

УДК 534.532. : 517.9

© 1990 г.

Г. В. Алексеев, Е. Г. Комаров

## БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОГО ПОГЛОЩАЮЩЕГО ВОЛНОВОДА

Развивается быстрый численный алгоритм повышенной точности вычисления собственных значений многослойного поглощающего волновода. Основу алгоритма составляют дискретизация дифференциальной спектральной задачи методом конечных разностей,  $QL$ -алгоритм нахождения собственных значений неэрмитовой матрицы и повышение точности решения с помощью экстраполяции по Ричардсону. Быстродействие и точность алгоритма иллюстрируются на тестовых примерах.

Вычисление звуковых полей в многослойных поглощающих волноводах методом нормальных волн приводит к необходимости нахождения собственных значений и собственных функций несамосопряженной (из-за наличия поглощения) спектральной задачи [1, 2]

$$\rho(z) \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{\rho(z)} \frac{d\varphi}{dz} \right] + [k^2(z) - \xi^2] \varphi = 0 \text{ в } (0, H), \quad (1)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \sin \alpha \varphi(H) + \cos \alpha \varphi'(H) = 0, \quad (2)$$

$$\varphi(H_j^-) = \varphi(H_j^+), \quad \frac{1}{\rho(H_j^-)} \frac{d\varphi(H_j^-)}{dz} = \frac{1}{\rho(H_j^+)} \frac{d\varphi(H_j^+)}{dz}, \quad (3)$$

$j=1, 2, \dots, m-1$ .

Здесь  $H$  — глубина рассматриваемого волновода  $D_H$ ,  $k(z) = \omega/c(z) + i\kappa(z)$ , где  $\omega$  — угловая частота,  $c(z)$  и  $\kappa(z)$  — скорость звука и коэффициент затухания (поглощения) в волноводе  $D_H$ . Краевые условия (2) означают, что верхняя граница  $z=0$  является мягкой, а нижняя  $z=H$  — импедансной. Условия (3) имеют смысл условий сопряжения на каждой границе  $z=H_j$ ,  $j=1, 2, \dots, m-1$  разрыва параметров  $k(z)$  или  $\rho(z)$  волновода  $D_H$ . В случае, когда исходный волновод  $D_H$  имеет бесконечную глубину  $H=\infty$ , второе условие в (2) следует заменить условием излучения Зоммерфельда, а отвечающая значению  $H=\infty$  задача (1)–(3) относится к классу сингулярных спектральных задач [3–4].

Для решения спектральной задачи (1)–(3) предложен ряд методов, описанных, например, в [5–15]. В большинстве этих работ поглощение либо не учитывается [5, 6, 10, 11], либо учитывается в рамках теории малых возмущений [9, 12]. Ряд методов основан на аппроксимации профиля скорости звука  $c(z)$  либо функции  $k(z)$  достаточно простой функцией, обычно сплайном нулевой или первой степени [5, 6], что эквивалентно разбиению волновода  $D_H$  на несколько слоев. Численный алгоритм решения несамосопряженной задачи (1)–(3), основанный на применении метода Нумерова, не использующий предположение о малости поглощения, был предложен в [7] и далее применен в серии работ авторов [7] (см., например, [14, 15]) для вычисления звуковых полей в поглощающих волноводах и исследования свойств указанных полей.

В настоящей работе для решения задачи (1)–(3) применяется экономичный высокоточный алгоритм, состоящий из трех этапов: 1) дискретизации задачи (1)–(3) методом конечных разностей; 2) решения полученной сеточной спектральной задачи с помощью  $QL$ -алгоритма и 3) уточнения сеточных собственных значений и функций путем применения

экстраполяции по Ричардсону. Используемый алгоритм вычисления собственных значений задачи (1)–(3) близок к методу, используемому в [10, 11] для непоглощающих однослойных волноводов, но отличается от последнего большей универсальностью, поскольку его можно применять как для поглощающих, так и непоглощающих однослойных либо многослойных волноводов.

