследования ближнего поля и импеданса излучения исследуемой модели, в частности зависимости составляющих импеданса от частоты возбуждения, высоты и радиуса отрезка трубы.

Рассмотрим звуковое поле, создаваемое в пространстве осесимметричными радиальными колебаниями отрезка трубы высотой $2H$ с бесконечно тонкими стенками, средним радиусом a . В математической постановке задача заключается в определении функции $p(r, z)$ — звукового давления, являющейся решением уравнения Гельмгольца, удовлетворяющей условиям излучения на бесконечности и граничным условиям на внешней ($r=a_+$) и внутренней ($r=a_-$) поверхностях трубы

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=a_{\pm}} = f(z); \quad |z| \leq H, \quad (1)$$

где (r, z) — цилиндрические координаты с началом в центре отрезка трубы; ω — угловая частота; ρ и c — плотность и скорость звука в среде, в которую помещена труба; $f(z)$ — функция, описывающая распределение колебательной скорости по высоте трубы.

Решение будем вести в предположении, что $f(z)$ — функция четная, т. е. $f(z) = f(-z)$.

В работе [1] задача в подобной постановке была сведена к численному решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, в работе [2] — к сингулярному уравнению первого рода на конечном промежутке, в работе [3] для близких по структуре задач дифракции электромагнитных волн на конечных телах предложен приближенный метод, основанный на факторизации, а в работе [4] — метод сведения задачи к численному решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Ниже предлагается решение, основанное на использовании свойств косинус-преобразования Фурье функций Бесселя.

Будем искать звуковое поле в виде интеграла Фурье [1]

$$p(r, z) = \begin{cases} p_+ = i\rho c \int_0^{\infty} \gamma A(t) H_0^{(1)}(\gamma kr) J_1(\gamma ka) \cos(tkz) dt; & r \geq a_+, \\ p_- = i\rho c \int_0^{\infty} \gamma A(t) H_1^{(1)}(\gamma ka) J_0(\gamma kr) \cos(tkz) dt, & r \leq a_-. \end{cases} \quad (2)$$

где $\gamma = \sqrt{1-t^2}$; $J_n(x)$ и $H_n(x)$ — функция Бесселя и Ханкеля соответственно, k — волновое число; $A(t)$ — неизвестная весовая функция, удовлетворяю-

щая парным интегральным уравнениям [1]

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \gamma^2 A(t) H_1^{(1)}(\gamma ka) J_1(\gamma ka) \cos(tkz) dt &= -f(z); \quad |z| < H, \\ \int_0^{\infty} A(t) \cos(tkz) dt &= 0; \quad |z| > H. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Неизвестную весовую функцию $A(t)$ отыщем в виде ряда Неймана [5]

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_{2n}(tkH). \quad (4)$$

Подставив разложение (4) в систему парных интегральных уравнений (3) и воспользовавшись равенством [6]

$$\int_0^{\infty} J_{2n}(ax) \cos(xy) dx = 0; \quad a < y < \infty,$$

несложно заметить, что выбор весовой функции $A(t)$ в форме ряда Неймана позволяет тождественно удовлетворить второе уравнение системы (3), которая в этом случае переходит в уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{\infty} \gamma^2 J_{2n}(tkH) H_1^{(1)}(\gamma ka) J_1(\gamma ka) \cos(tkz) dt = -f(z); \quad |z| < H. \quad (5)$$

Вследствие того, что $\gamma^2 = 1 - t^2$,

$$\int_0^{\infty} \gamma^2 \Phi(t) \cos(tkz) dt = \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{dz^2} \right) \Phi(t) \cos(tkz) dt.$$

Предположив справедливость замены последовательности дифференцирования и интегрирования, получаем следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \Phi(z) = -f(z), \quad (6)$$

где

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{\infty} J_{2n}(tkH) H_1^{(1)}(\gamma ka) J_1(\gamma ka) \cos(tkz) dt.$$

Решением уравнения (6), описывающего вынужденные колебания, является функция [7]

$$\Phi(z) = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz - \frac{1}{k} \int_{C_3}^z f(z) \sin(kz - kt) dt, \quad (7)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Уравнение (7) может быть решено численно методом граничной коллокации — путем удовлетворения в точках $\{z_n\} \in [0; H] n=0; 1; \dots N$, при этом порядок системы должен быть увеличен на три для вычисления по-

