

УДК 534.232

© 1990 г.

*И. А. Урусовский***ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ МАЛЫХ ВОЛНОВЫХ РАЗМЕРОВ СО СКАЧКООБРАЗНО ИЗМЕНЯЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Рассчитана энергетическая нагрузка излучателя малых волновых размеров, излучающий поршень которого колеблется с заданной амплитудой так, что он удерживается в крайних положениях внутренними силами посредством защелки в течение произвольных промежутков времени и переходит из одного крайнего положения в другое по закону резонансных колебаний.

Как известно, при нерезонансном излучении звука излучателями малых волновых размеров на акустическое излучение идет только незначительная часть мощности, развиваемой первичным двигателем соответствующей колебательной системы [1]. Акустическая мощность такого излучателя при заданном объемном смещении излучающей поверхности пропорциональна четвертой степени частоты колебаний, в то время как реактивная мощность на частотах существенно ниже резонансной при том же объемном смещении пропорциональна частоте, а на частотах существенно выше резонансной — третьей степени частоты. Таким образом, реактивная нагрузка широкополосных излучателей малых волновых размеров является основным фактором, лимитирующим их излучение. Поэтому представляют интерес способы компенсации и уменьшения реактивной нагрузки на первичный двигатель излучателя: подходящий сдвиг фаз колебаний между элементами колебательной системы с одной степенью свободы [2, 3], оптимальный выбор параметров колебательной системы с несколькими степенями свободы при соответствующем месте приложения вынуждающей силы в ней [4], сравнительно быстрое — за время длительности звукового импульса [5] или даже скачкообразное [6] изменение параметров колебательной системы. Применение очевидного и широко известного способа уменьшения реактивной нагрузки путем плавной подстройки частоты колебаний ограничено случаем медленной частотной модуляции излучения; его здесь мы не касаемся.

В качестве механизмов для приведения в действие излучателей со скачкообразным изменением параметров можно рассматривать пружины с изменяющейся во времени жесткостью [7, 8] и вообще колебательные системы с изменением эффективных параметров посредством петли обратной связи, допускающей регулирование этих параметров по любому заданному закону, в том числе случайному [7], пневматические устройства с любого вида заслонками, попеременно перекрывающими и открывающими поток воздуха [9–12], втекающего и вытекающего из емкости, являющейся применительно к обсуждаемой здесь проблеме излучения звука воздушным объемом излучателя.

Здесь мы анализируем энергетическую нагрузку поршневого излучателя малых волновых размеров (монополя) со скачкообразно изменяемыми параметрами его колебательной системы для случая, когда поршень удерживается (внутренними силами) заданное время в крайнем отклонении от своего положения равновесия, что равносильно подсоединению к поршню на это время бесконечной присоединенной массы, а переход между двумя крайними положениями совершается по закону гармонических колебаний с резонансной частотой. Очевидно, такое принуди-

тельное задерживание поршня в крайних положениях обогащает спектр его колебаний сравнительно низкими частотами и, вообще говоря, расширяет этот спектр. Способ удержания поршня в его крайних положениях, будь то посредством механической защелки или же магнитной [7, 13], здесь не существен. Существенно лишь, что реактивная нагрузка на поршень при таком его движении отсутствует во все моменты времени, поскольку удержание поршня в крайнем положении не требует затраты работы, а при «резонансном» переходе от одного крайнего положения к другому действующая на поршень сила синфазна с его скоростью и нагрузка на поршень оказывается чисто активной.

Рассмотрим сначала периодическое движение поршня, когда его смещение $x(t)$ как функция времени t задано в виде

$$x(t) = x(t+T) = \begin{cases} a \sin \omega_0 t, & \text{при } -\theta < t < \theta, \\ a, & \text{при } \theta < t < T/2 - \theta, \\ -a \sin \omega_0 (t - T/2) & \text{при } T/2 - \theta < t < T/2 + \theta, \\ -a & \text{при } T/2 + \theta < t < T - \theta, \end{cases} \quad (1)$$

как представлено на рис. 1. Здесь T — период колебаний, a — их амплитуда, ω_0 — круговая частота резонансных колебаний, $2\theta = \pi/\omega_0$ — промежуток времени перехода поршня из одного крайнего положения в другое, $\theta < T/4$. Спектральные представления смещения $x(t)$ и скорости $v(t)$ поршня

$$x(t) = \sum_{n \geq 1} x_n \sin n\omega t, \quad v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \sum_{n \geq 1} v_n \cos n\omega t,$$

где $\omega = 2\pi/T$, имеют в рассматриваемом случае спектральные амплитуды, равные

$$x_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} \frac{4a}{\pi n} \varphi\left(n \frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad v_n = n\omega x_n,$$

где

$$\varphi(\Omega) = \sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\Omega)\right] / (1-\Omega^2), \quad \varphi(1) = \pi/4,$$

и отличные от нуля только при нечетных n . Соответственные усредненные за период спектральные амплитуды акустической мощности W_n рассматриваемого монопольного источника на частоте $n\omega$ равны

$$W_n = \frac{\rho}{8\pi c} (n\omega S v_n)^2 = \frac{1 - (-1)^n}{2} \frac{\rho}{8\pi c} \left[S a n \omega^2 \frac{4}{\pi} \varphi\left(\frac{n\omega}{\omega_0}\right) \right]^2, \quad (2)$$

где S — площадь поршня, ρ — плотность среды, c — скорость звука в ней. График функции $[\Omega\varphi(\Omega)]^2$, определяющей правую часть (2), представлен на рис. 2. Из него и (2) видно, что основная часть спектра сосредоточена в области частот $n\omega < 3\omega_0$.