Опишем более подробно основные этапы алгоритма, рассматривая для простоты случай, когда волновод  $D_H$  состоит из двух слоев, так что его параметры  $k(z)$  и  $\rho(z)$  терпят разрыв в одной точке  $z=H_1$ . Для применения метода конечных разностей на 1-м этапе введем в интервалах  $(0, H_1)$  и  $(H_1, H)$  равномерные разностные сетки

$$\omega_1 = \{z_i = ih_1 : i=0, 1, \dots, N_1\}, \quad h_1 = \frac{H_1}{N_1},$$

$$\omega_2 = \{z_i = H_1 + (i - N_1)h_2; \quad i = N_1 + 1, \dots, N\},$$

$$h_2 = \frac{H - H_1}{N_2}, \quad N = N_1 + N_2.$$

Положим  $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$ ,  $z_{i-1/2} = (z_i + z_{i-1})/2$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ .

$\rho_i = \rho(z_i)$ ,  $q_i = k^2(z_i)$ ,  $\rho_{i \pm 1/2} = \rho(z_{i \pm 1/2})$ ,  $i=1, 2, \dots, N$  и рассмотрим сеточную спектральную задачу, имеющую вид

$$\frac{\rho_i}{h_1} \left( \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_1} - \frac{1}{\rho_{i-1/2}} \frac{y_i - y_{i-1}}{h_1} \right) + q_i y_i = \lambda y_i, \quad i=1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad (4)$$

$$\frac{\rho_i}{h_2} \left( \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_2} - \frac{1}{\rho_{i-1/2}} \frac{y_i - y_{i-1}}{h_2} \right) + q_i y_i = \lambda y_i \quad (5)$$

при  $i=N_1+1, \dots, N$  и совпадающую при  $i=N_1$  с наилучшей разностной схемой, приведенной в [16]. Краевые условия (2) при  $\alpha \neq \pi/2$  аппроксимируем разностными условиями

$$y_0 = 0, \quad y_{N+1} - y_{N-1} - 2ah_2 y_N = 0, \quad a = \operatorname{tg} \alpha, \quad (6)$$

первое из которых аппроксимирует соответствующее условие в (2) точно, а второе — с порядком  $O(h_2^2)$ . При  $\alpha = \pi/2$  условие  $\varphi(H) = 0$  аппроксимируем точно условием  $y_N = 0$ , а в (5) считаем, что  $i \leq N-1$ .

Предположим, что параметры  $\rho(z)$  и  $k(z)$  волновода  $D_H$  кусочно-непрерывны на  $[0, H]$ , а в каждом из интервалов  $[0, H_1]$  и  $[H_1, H]$  дважды непрерывно-дифференцируемы. Положим

$$h_2 = ch_1, \quad h = \sqrt{h_1 h_2} = \sqrt{c} h_1, \quad c = \operatorname{const}.$$

Тогда в соответствии с [16, с. 185] можно считать, что первые  $N_0 < N$  собственных значений  $\lambda_n$  и векторов  $y_n = (y_{n1} \dots y_{nN})$  сеточной спектральной задачи (4)–(6) аппроксимируют соответствующие собственные значения  $\xi_n^2$  и функции  $\varphi_n$  дифференциальной спектральной задачи (1)–(3) с порядком  $O(h^2)$ , т. е.

$$|\lambda_n - \xi_n^2| = O(h^2), \quad \|y_n - \varphi_n^h\|_c = O(h^2),$$

$$1 \leq n \leq N_0, \quad h \rightarrow 0. \quad (7)$$

Равенства (4)–(6) представляют собой обычную алгебраическую спектральную задачу, которую после исключения неизвестных  $y_0$  и  $y_{N+1}$  можно переписать в следующем компактном виде:

$$Ay = \lambda y. \quad (8)$$

Здесь  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{C}^N$  —  $N$ -мерный комплексный вектор,  $A$  — трехдиагональная несимметричная неэрмитова при  $\kappa(z) \neq 0$  матрица. Решение алгебраической спектральной задачи (8) и составляет содержание 2-го этапа разработанного алгоритма.

Для нахождения собственных значений матрицы  $A$  нами использо-

вался  $QL$ -алгоритм со сдвигом. Его описание можно найти в [17], где также приведен способ выбора сдвига, гарантирующий квадратичную скорость соответствующего итерационного процесса. Но следует отметить, что при непосредственном применении  $QL$ -алгоритма возникает одна тонкость, заключающаяся в том, что порядок следования вычисленных с его помощью собственных значений может быть произвольным [17, с. 206]. В то же время в акустике океана собственные значения в соответствии с их физическим смыслом принято нумеровать в порядке убывания их вещественных частей. С учетом этого  $QL$ -алгоритм был модифицирован таким образом, чтобы первое вычисленное собственное значение  $\lambda_1$  имело максимальную вещественную часть  $\text{Re } \lambda_1$ . Дальнейшее применение  $QL$ -алгоритма позволяет определить остальные собственные значения  $\lambda_n$  в порядке уменьшения  $\text{Re } \lambda_n$ , так что выполняется условие

$$\text{Re } \lambda_1 \geq \text{Re } \lambda_2 \geq \dots \geq \text{Re } \lambda_M,$$