стоянных C_1, C_2, C_3 , а несобственные интегралы $I = \int_0^{\infty} J_{2n}(tkH) \times$

Рис. 1. Зависимость составляющих импеданса излучения от порядка системы N : 1 — r_s ; 2 — x_s

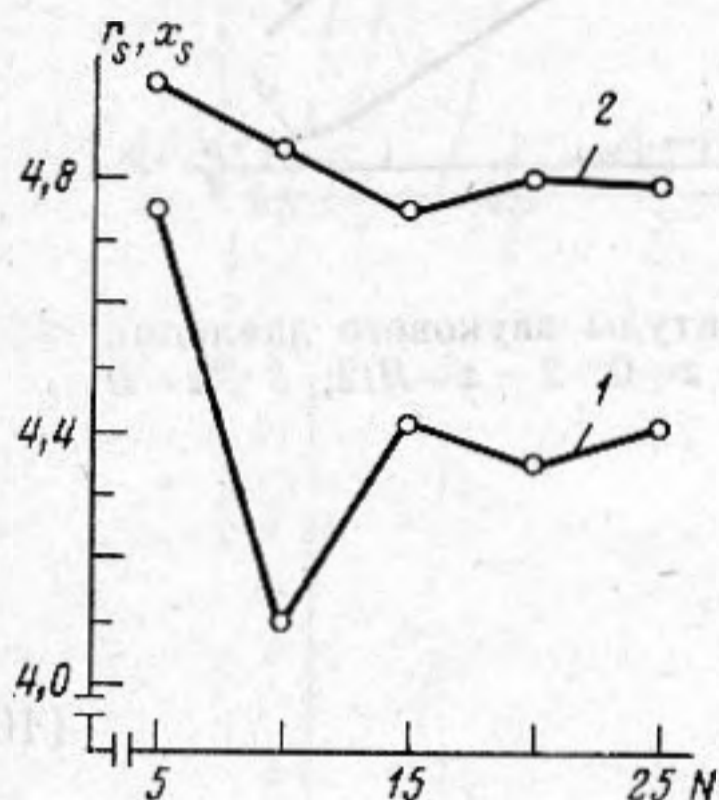


Рис. 1

Рис. 2. Распределение амплитуды звукового давления по поверхности трубы: а — $ka=1$; б — $ka=2$; 1 — p_- ; 2 — p_+