Полная мгновенная мощность рассматриваемого излучателя является активной частью мощности монополя [1]

$$W(t) = -\frac{\rho}{4\pi c} S^2 v(t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(t), \quad (3)$$

где $v(t)$ — скорость поршня, которая здесь отлична от нуля лишь при $|t - m(T/2)| < \theta$, m — целое, когда она равна $a\omega_0 \cos \omega_0(t - m(T/2))$. Подставляя эти значения $v(t)$ в формулу (3) и усредняя за период, получим среднюю мощность

$$\bar{W} = \frac{\rho}{8\pi c} \omega \omega_0^3 (Sa)^2. \quad (4)$$

КПД излучения на основной гармонике $\eta = W_1/\bar{W}$ здесь не зависит ни от размеров поршня, ни от скорости звука и при $\omega^2 \ll \omega_0^2$ равен

$$\eta \approx \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 (\omega/\omega_0)^3. \quad (5)$$

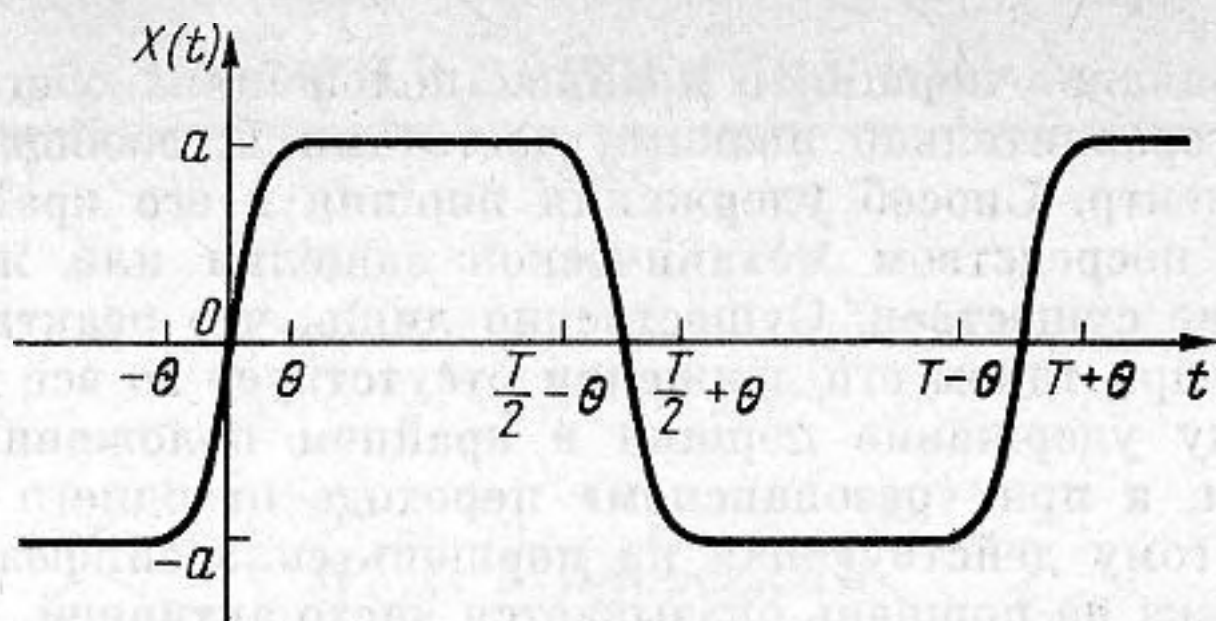


Рис. 1. Периодическое смещение $x(t)$ излучающего поршня с задержкой его в крайних положениях

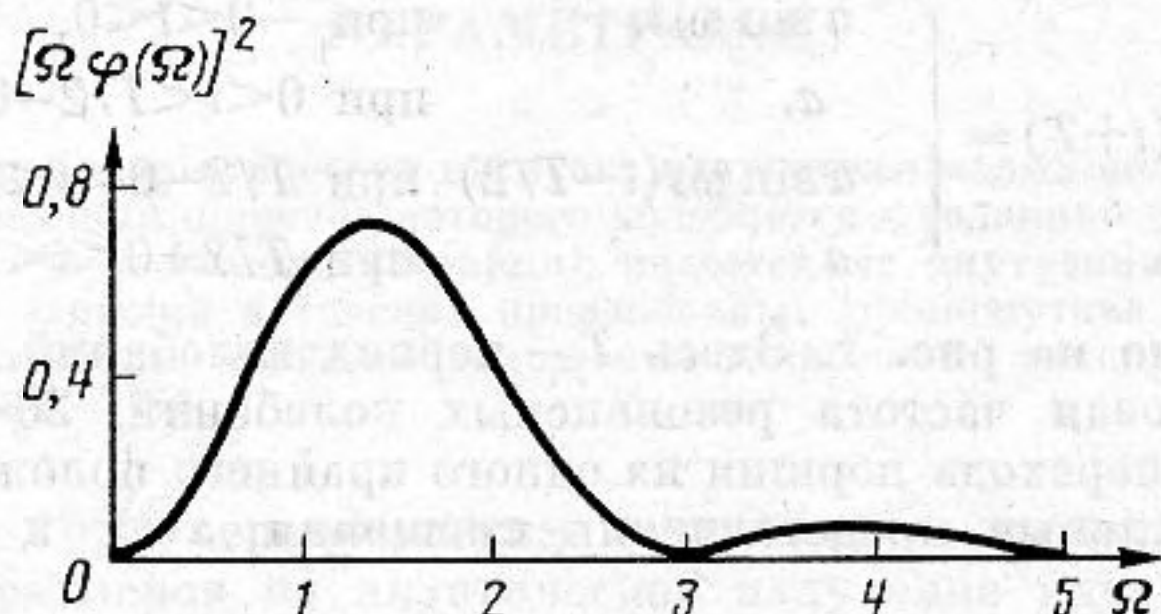


Рис. 2. Универсальная функция $[\Omega\varphi(\Omega)]^2$, определяющая спектр акустической мощности