где  $M < N$  — некоторое число. При этом вычисление каждого последующего собственного значения практически с машинной точностью требует не более двух-трех итераций. Таким образом, указанная процедура позволяет быстро и точно найти первые  $M$  собственных значений матрицы  $A$ , отвечающих основным энергонесущим модам в волноводе  $D_H$ .

Определив собственные значения  $\lambda_n$  трехдиагональной матрицы  $A$ , далее нетрудно найти ее собственные векторы  $y_n$  путем решения соответствующей системы (8) при  $\lambda = \lambda_n$ . Однако прямое решение этой системы приводит к большим вычислительным погрешностям за счет ошибок округления. Ввиду этого для нахождения собственных векторов  $y_n$  нами использовался специальный алгоритм, разработанный в [18], позволяющий находить решение системы (8) при  $\lambda = \lambda_n$  практически с машинной точностью.

Дискретизация дифференциальной спектральной задачи (1)–(3) методом конечных разностей и последующее решение полученной сеточной спектральной задачи описанным выше методом позволяют найти первые  $M$  собственных значений и функций приближенно с точностью  $O(h^2)$ . В случае, когда требуется найти собственные значения (и функции) с высокой степенью точности, имеющей, например, порядок  $10^{-7}$ – $10^{-8}$ , непосредственное применение этой процедуры потребует выбора очень мелкого шага  $h$  исходной сетки  $\omega$ . Это существенно повышает размерность матрицы  $A$ , что, с одной стороны, увеличивает затраты машинного времени, необходимые для решения сеточной задачи (8), а с другой стороны, ведет к росту роли ошибок округления. Последнее может свести на нет увеличение точности решения, достигнутое за счет уменьшения шага  $h$ .

Более перспективным с точки зрения экономичности и эффективности повышения точности является применение экстраполяции по Ричардсону [19]. Данная процедура, как известно, заключается в построении на интервале  $(0, H)$  нескольких сеток  $\omega^{(l)}$ ,  $l=1, 2, \dots$ , отвечающих шагам  $h^{(1)} > h^{(2)} > \dots$ , нахождении решений  $(\lambda_n^{(l)}, y_n^{(l)})$  спектральной задачи (8) для каждой сетки  $\omega^{(l)}$  и последующем уточнении найденных собственных значений и функций. В случае четырех сеток уточнение собственных значений производится по формуле

$$\lambda_n = \alpha_1 \lambda_n^{(1)} + \alpha_2 \lambda_n^{(2)} + \alpha_3 \lambda_n^{(3)} + \alpha_4 \lambda_n^{(4)}.$$

Здесь постоянные  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  выбираются так, чтобы

$$|\lambda_n - \xi_n^2| = O(h^8), \quad h = h^{(1)}, \quad 1 \leq n \leq N_0 < N. \quad (9)$$

Аналогичная формула справедлива и для уточнения компонент собственных векторов при условии, что соответствующий выбор шагов  $h^{(l)}$  обес-

печивает вложенность сеток  $\omega^{(n)}$ :

$$\omega^{(1)} \subset \omega^{(2)} \subset \omega^{(3)} \subset \omega^{(4)}. \quad (10)$$

Применение экстраполяции по Ричардсону на четырех сетках составляет содержание 3-го этапа описываемого здесь алгоритма.

Описанный выше метод применим и для решения сингулярной задачи (1)–(3), отвечающей волноводу  $D_\infty$  бесконечной глубины. Известно [1, 2], что спектр этой задачи состоит из двух компонент: дискретной, содержащей счетное (в общем случае) множество собственных значений  $\xi_n^2$ , и непрерывной, заполняющей сплошь некоторое множество в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  (на оси  $\mathbb{R}$  при  $\kappa=0$ ). Из собственных значений дискретного спектра особенно важную роль в энергетическом плане играют первые  $M$  значений  $\xi_n^2$ , расположенных в порядке убывания  $\text{Re } \xi_n^2$  и удовлетворяющих условию

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\omega^2}{c^2(z)} = \frac{\omega^2}{c_\infty^2} \leq \text{Re } \xi_n^2 < \max_{0 \leq z < \infty} \frac{\omega^2}{c^2(z)}, \quad n=1, 2, \dots \quad (11)$$

Именно на эти  $M$  значений в акустической литературе часто ссылаются как на дискретный спектр волновода  $D_\infty$ .