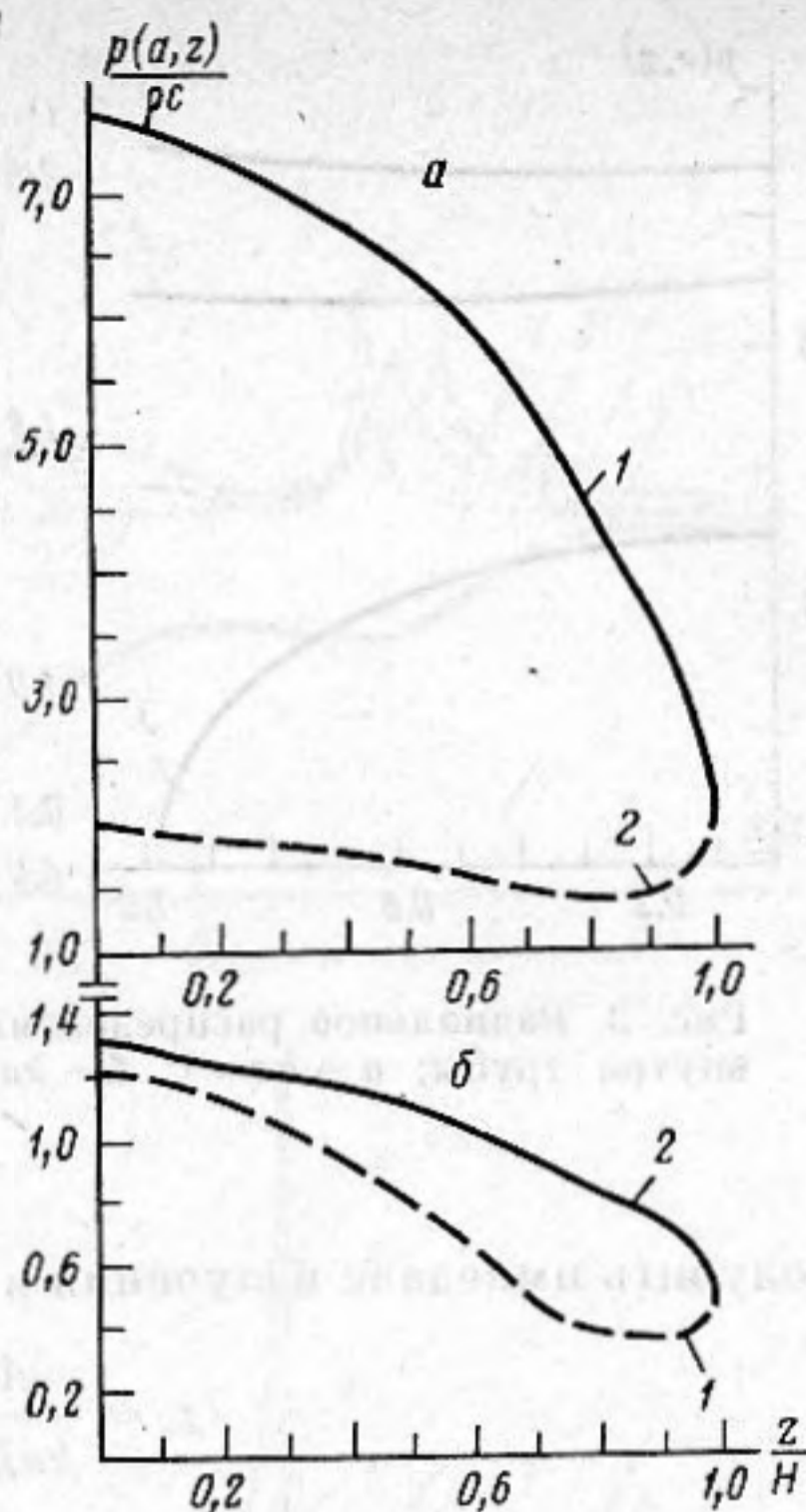


Рис. 2

$\times H_1^{(1)}(\gamma ka) J_1(\gamma ka) \cos(tkz) dt$, входящие в систему алгебраических уравнений в виде коэффициентов при неизвестных $\{A_n\}$, весьма быстро сходятся.

Таким образом, звуковое поле с учетом выражения (4) может быть записано в следующем виде:

$$p(r, \varphi) = \begin{cases} i\rho c \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{\infty} \gamma J_{2n}(tkH) H_0^{(1)}(\gamma kr) J_1(\gamma ka) \cos(tkz) dt; & r > a \\ i\rho c \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{\infty} \gamma J_{2n}(tkH) H_1^{(1)}(\gamma ka) J_0(\gamma kr) \cos(tkz) dt; & r < a \end{cases} \quad (8)$$

Безразмерный импеданс излучения рассматриваемой модели источника

$$z_s = r_s - ix_s = (\rho c H)^{-1} \int_0^H [p_+(a, z) - p_-(a, z)] dz. \quad (9)$$

Подставив в выражение (9) равенства (8), воспользовавшись выражением для Вронскиана функций Бесселя и Ханкеля, а также следующими соотношениями [6]:

$$\int_0^{\infty} x^{-1} J_0(ax) \sin(xy) dx = \begin{cases} \arcsin(y/a); & 0 < y < a, \\ \frac{\pi}{2}; & a < y < \infty; \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} x^{-1} J_\nu(ax) \sin(xy) dx = \begin{cases} \nu^{-1} \sin[\nu \arcsin(y/a)]; & 0 < y < a, \\ \frac{a^\nu \sin(2^{-1}\nu\pi)}{\nu [y + (y^2 - a^2)^{0.5}]^\nu}, & a < y < \infty, \end{cases}$$