Среднеквадратичное значение реактивной мощности соответствующего гармонического излучателя сравнения (такого же излучателя, но без защелок), колеблющегося с той же амплитудой, на круговой частоте ω равно

$$\sqrt{\overline{W}_r^2} = (m+M)\omega|\omega_0^2 - \omega^2|a^2/(2\sqrt{2}), \quad (6)$$

где m — собственная масса поршня, M — его присоединенная масса. Сравнивая правые части равенств (4) и (6), при $\omega^2 \ll \omega_0^2$ найдем

$$\overline{W}/\sqrt{\overline{W}_r^2} \approx \rho\omega_0 S^2/[2\sqrt{2}\pi c(m+M)]. \quad (7)$$

Правая часть (7) по порядку величины не превышает $k_0 R$, где $k_0 = \omega_0/c$, R — радиус (или характерный размер) поршня. Так, для круглого поршня в жестком плоском экране и для пульсирующей сферы правая часть (7) соответственно равна

$$\frac{3}{16\sqrt{2}} k_0 R / \left(1 + \frac{3}{8\rho R^3} m\right) \text{ и } \sqrt{2} k_0 R / \left(1 + \frac{m}{4\rho R^3}\right).$$

Таким образом, при $k_0 R \ll 1$ и одинаковом излучении на основной частоте ω энергетическая нагрузка рассматриваемого излучателя мала по сравнению с энергетической нагрузкой гармонического излучателя с резонансной круговой частотой ω_0 .

В общем случае неперiodического движения, когда поршень проходит через положение равновесия в моменты времени t_n , причем $t_{n+1} > t_n + 2\theta$, скорость поршня имеет вид

$$v(t) = \begin{cases} (-1)^n \omega_0 a \cos \omega_0(t-t_n), & \text{при } |t-t_n| < \theta, \\ 0, & \text{при } |t-t_n| > \theta \text{ для всех } n. \end{cases} \quad (8)$$

При этом мгновенная мощность, согласно формуле (3), оказывается равной

$$W(t) = \frac{\rho}{4\pi c} S^2 a^2 \omega_0^4 \cos^2 \omega_0(t-t_n) \text{ при } |t-t_n| < \theta \quad (9)$$

и нулю при $|t-t_n| > \theta$ для всех n . Интегрируя выражение (9) по времени

в пределах от $t_n - \theta$ до $t_n + \theta$, найдем, что при каждом переходе поршня из одного крайнего положения в другое затрачивается работа, равная $\rho S^2 a^2 \omega_0^3 / 8c$. Отсюда найдем среднюю мощность

$$\bar{W} = n_1 \rho S^2 a^2 \omega_0^3 / 8c,$$

где n_1 — число переходов в единицу времени, для случайного процесса — среднее их число.

Звуковое давление $p(r, t)$ на расстоянии r от излучателя, соответствующее закону движения (8), имеет вид

$$p(r, t) = \frac{\rho S}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} v\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\rho}{4\pi r} S a \omega_0^2 \sum_n (-1)^{n+1} F\left(t - \frac{r}{c} - t_n\right), \quad (10)$$

где $F(t) = \sin \omega_0 t$ при $|t| < \theta$ и $F(t) = 0$ при $|t| > \theta$. Амплитуда спектральной плотности $\tilde{p}(r, \omega)$ звукового давления (эти величины связаны спектральным представлением

$$p(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(r, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = 2 \int_0^{\infty} |\tilde{p}(r, \omega)| \cos[\omega t - \arg \tilde{p}(r, \omega)] d\omega$$

в этом случае равна

$$|\tilde{p}(r, \omega)| = \frac{\rho}{4\pi^2 r} S a \omega_0 \beta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

где

$$\beta(\Omega) = |\Omega \varphi(\Omega)| \left\{ \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n \cos \Omega \alpha_n \right]^2 + \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n \sin \Omega \alpha_n \right]^2 \right\}^{1/2},$$

$$\alpha_n = \omega_0 t_n,$$

$N+1$ — число переходов поршня из одного крайнего положения в другое за время всего звукового импульса. Очевидно, что спектр звукового поля зависит не только от числа переходов, но и от распределения их во времени. На рис. 3 приведены примеры функции $\beta(\Omega)$ при $\alpha_N - \alpha_0 = 10$ для случаев $N=1$ — сплошная кривая, и $N=4$ для $\alpha_i - \alpha_{i-1}$, при $i=1, 2$ и 3 равных соответственно $20/9, 20/3$ и $20/27$ — штрихованная кривая, и $20/3, 20/9$ и $20/27$ — штрихпунктирная кривая. Две последние кривые показывают, насколько сильно изменяет спектр даже перестановка двух интервалов между последовательными переходами поршня из одного крайнего положения в другое.

Для случайного стационарного пуассоновского процесса со стохастически независимыми задержками $\tau_v = t_{v+1} - t_v - 2\theta$ поршня в крайних положениях плотность вероятностей $u(\tau_v)$ задержек равна $u(\tau_v) = n_1 \exp(-n_1 \tau_v)$, где n_1 — густота переходов поршня из одного крайнего положения в другое (их число в единицу времени). Для такого процесса функция автокорреляции звукового давления $\psi(\tau)$, четная по τ , согласно формуле (10) запишется в виде

$$\psi(\tau) = \overline{p\left(r, t + \frac{r}{c}\right) p\left(r, t + \frac{r}{c} + \tau\right)} = \left(\frac{\rho}{4\pi r} S a \omega_0^2\right)^2 \times$$

$$\times \left\{ \overline{\sum_v F(t - t_v) F(t - t_v + \tau)} + 2 \overline{\sum_{\mu, \nu \neq \mu} F(t - t_{2\nu}) F(t - t_{2\nu} + \tau + t_{2\nu, 2\mu})} - \right.$$

$$\left. - 2 \overline{\sum_{\mu, \nu} F(t - t_{2\nu}) F(t - t_{2\nu} + \tau + t_{2\nu, 2\mu+1})} \right\},$$

где

$$t_{kj} = t_k - t_j = 2(k-j)\theta + \tau_j + \tau_{j+1} + \dots + \tau_{k-1} = -t_{jk}$$

при $t_k > t_j$;

черта означает усреднение по ансамблю реализаций.