Для нахождения введенного таким образом дискретного спектра волновода  $D_\infty$  необходимо в соответствии с [3, 4] заменить сингулярную задачу, отвечающую волноводу  $D_\infty$ , не-сингулярной задачей вида (1)–(3) и далее найти первые  $M$  собственных значений для нескольких глубин  $H$  и разных типов краевых условий, отвечающих, например, жесткой либо мягкой стенкам  $z=H$ . Тогда представление о верных цифрах собственных значений дискретного спектра волновода  $D_\infty$  дадут совпадающие цифры вычисленных указанным образом соответствующих собственных значений волновода  $D_H$ . При этом отвечающее найденным собственным значениям  $\xi_n^2$  поле в виде суммы  $M$  нормальных волн моделирует поле дискретного спектра волновода  $D_\infty$ . На остальные собственные значения волновода  $D_H$  можно смотреть как на дискретный аналог непрерывного спектра волновода  $D_\infty$ , а соответствующие им моды аналогичны виртуальным модам, введенным в [20, 21] для приближенного вычисления боковой волны. Ниже будем ссылаться на изложенный метод нахождения собственных значений волновода  $D_\infty$  как на метод усечения.

Проиллюстрируем возможности предложенного алгоритма на двух тестах. В качестве первого теста рассмотрим трехслойный полубесконечный поглощающий волновод  $D$  с параметрами, взятыми из [6]:

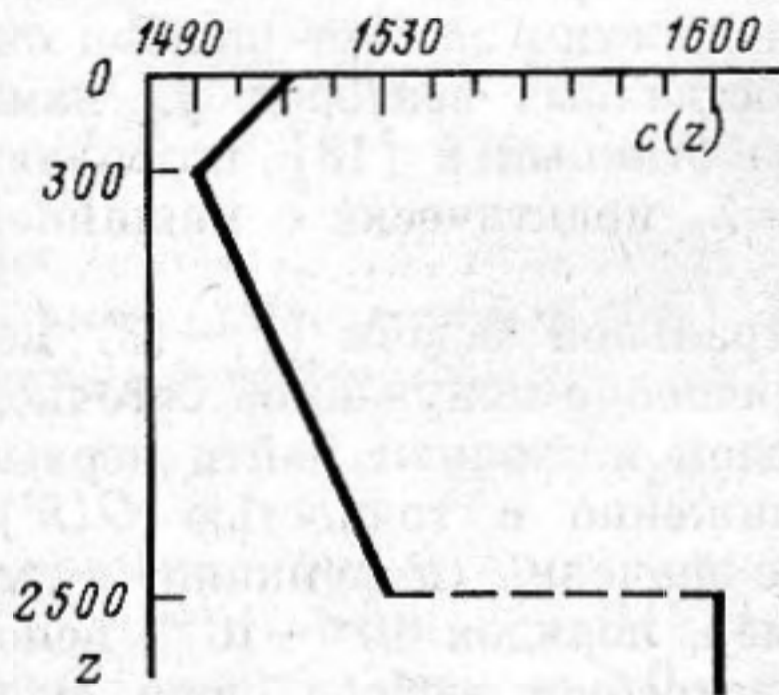
$$H_1=300 \text{ м, } \rho_1=1 \text{ г/см}^3, H_2=2200 \text{ м, } \rho_2=1 \text{ г/см}^3, \\ H_3=\infty, \rho_3=1,6 \text{ г/см}^3, c=c_1(z), 0 < z < \infty, \quad (12)$$

$$f=10 \text{ гц.}$$

Здесь и ниже  $H_2$  (либо  $H_3$ ) обозначает глубину второго (либо третьего) слоя волновода  $D$ . Профиль  $c(z)$  скорости звука в (12) изображен на рис. 1. Поглощение в волновод  $D_\infty$  введем с помощью формулы:

$$k_j = \frac{\omega}{c_j} (1+i\gamma_j)^{1/2}, \quad j=1, 2, 3; \quad \gamma_1=0, \quad \gamma_2=0, \quad \gamma_3=10^{-2}. \quad (13)$$