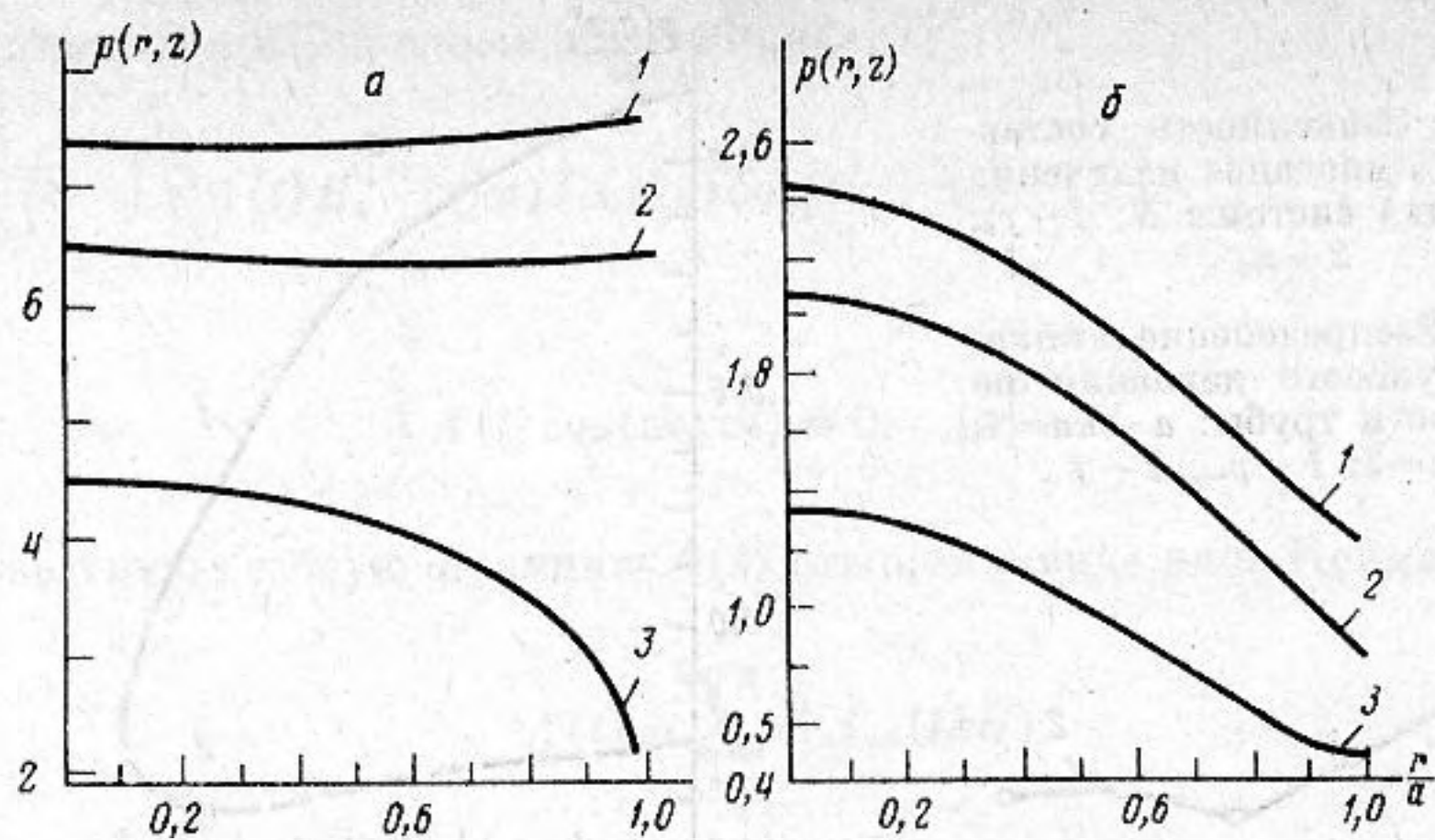


Рис. 3. Радиальное распределение амплитуды звукового давления внутри трубы: а — $ka=1$; б — $ka=2$; 1 — $z=0$; 2 — $z=H/2$; 3 — $z=H$

можно получить импеданс излучения в виде:

$$z_s = \frac{A_0}{k a k H} \quad (10)$$

Скорость сходимости полученного решения иллюстрируется зависимостью составляющих безразмерного импеданса излучения исследуемой модели при $ka=kH=1$ и равномерном распределении амплитуд $f(z)=1$ от порядка системы (7) N (рис. 1). Быстрая сходимость результатов очевидна, однако стабилизация решения наблюдается при более высоком порядке системы N , чем в работе [1].

Ниже приведены результаты исследования ближнего поля и импеданса излучения рассматриваемой модели.