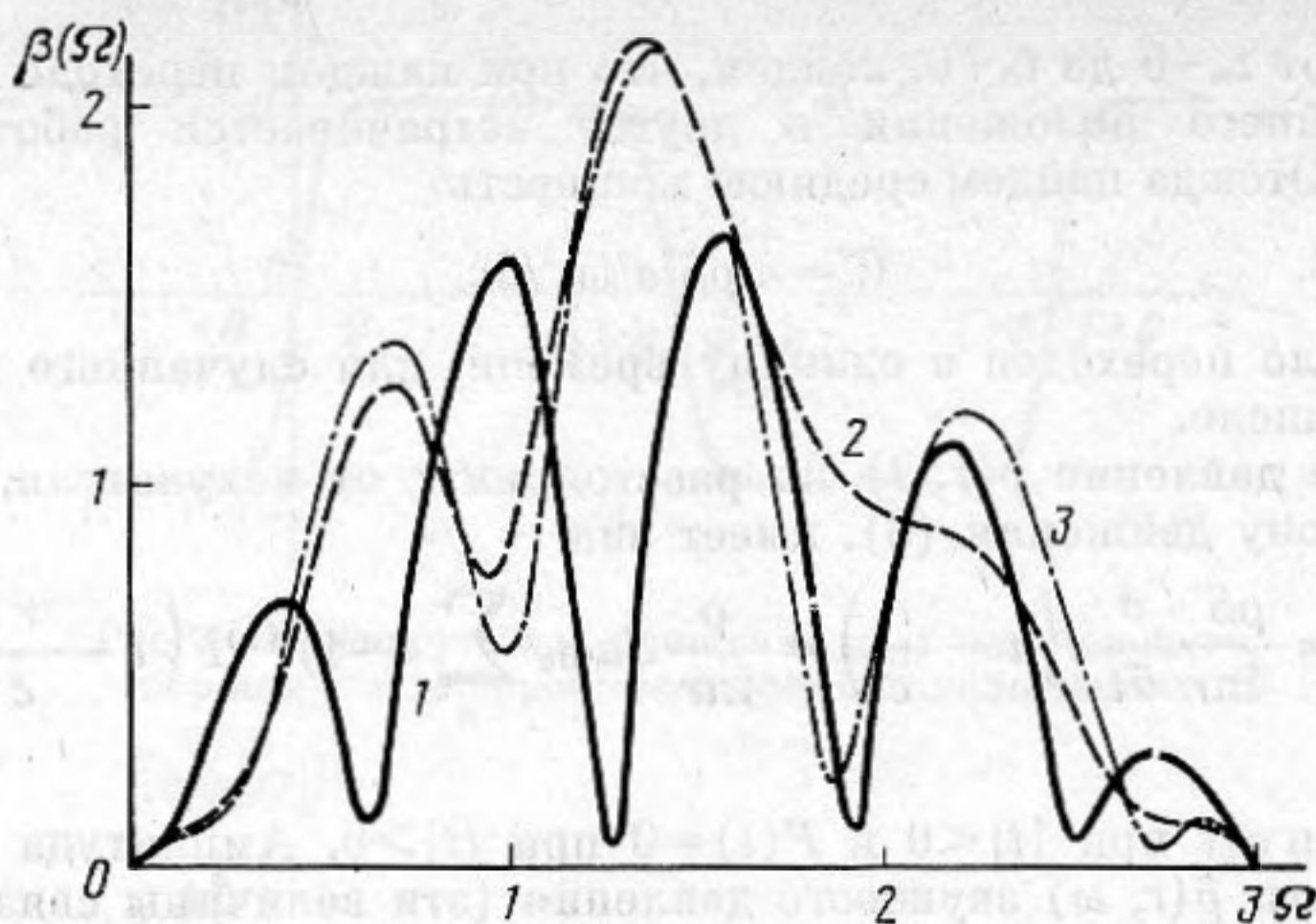


Рис. 3. Нормированные спектры звукового давления в импульсе длительностью $10/\omega_0$: 1 — с двумя переходами поршня из одного крайнего положения в другое; 2 — с пятью переходами, разделенными последовательными интервалами в единицах $1/\omega_0$ длительностью в $20/9$, $20/3$ и $20/27$, 3 — длительностью в $20/3$, $20/9$ и $20/27$

Следуя известной процедуре усреднения [14], проведем его сначала по t_{2v} с равномерным распределением на большом по сравнению с $1/n_1$ интервале времени T при заданном числе n переходов на этом интервале, затем по длительности каждой задержки с распределением $u(\tau_v)$ при заданном n и, наконец, по n с пуассоновским распределением. В результате получим

$$\psi(\tau) = \left(\frac{\rho}{4r} Sa \right)^2 \omega_0^3 \frac{n_1}{2\pi} R(\tau),$$

где $R(\tau)$ — симметричный по τ коэффициент автокорреляции в наиболее интересном случае малых n_1/ω_0 с точностью до слагаемых порядка $n_1\omega_0/(\omega_0^2 + n_1^2)$ равный

$$R(\tau) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \cos \alpha - \frac{1}{\pi} \sin \alpha, & \text{при } \alpha \leq \pi, \\ 0, & \text{при } \alpha \geq \pi, \end{cases}$$

где $\alpha = \omega_0 |\tau|$, и представленный на рис. 4. Он имеет вид $R = 1 - (2/\pi)\alpha - (1/2\pi)\alpha^2 + \dots$ при малых α , обращается в нуль при $\alpha = 1,113$ и достигает минимума, равного $-0,443$, при $\alpha = 2,065$.