Для нахождения дискретного спектра волновода  $D_\infty$  заменим, следуя методу усечения, волновод  $D_\infty$  с параметрами (12), (13) соответствующим



Профиль скорости звука

щим волноводом  $D_H$  конечной глубины  $H=H_1+H_2+H_3$ , и введем на интервале  $(0, H)$  последовательность четырех сеток  $\omega^{(l)}$  с параметрами

$$h_1=3,75 \text{ м}, \quad h_2=27,5, \quad h_3=20 \text{ м}, \quad (14)$$

$$h=\sqrt{h_1 h_2 h_3}, \quad h^{(l)}=h/l, \quad l=1, 2, 3, 4,$$

которым отвечают постоянные значения  $N_1=H_1/h_1=80$ ,  $N_2=80$  и растущее с ростом  $H_3$  значение  $N_3=H_3/h_3$ .

Вычисленные с порядком  $O(h^8)$  собственные значения волновода  $D_H$ , умноженные на  $10^3$ , приведены для двух значений глубины  $H_3$ , указанных в строке 1 и двух типов стенки  $z=H$  (жесткой и мягкой) в табл. 1 для номеров  $n=1, 3, 5, 7, 9, 11, 12$ . Строка 2 ее содержит значения машинного времени в сек., требуемого для вычисления на ЭВМ ЕС-1061 первых 15 собственных значений волновода  $D_H$  для соответствующих значений  $H_3$ . В строках 4, 5, ..., 10 приведены вещественные  $\text{Re } \lambda_n$  и мнимые  $\text{Im } \lambda_n$  части найденных собственных значений  $\lambda_n$  — для глубины  $H_3=300$  м ( $H=2500$  м) в столбцах 1 и 2 и глубины  $H_3=390$  м ( $H=2890$  м) в столбцах 3 и 4. При этом верхние значения в каждой строке соответствуют волноводу  $D_H$  с жесткой стенкой  $z=H$ , а нижние значения — волноводу  $D_H$  с мягкой стенкой  $z=H$ . Сравнение результатов «по горизонтали» (либо «вертикали») показывает хорошее совпадение между собой собственных значений, отвечающих глубинам  $H_3=300$  м и 390 м (либо жесткой и мягкой стенке  $z=H$ ), хотя оно и ухудшается с ростом  $n$ . Если взять  $H_3=480$  м и сравнить между собой собственные значения, отвечающие глубинам  $H_3=390$  и 480 м, то их совпадение оказывается еще больше за счет уменьшения ошибки метода усечения. Это видно из столбцов 3 и 4 табл. 1, где подчеркнуты совпадающие цифры собственных значений для глубин  $H_3=390$  и 480 м. Отметим также, что поскольку в рассматриваемом случае  $\omega^2/c_3^2 \approx 0,0015421$ , то из табл. 1 вытекает, что условию (11) удовлетворяют лишь первые 11 собственных значений волновода  $D_H$ .

На основании данного анализа заключаем, что дискретный спектр волновода  $D_\infty$  с параметрами (12), (13) состоит из 11 комплексных собственных значений  $\lambda_n$ . Верные цифры их определяются по совпадающим цифрам значений, приведенных в каждой строке табл. 1 и помещены в столбцах 1 и 4 табл. 2. При  $n=1$  мы ограничились (в целях экономии места) приведением лишь первых 10 верных цифр после запятой у  $\text{Re } \lambda_n$ , хотя в действительности их получается больше (до 12–13 цифр). При  $n=11$  изложенный способ позволяет определить лишь 6–7 верных цифр. Это объясняется тем, что при больших  $n$  возрастает (по сравнению с ошибкой усечения) роль ошибки дискретизации задачи (1)–(3) [16]. Поэтому для увеличения числа верных цифр при  $n$ , близких к 11, необходимо уменьшить начальные шаги  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$  в (14), что, естественно, повлечет увеличение времени счета на ЭВМ.