На рис. 2 изображено распределение звукового давления по поверхности трубы $ka=kH$. В точке $z=H$ амплитуды звукового давления на внутренней и наружной поверхностях трубы равны, что объясняется выполнением в этой точке условия сопряжения по давлению. При $ka=1,0$ амплитуда звукового давления на внутренней поверхности трубы во всех точках, исключая край $z=H$, превосходит амплитуду на наружной поверхности ($p_- > p_+$); при $ka=2$ наблюдается обратное явление; максимальная величина звукового давления на колеблющейся поверхности наблюдается при $z=0$.

На рис. 3 приведено распределение амплитуды звукового поля внутри трубы $ka=kH$ вдоль радиуса $p_-(r, z)$ для трех значений z . Распределение звукового поля внутри отрезка трубы носит сложный характер и зависит от его волнового радиуса. Так, если при $ka=2$ максимум звукового давления во всех сечениях по z наблюдается на оси трубы ($r=0$), а амплитуда звукового давления плавно убывает по мере роста радиуса r и достигает минимума на стенке трубы ($r=a$), то при $ka=1$ подобный рельеф звуковое поле имеет только в горле трубы $z=H$. При $z=0$ амплитуда звукового давления растет с ростом радиуса и достигает максимума на стенке трубы ($r=a$), а при $z=H/2$ амплитуда звукового давления имеет локальный минимум при $r=0,6a$. Однако в обоих этих сечениях изменения амплитуды звукового давления не превышают 6%, и с достаточной для инженерной практики точностью звуковое давление может считаться постоянным вдоль радиуса. Абсолютный максимум звукового давления наблюдается при $z=0$ на стенке трубы при $ka=1$ и на оси при $ka=2$.

На рис. 4 приведены частотные зависимости составляющих безразмерного импеданса излучения отрезка трубы r_s и x_s при различных отношениях высоты трубы к ее радиусу. Так же как и в случаях излучения звука внутренней поверхностью бесконечной трубы и экваториальным сфери-