Спектральная плотность $g_+(\omega)$ функции корреляции в ее разложении по положительным частотам

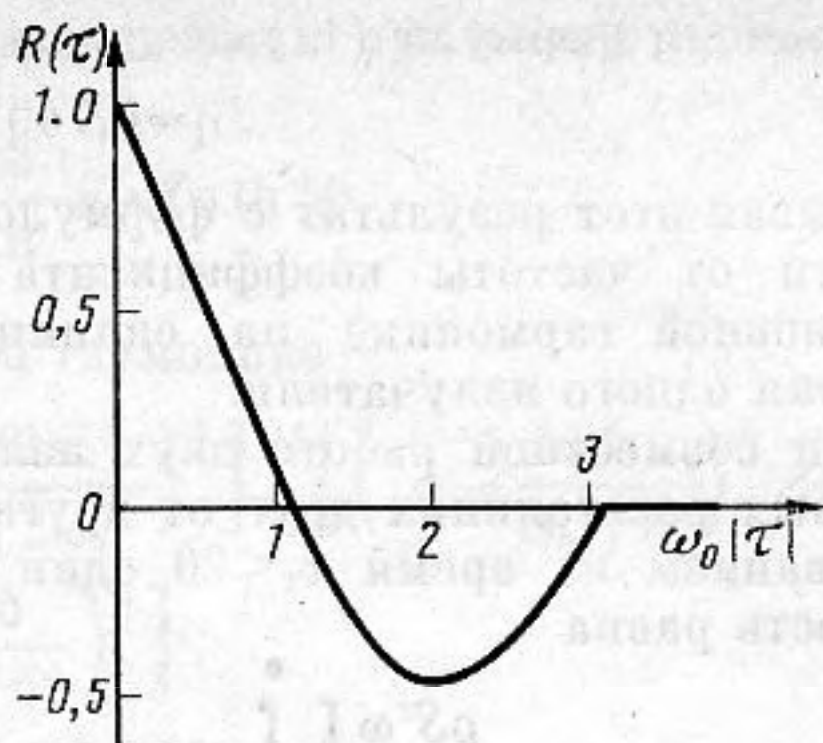
$$\psi(\tau) = \int_0^{\infty} g_+(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad \text{где } g_+(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

находится несложным интегрированием. В итоге в том же приближении получим

$$g_+(\omega) = \left(\rho \frac{Sa}{2\pi r} \omega_0 \right)^2 \frac{n_1}{\pi} \left[\Phi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \frac{\omega}{\omega_0} \right]^2.$$

Заметим, что при совместной работе двух или нескольких излучателей, когда их поршни колеблются с соответственными задержками по времени, суммарный спектр излучения может быть сильно изменен, а амплитуда на основной частоте увеличена. Так, для двух одинаковых близко расположенных излучателей, колеблющихся по закону (1) с задержкой по времени один относительно другого на $T/6$, результирующая

Рис. 4. Коэффициент автокорреляции $R(\tau)$ звукового давления как функция безразмерной переменной $\omega_0|\tau|$ для случайных переходов поршня из одного крайнего положения в другое, представляющих стационарный пуассоновский процесс; $n_1^2/(\omega_0^2+n_1^2) \ll 1$



величина W_n увеличивается в $4\cos^2(n\pi/6)$ раз по сравнению с одиночным излучателем. При этом для n , кратным трех, W_n обращается в нуль, акустическая мощность на основной частоте увеличивается втрое (вместо четырехкратного увеличения при синфазном излучении), а полная средняя мощность \bar{W} при дополнительном условии $\omega_0 \geq 3\omega$ в рассматриваемом примере, означаящем, что в каждый момент времени хотя бы один из поршней неподвижен, увеличивается только вдвое.

Для M излучателей, один из которых колеблется по закону (1), а остальные — с задержкой по времени на τ_m , где m — номер излучателя, $m=0, 1, 2, \dots, M-1$, $\tau_{m+1}-\tau_m > 2\theta$, и с амплитудой объемного смещения aSA_m , спектральные амплитуды W_n акустической мощности на частоте $n\omega$ равны

$$W_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} \frac{\rho}{8\pi c} \left[\frac{4}{\pi} n\omega^2 Sa \varphi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right]^2 \sigma_n^2,$$

где

$$\sigma_n^2 = \left| \sum_{m=0}^{M-1} A_m e^{in\omega\tau_m} \right|^2 = \left[\sum_{m=0}^{M-1} A_m \cos n\omega\tau_m \right]^2 + \left[\sum_{m=0}^{M-1} A_m \sin n\omega\tau_m \right]^2,$$

в то время как полная средняя мощность этой группы излучателей равна

$$\bar{W} = \frac{\rho}{8\pi c} \omega \omega_0^3 (Sa)^2 \sum_{m=0}^{M-1} A_m^2,$$

так что коэффициент полезного действия $\eta = W_1/\bar{W}$ этой группы для основной гармоники оказывается равным

$$\eta = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \sigma_1^2 / \sum_{m=0}^{M-1} A_m^2.$$

При $\{A_m=1\}$ и $\tau_m = m\tau_1 = m\mu T$ σ_n сводится к сумме геометрической прогрессии

$$\sigma_n^2 = \left[\frac{\sin(Mn\pi\mu)}{\sin(n\pi\mu)} \right]^2,$$

и тогда

$$\eta = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 \left[\frac{4}{\pi} \varphi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right]^2 \frac{\sin^2 M\pi\mu}{M \sin^2 \pi\mu}. \quad (11)$$