Аналогичным образом определяются собственные значения волновода  $D_\infty$  с параметрами (12), при других значениях коэффициента поглощения  $\gamma_3$ , хотя следует отметить, что глубина  $H_3$ , на которой наступает стабилизация собственных значений, растет с уменьшением  $\gamma_3$ . Отвечающие значениям  $\gamma_3=10^{-4}$  и  $\gamma_3=0$  собственные значения (вещественные при  $\gamma_3=0$ ) приведены в столбцах 2, 5 и 3 табл. 2, которая суммирует результаты вычисления собственных значений волновода  $D_\infty$  с параметрами (12) для различных значений  $\gamma_3$ . В частности, она позволяет определить с точностью не ниже  $10^{-12}$  при  $n=1$  и  $10^{-6}$ – $10^{-7}$  при  $n=11$  величины комплексных добавок к собственным значениям  $\lambda_n$  непоглощающего волновода  $D_\infty$ , возникающих за счет внесения в дно поглощения с коэффициентом  $\gamma_3=10^{-2}$  и  $10^{-4}$ .

В качестве второго теста рассмотрим двухслойный полубесконечный поглощающий волновод Пекериса с параметрами, взятыми из [13]:

$$H_1=150 \text{ м}, \quad c_1=1500 \text{ м/с}, \quad \rho_1=1 \text{ г/см}^3, \quad f=300 \text{ гц}$$

$$H_2 = \infty, \quad c_2 = 1570 \text{ м/с}, \quad \rho_2 = 1,7 \text{ г/см}^3. \quad (15)$$

Аналогично предыдущему тесту рассмотрим три случая, отвечающие значениям  $\gamma_2$ , равным  $10^{-2}$ ,  $10^{-4}$  и 0.

Следуя схеме метода усечения, заменим волновод  $D_\infty$  двухслойным волноводом  $D_H$  конечной глубины  $H = H_1 + H_2$  и введем в  $(0, H)$  последовательность сеток  $\omega^{(l)}$  с параметрами

$$h_1 = 3 \text{ м}, \quad h_2 = 1 \text{ м}, \quad h = \sqrt[3]{3} \text{ м}, \quad h^{(l)} = h/l, \quad l = 1, 2, 3, 4. \quad (16)$$

Применение разработанного выше метода для отыскания собственных значений волновода  $D_H$  с жесткой либо мягкой стенкой  $z = H$  при значениях  $H_2$  от 25 до 75 м и позволяет построить при каждом  $\gamma_2$  две таблицы собственных значений, аналогичные таблицам 1 и 2. Анализ этих таблиц показывает, что дискретный спектр волновода  $D_\infty$  с параметрами (15) состоит из 18 комплексных (при  $\gamma_2 > 0$ ) собственных значений  $\lambda_n$ . Верные цифры последних для  $n = 1, 2, 3, 9, 10, 13, 16, 17, 18$  приведены в табл. 3, структура которой полностью аналогична структуре табл. 2.

Подтверждение правильности приведенных результатов может дать сравнение с результатами работы [13], где приведены с десятью значащими цифрами квадратные корни  $\xi_n$  из собственных значений рассматриваемого волновода  $D_\infty$  при  $\gamma_2 = 10^{-2}$  для номеров  $n = 1, 2, 3, 10$ . Указанное сравнение показывает (см. табл. 4), что для этих значений  $n$  все 10

Таблица 1

1	НЗ	300		390 (480)	
		29,6		31,5 (33,6)	
2	Т				
3		Re $\lambda \times 1000$	Im $\lambda \times 1000$	Re $\lambda \times 1000$	Im $\lambda \times 1000$
4	1	1,759310486475	0,1215 D-12	1,759310486475	0,1212 D-12
		1,759310486475	0,1209 D-12	1,759310486475	0,1211 D-12
5	3	1,721258514195	0,6202 D-07	1,721258513399	0,6174 D-07
		1,721258512453	0,6138 D-07	1,721258513250	0,6166 D-07
6	5	1,692182103272	0,2759 D-04	1,692181542245	0,2736 D-04
		1,692180851303	0,2706 D-04	1,692181412046	0,2728 D-04
7	7	1,659242908434	0,1877 D-03	1,659236276096	0,1848 D-03
		1,659227616905	0,1806 D-03	1,659234247981	0,1835 D-03
8	9	1,614102523340	0,4036 D-03	1,614071414723	0,3892 D-03
		1,614025056092	0,3632 D-03	1,614056309711	0,3779 D-03
9	11	1,557340965648	0,1134 D-02	1,557147489823	0,1072 D-02
		1,556757898317	0,6685 D-03	1,556951328900	0,7834 D-03
10	12	1,526729066794	0,4843 D-02	1,521261805883	0,3797 D-02
		1,524061546185	0,1019 D-02	1,524713773796	0,1508 D-02