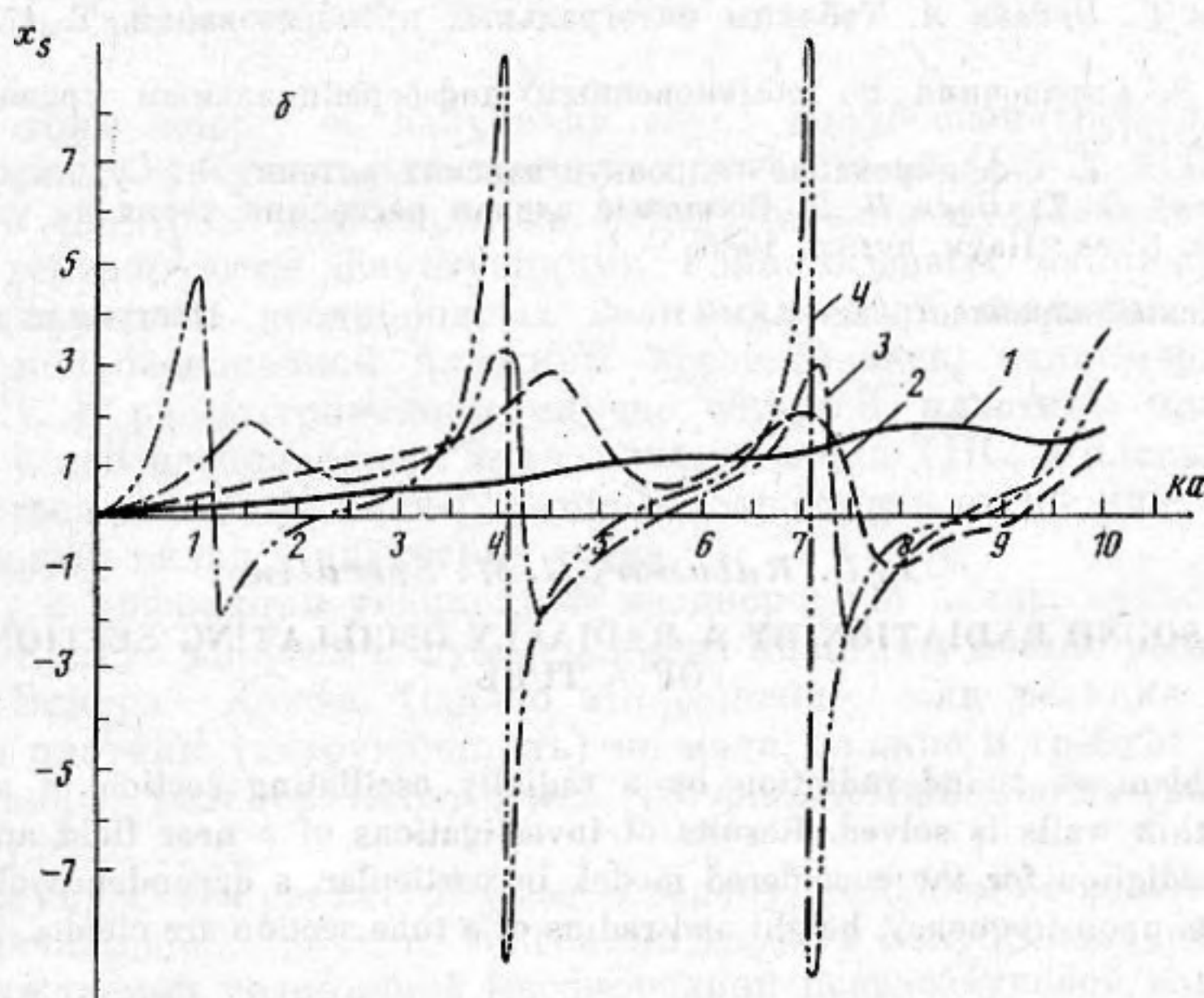
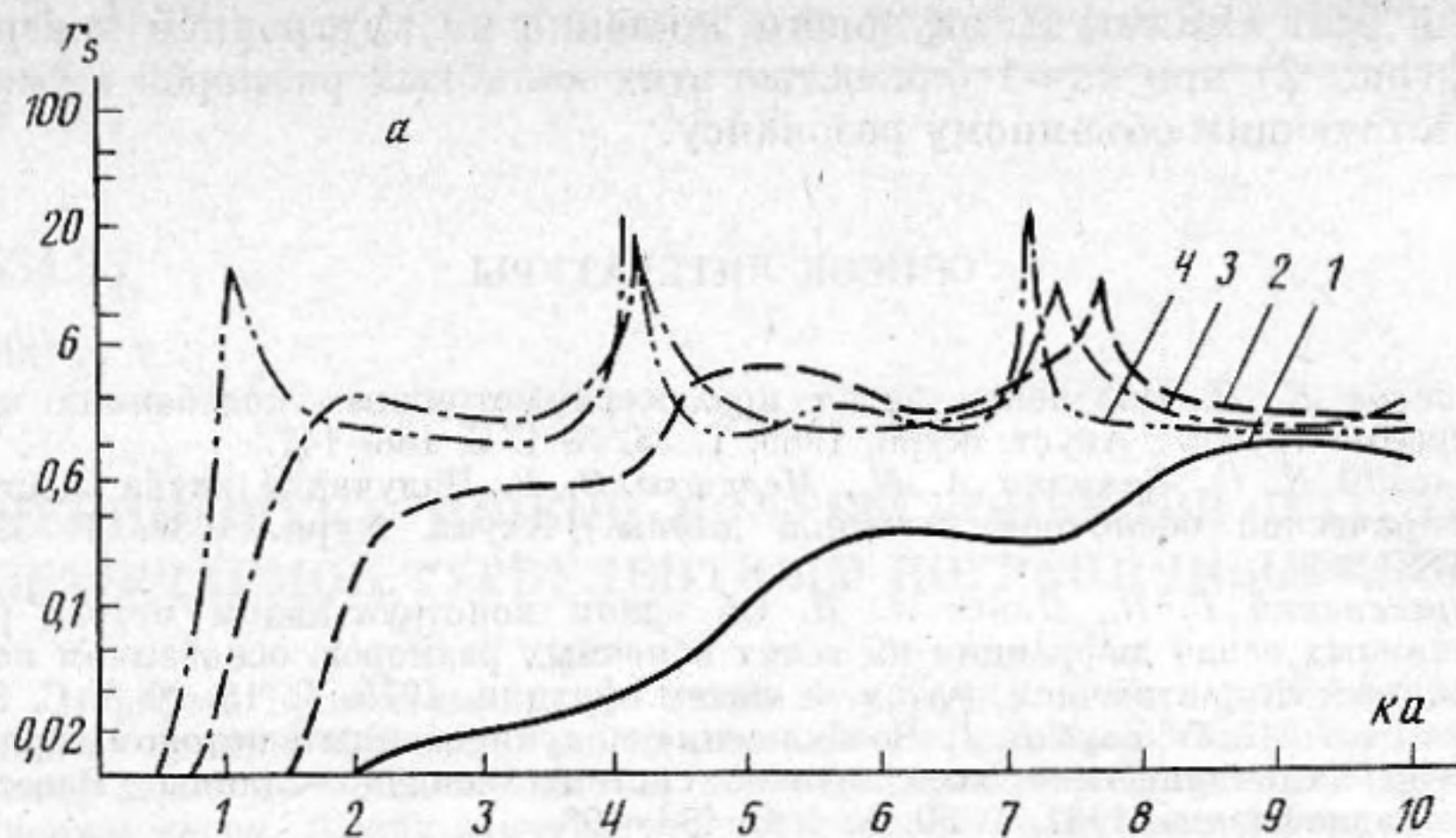