Последний множитель в правой части выражения (11) можно назвать фактором интерференции, поскольку он обусловлен наложением парциальных полей, составляющих группу излучателей. Он равен M при $2\mu M \ll 1$ и $4M/\pi^2$ при $\mu = 1/(2M) \ll 1$ и при фиксированном μ достигает максимума при $\mu M = 0,3710$, когда $\text{tg}(\pi\mu M) = 2\pi\mu M$. Этот максимум равен $2,2820 \mu/\sin^2 \pi\mu$. Наименьшее возможное значение μ из тех, для которых формула (11) имеет место, соответствует условию $\tau_{m+1}-\tau_m = 2\theta$ и равно $\mu = \omega/(2\omega_0)$. В этом случае при $(\omega/\omega_0)^2 \ll 1$ и максимальном факторе ин-

терференции формула (11) сводится к виду

$$\eta = 0,7497 (\omega/\omega_0)^2.$$

Сравнивая этот результат с формулой (5), заключаем, что степень зависимости от частоты коэффициента полезного действия такой группы на основной гармонике на единицу меньше коэффициента полезного действия одного излучателя.

При совместной работе двух излучателей, расположенных на малых волновых расстояниях друг от друга, поршни которых колеблются с запаздыванием на время $\tau_1 < 2\theta$ один относительно другого, акустическая мощность равна

$$\frac{\rho S^2 \omega}{2\pi^2 c} \left[\int_{-\theta}^{\theta} \dot{v}^2(t) dt + \int_{\tau_1-\theta}^{\theta} \dot{v}(t) \dot{v}(t-\tau_1) dt \right],$$

а мощность излучения на частоте ω в $2(1 + \cos \omega \tau_1)$ раз больше соответствующей мощности одиночного излучателя. Отсюда получим, что для такой пары излучателей при пренебрежимо малом трении КПД излучения на основной гармонике будет в

$$(1 + \cos \omega \tau_1) / \left[1 + \left(1 - \frac{1}{\pi} \omega_0 \tau_1 \right) \cos \omega_0 \tau_1 - \frac{1}{\pi} \sin \omega_0 \tau_1 \right]$$

раз больше, чем для одиночного излучателя, КПД которого представлен формулой (5). В случае $\omega = \omega_0/2$ при $\omega_0 \tau_1 = 1,920$ этот множитель имеет максимум, равный 2,771. При этом полный КПД излучения равен 0,4991.

На участке перехода поршень движется в основном за счет накопленной упругой энергии, а сила $f(t)$ нужна лишь для восполнения малых потерь на трение и излучение, скорость $v(t)$ мало зависит от вида функции $f(t)$. Принимая последнюю постоянной на участке перехода (сила направлена по ходу движения поршня), что при заданной величине силы (f_0) выгоднее всего, и учитывая в системе трение с коэффициентом трения b и радиационное трение, получим для монополя с уравнением движения поршня

$$(M+m) \dot{v}(t) + bv(t) + Kx(t) - \frac{\rho}{4\pi c} S^2 \ddot{v}(t) = f_0$$

при условиях $x(\pm\theta) = \pm a$, $v(\pm\theta) = 0$ решение

$$v(t) = \left(1 + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right) \frac{\omega_0 a}{\operatorname{ch} \delta \theta} e^{-\delta t} \cos \omega_0 t, \quad f_0 = Ka \operatorname{th} \delta \theta,$$

$$x(t) = a \left[\operatorname{th} \delta \theta + \frac{1}{\operatorname{ch} \delta \theta} e^{-\delta t} \left(\sin \omega_0 t - \frac{\delta}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right) \right]$$

при $2\omega_0 \theta = \pi$, где $2\delta = -\kappa_1 - \kappa_2$, $2\omega_0 = i(\kappa_2 - \kappa_1)$, κ_1 и κ_2 — комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения. Работа, затрачиваемая на переход поршня из одного крайнего положения в другое, равна $2af_0$. При малом трении с достаточной для анализа точностью

$$2\delta = \left(b + \tau K - 2\tau^2 K \frac{b}{M+m} \right) / \left(M+m + \tau b - \frac{\tau^2 b^2}{M+m} \right),$$

$$\omega_0 = \left\{ \frac{K}{M+m} \frac{1 - \tau^2 [K/(M+m)]}{1 + \tau [b/(M+m)] - [\tau b/(M+m)]^2} - \delta^2 \right\}^{1/2},$$

где $\tau = \rho S^2 / [4\pi c (M+m)]$. Для периодического процесса с переходами через равные промежутки времени $T/2$ скорость $v(t)$ представляется рядом Фурье

$$v(t) = \frac{2}{\pi} \omega a \sum_{n \geq 1} [1 - (-1)^n] \frac{\omega_0^2 + \delta^2}{(\omega_0^2 + \delta^2 - n^2 \omega^2)^2 + (2n\omega\delta)^2} \times$$

$$\times \{ [(\omega_0^2 + \delta^2 - n^2 \omega^2) \cos n\omega\theta + 2n\omega\delta \operatorname{th} \delta \theta \sin n\omega\theta] \cos n\omega t + [2n\omega\delta \cos n\omega\theta - (\omega_0^2 + \delta^2 - n^2 \omega^2) \operatorname{th} \delta \theta \sin n\omega\theta] \sin n\omega t \},$$

где $\omega = 2\pi/T$. Средняя мощность, затрачиваемая при таких колебаниях, равна

$$\bar{W} = 2af_0 \frac{2}{T} = \frac{2}{\pi} a\omega K a \operatorname{th} \delta\theta,$$

а акустическая мощность на основной гармонике —

$$W_1 = \frac{2\rho}{\pi c} \left(\frac{Sa}{\pi} \omega^2 \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\sin(\pi\omega/2\omega_0)}{\operatorname{ch} \pi\delta/2\omega_0} \right)^2 \right] / \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + \delta^2} \right)^2 + \left(\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 + \delta^2} \right)^2 \right].$$

С уменьшением потерь \bar{W} стремится к величине, представленной формулой (4), а КПД излучения на основной гармонике $\eta = W_1/\bar{W}$ — к величине, представленной формулой (5).