Рис. 4. Частотная зависимость импеданса излучения: а — r_s ; б — x_s . 1 — $H/a=0,1$; 2 — $H/a=0,25$; 3 — $H/a=0,5$; 4 — $H/a=1,0$

ческим поясом [8, 9], рассматриваемой модели присущи резонансные явления. На низких частотах реактивная составляющая импеданса излучения имеет характер массы, а при $ka \rightarrow 0$ $x_s \rightarrow 0$. На частотах антирезонанса — смене характера резонанса трубы с инерционного на упругий — наблюдается максимум активной составляющей импеданса излучения. Величина реактивной составляющей импеданса излучения в отличие от случая излучения внутренней поверхностью бесконечной трубы [8, 9] конечна (не претерпевает бесконечных разрывов), что связано с наличием потерь на излучение во внешнее пространство. Чем больше отношение высоты трубы к ее радиусу H/a , тем при меньших волновых радиусах ka наблюдается первый антирезонанс, называемый в литературе объемным резонансом [9]. Следует отметить, что при соответствующих величинах a/λ и H/a значения составляющих импеданса излучения z_s с точностью графического построения совпадают с результатами работы [1].

Отметим, что в рассматриваемом диапазоне частот $ka \leq 10$ при $H/a=0,1$ антирезонанс отсутствует, при $H/a=0,25$ наблюдается один антирезонанс; при $H/a=0,5$ — два антирезонанса, а при $H/a=1,0$ — три антирезонанса.

Сопоставление результатов расчетов ближнего поля отрезка трубы и его импеданса излучения позволяет объяснить отмеченный выше значи-

тельный рост амплитуды звукового давления на внутренней поверхности трубы (рис. 2) при $ka=1$ близостью этих волновых размеров к размерам, соответствующим объемному резонансу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шендеров Е. Л. Излучение звука при осесимметричных колебаниях конечной открытой трубы. // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 138–147.
2. Басовский В. Г., Гомилко А. М., Мелешко В. В. Излучение звука жесткой цилиндрической оболочкой конечной длины. // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 6. С. 983–989.
3. Воскресенский Г. В., Плисс А. И. Об одном конструктивном методе решения граничных задач дифракции на телах конечных размеров, основанном на факторизации // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1975. Т. 15. № 3. С. 672–681.
4. Пазыкин Л. А., Сологуб В. Г. Возбуждение модулированным потоком заряженных частиц цилиндрической замедляющей системы конечной длины // Известия вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 4. С. 486–498.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
8. Глазанов В. Е. Экранирование гидроакустических антенн. Л.: Судостроение, 1986.
9. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. Киев.: Наук. думка, 1986.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила в редакцию
10.11.89

I. L. Rubanor, G. M. Sverdlin

SOUND RADIATION BY A RADIALLY OSCILLATING SECTION OF A TUBE

A problem on sound radiation by a radially oscillating section of a tube with infinitely thin walls is solved. Results of investigations of a near field and an impedance of radiation for the considered model, in particular, a dependence of impedance constituents upon frequency, height and radius of a tube section are cited.