Для оценки точности расчета рассмотрим излучение пульсирующей сферы, для которой имеется точная формула [15]

$$F_0(t) = \rho c S \left[v(t) - \frac{c}{r} \int_0^\infty v(t-\tau) \exp\left(-\frac{c\tau}{r}\right) d\tau \right],$$

выражающая силу реакции среды $F_0(t)$ через скорость колебаний $v(t)$ пульсирующей сферы. В этом случае для периодического процесса с периодом T и переходами длительностью 2θ , начинающимися в моменты времени $(nT/2) - \theta$, уравнение движения имеет вид

$$m\dot{v}(t) + bv(t) + Kx(t) + M \frac{c}{r} \left\{ v(t) - \frac{c}{r} e^{-\frac{ct}{r}} \left[\int_{-\theta}^t v(\tau) e^{\frac{c\tau}{r}} d\tau - \frac{1}{1+e^\alpha} \int_{-\theta}^{\theta} v(\tau) e^{\frac{c\tau}{r}} d\tau \right] \right\} = f(t),$$

где $M = \rho Sr$, $\alpha = cT/(2r)$, $-\theta < t < \theta$. Полагая силу $f(t)$ постоянной на участке перехода, $f(t) = f_0$ при $-\theta < t < \theta$, получим решение уравнения в виде

$$x(t) = \frac{f_0}{K} + a \sum_{j=1}^3 a_j \exp(\kappa_j t),$$

где κ_j — корни характеристического уравнения

$$\frac{M+m}{K} \kappa_j^2 + \frac{b}{K} \kappa_j + 1 - \frac{Mr}{Kc} \frac{\kappa_j^3}{1 + \frac{r}{c} \kappa_j} = 0, \quad (12)$$

$\kappa_1 = -\delta + i\omega_0$, $\kappa_2 = -\delta - i\omega_0$ — комплексно-сопряженные корни последнего, κ_3 — его отрицательный корень, $a_2 = a_1^*$, при условии

$$\sum_{j=1}^3 \frac{a_j \kappa_j}{1 + \frac{r}{c} \kappa_j} \left\{ \exp\left[-\left(\kappa_j + \frac{c}{r}\right)\theta\right] + \exp\left[\left(\kappa_j + \frac{c}{r}\right)\theta - \alpha\right] \right\} = 0. \quad (13)$$

Согласно формулам Виета,

$$\kappa_3 = -cK/[rm(\omega_0^2 + \delta^2)] = 2\delta - \frac{b}{m} - \frac{c}{r} \left(1 + \frac{M}{m} \right),$$

$$\omega_0^2 + \delta^2 = K / \left[M + m + \frac{r}{c} (b - 2\delta m) \right].$$

Начальным и конечным условиям переходов $x(\mp\theta) = \pm a$, $v(\mp\theta) = 0$ соот-

ветствуют уравнения

$$\sum_{j=1}^3 a_j \exp(\pm \kappa_j \theta) = \pm 1 - \Phi,$$

$$\sum_{j=1}^3 a_j \kappa_j \exp(\pm \kappa_j \theta) = 0, \quad \Phi = f_0 / Ka \quad (14)$$

Из системы уравнений (13), (14) найдем

$$a_1 \kappa_1 = \frac{\omega_0}{\Phi_+} \left(1 + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right) \{ [\exp(-\delta\theta) + \exp(2\kappa_3\theta + \delta\theta)] \sin \omega_0\theta + \\ + i [\exp(-\delta\theta) - \exp(2\kappa_3\theta + \delta\theta)] \cos \omega_0\theta \},$$

$$a_3 \kappa_3 = -\frac{2}{\Phi_+} \omega_0 \left(1 + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right) \exp(\kappa_3\theta) \sin 2\omega_0\theta,$$

$$\frac{x(t)}{a} = \Phi + \frac{2}{\Phi_+} \left\{ \exp[-\delta(t+\theta)] \left[\cos \omega_0(t-\theta) + \frac{\delta}{\omega_0} \sin \omega_0(t-\theta) - \right. \right. \\ \left. \left. - \exp\{2(\kappa_3 + \delta)\theta\} \left[\cos \omega_0(t+\theta) + \frac{\delta}{\omega_0} \sin \omega_0(t+\theta) \right] \right] + \right. \\ \left. + \exp[\kappa_3(t+\theta)] \mu \sin 2\omega_0\theta \right\},$$

$$\frac{v(t)}{a\omega_0} = -\frac{2}{\Phi_+} \left(1 + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right) \{ [\sin \omega_0(t-\theta) - \exp\{2(\kappa_3 + \delta)\theta\} \sin \omega_0(t+\theta)] \times \\ \times \exp[-\delta(t+\theta)] + \exp[\kappa_3(t+\theta)] \sin 2\omega_0\theta \},$$

$$\Phi = \Phi_- / \Phi_+, \quad \text{где } \mu = \frac{r}{c} \omega_0 \left(1 + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right) m / \left[M + m + \frac{r}{c} (b - 2m\delta) \right],$$

$$\Phi_{\mp} = [1 \mp \exp(-2\delta\theta)] \{ 1 + \exp[2(\kappa_3 + \delta)\theta] - 2[1 \mp \exp(2\kappa_3\theta)] \} \cos^2 \omega_0\theta + \\ + \left(\frac{\delta}{\omega_0} - \mu \right) [1 \pm \exp(2\kappa_3\theta)] \sin 2\omega_0\theta,$$

а θ определяется из уравнения

$$q \left\{ 1 - \exp \left[2 \left(\kappa_3 + \frac{c}{r} \right) \theta - \alpha \right] \right\} \sin 2\omega_0\theta = \frac{r}{c} \omega_0 \left\{ [1 + \exp\{2(\kappa_3 + \delta)\theta\}] \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \exp \left\{ 2 \left(\frac{c}{r} - \delta \right) \theta - \alpha \right\} \right] - 2 \left[1 + \exp \left\{ 2 \left(\kappa_3 + \frac{c}{r} \right) \theta - \alpha \right\} \right] \cos^2 \omega_0\theta \right\}, \quad (15)$$

где

$$q = 1 - \frac{r}{c} \delta + \frac{m}{M + \frac{r}{c} (b - 2\delta m)} \left[\left(1 - \frac{r}{c} \delta \right)^2 + \left(\frac{r}{c} \omega_0 \right)^2 \right].$$

Из уравнения (12) при $(\tau \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2})^3 \ll 1$ получим

$$2\delta = \frac{\beta - \tau\Omega^2 - \tau^2\beta\Omega^2}{1 - \tau\beta + \tau^2(\Omega^2 - \beta^2)}, \quad \omega_0 = \left[\frac{\Omega^2}{1 - \tau\beta + \tau^2(\Omega^2 - \beta^2)} - \delta^2 \right]^{1/2},$$

где

$$\tau = \frac{r}{c} \frac{m}{M + m + \frac{r}{c} b}, \quad \Omega^2 = \frac{K}{M + m + \frac{r}{c} b},$$

$$\beta = \frac{b + (r/c)K}{M + m + (r/c)b}.$$

$$\text{При } \exp \left[2 \left(\delta - \frac{b}{m} - \frac{M+m}{m} \frac{c}{r} \right) \theta \right] \ll 1 \text{ и } \exp \left[2\delta\theta + \frac{c}{r} \left(\frac{T}{2} - 2\theta \right) \right] \gg 1$$

уравнение (15) имеет решение $\omega_0\theta = (\pi/2) - (1/2) \operatorname{arctg}(r\omega_0/cq)$, из которого при

$$[\omega_0 r / (2c)]^3 \ll 1, \quad \omega_0 \delta (r/c)^2 \ll 1 \quad (16)$$

получим $\omega_0\theta = (\pi/2) - (r\omega_0/2c)M/(M+m)$.

Полученные кинематические и динамические выражения при условиях (16) в пределе стремятся к соответствующим величинам для монополя. Следовательно, такое же утверждение относится и к спектрам излучения. Условия (16) требуют, чтобы время перехода 2θ было велико по сравнению со временем прохождения звуком расстояния порядка размеров излучающей поверхности, т. е. с характерным временем «забывания» ею истории своего движения. Работа, затрачиваемая на переход из одного крайнего положения в другое, равна $2af_0 = 2Ka^2\Phi$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973.
2. Урусовский И. А. О компенсации реактивной нагрузки гармонических излучателей // Акуст. журн. 1959. Т. 5. № 3. С. 383–385.
3. Урусовский И. А. О компенсации реактивной нагрузки низкочастотных гидроакустических и сейсмических излучателей // Проблемы вибрационного просвечивания Земли. М.: Наука, 1977. С. 144–151.
4. Урусовский И. А. Реактивная нагрузка излучателя малых волновых размеров с n степенями свободы колебаний // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 2. С. 306–314.
5. Graham W., Melnik I. E., Filippis T. D. Acoustic pulse generator utilizing a mechanism for changing the natural frequency of oscillation: U. S. Patent № 3691516. 1972. U. S. cl. 340/8 R.
6. Schiff D., Hottel H. C. Expendable sonar source: U. S. Patent № 3553639. 1971. U. S. cl. 340–12.
7. Фролов К. В. Уменьшение амплитуды колебаний резонансных систем путем управляемого изменения параметров // Машиноведение. 1965. № 3. С. 38–42.
8. Rodgers P. W. A spring with time-variable stiffness // J. Acoust. Soc. Amer. 1966. V. 39. № 4. P. 749–751.
9. Арбузов Н. Н., Ланцевич М. А. Пневматический вибровозбудитель: А. с. № 917863 // Б. И. 1982. М. кл. В 06 В 1/18.
10. Пилягин М. В., Якимов А. В., Анциферов С. Д., Лукашевич В. И., Каргина Г. Н., Бондарев В. А. Роторная сирена. А. с. 1126846 // Б. И. М. кл. 1985. В 06 В 1/18.
11. Тишков А. Я., Ткач Х. Б. Пневматический вибровозбудитель. А. с. 1205943 // Б. И. М. кл. 1986. В 06 В 1/18.
12. Жулин В. И., Римский-Корсаков А. В., Рехтман В. И., Ямщиков В. С. Низкочастотный гидропневматический излучатель // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 1. С. 32–41.
13. Карпенко Л. Н. Быстродействующие электродинамические устройства. Л.: Энергия, 1973. С. 6.
14. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10.05.88
после доработки
27.02.89

I. A. Urusovskii

ENERGETIC LOADING OF SMALL WAVE DIMENSIONS RADIATORS WITH STEPWISELY CHANGING PARAMETERS

An energetic loading of a small wave dimensions radiator is calculated. An radiation piston of the radiator oscillates with assigned amplitude in such a manner, that it is keeping in extreme positions by internal forces by means of an arresting stop during arbitrary lapses of time and transits from one extreme position to another in accordance with the resonance oscillations law. This loading is purely active. Its frequency spectrum is analyzed for both periodic and aperiodic, including random, oscillations of the piston. It is shown, that for the periodic oscillations an efficiency of this radiation on a fundamental harmonic is independent on both piston dimensions and a sound velocity and is proportional to the third power of the frequency, while for a group radiation with corresponding delays in time between the radiators at their suitable number it is proportional to the square of the frequency.