Таблица 2

	0,01	0,0001	0	0,01	0,0001
	Re( $\lambda$ ) · 1000			Im( $\lambda$ ) · 1000	
1	1,7593104864	1,7593104864	1,7593104864	0,121 D-12	0,121 D-14
3	1,7212585133	1,7212585162	1,7212585162	0,617 D-07	0,618 D-09
5	1,6921814	1,69218320	1,69218320	0,273 D-04	0,274 D-06
7	1,659235	1,6592480	1,6592480	0,184 D-03	0,185 D-05
9	1,61406	1,614094	1,614094	0,385 D-03	0,386 D-05
11	1,5570	1,5572	1,5572	0,10 D-02	0,10 D-04

Таблица 3

	0,01	0,0001	0	0,01	0,0001
	Re( $\lambda$ )			Im( $\lambda$ )	
1	1,5787235417	1,5787236380	1,5787236380	0,126849219 D-5	0,1276669594 D-7
2	1,5774836607	1,5774840386	1,5774840387	0,501570724 D-5	0,5047572102 D-7
3	1,5754159223	1,5754167472	1,5754167473	0,110772522 D-4	0,1114604805 D-6
9	1,5455052346	1,5455108946	1,5455108952	0,821877259 D-4	0,8264322916 D-6
10	1,5375817698	1,5375885829	1,5375885835	0,983912500 D-4	0,9895460699 D-6
13	1,5087510593	1,5087634512	1,5087634524	0,158868240 D-3	0,1601587700 D-5
16	1,4723833150	1,4724190298	1,4724190335	0,2770024 D-3	0,284531 D-5
17	1,458629501	1,4587032	1,4587032568	0,37067 D-3	0,3972 D-5
18	1,444079	1,444377	1,4443772	0,582 D-3	0,95 D-5

Таблица 4

	Расчет по алгоритму статьи		Расчет по методу [13]	
	Re $\xi$	Im $\xi$	Re $\xi$	Im $\xi$
1	1,2564726585687	0,50478304784 D-6	1,256472658	5,0478 D-7
2	1,2559791641515	0,19967318665 D-5	1,255979164	1,9967 D-6
3	1,2551557362860	0,44127003173 D-5	1,255155736	4,4127 D-6
10	1,2399926497572	0,39674126304 D-4	1,239992649	3,9674 D-5

цифр, приведенные в [13], совпадают с первыми десятью цифрами квадратных корней собственных значений, вычисленных изложенным выше способом и размещенных в столбцах 1 и 4 таблицы 3.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховский Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
2. Акустика океана/Под ред. Санто Дж. Де. М.: Мир, 1982. 320 с.
3. Титчмарш Е. К. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями 2-го порядка. В 2-х т. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Алексеев Г. В. Математические основы акустики океана. Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 1988. 228 с.
5. Stickler D. C. Normal-mode program with both the discrete and branch line contributions // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 57. № 4. P. 856-861.
6. Вагин А. В., Мальцев Н. Е. Расчеты низкочастотных звуковых полей в слоистом океане // Вопр. судостроения. Акустика. 1977. Вып. 9. С. 61-81.
7. Агеева Н. С., Крупин В. Д. Структура инфразвукового поля в мелком море // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 8. С. 340-345.
8. Мальцев Н. Е. Математическое моделирование звуковых полей в акустике океана // Акустика океана. Современное состояние. М.: Наука, 1982. С. 5-24.
9. Mitchell S. K. The role of the seabottom attenuation profile in shallow water acoustic propagation // J. Acoust. Soc. Amer. 1983. V. 73. № 1. P. 153-162.
10. Porter M. B., Reiss E. L. A numerical method for ocean-acoustic normal modes // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. V. 76. № 1. P. 244-252.
11. Porter M. B. Numerical models for ocean-acoustic modes. Numer. Math. Appl. R. Vichnevetsky, J. Vignes (editors). Elsevier Science Publishers B. V. (North Holland) // IMACS. 1986. P. 243-247.
12. Гиндлер И. В. Теория возмущений для несамосопряженной волновой задачи // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 6. С. 1003-1007.
13. Гиндлер И. В., Козельский А. Р. Применение процедуры «нелинеаризации» для нахождения собственных чисел задачи Пекериса // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 4. С. 616-620.
14. Агеева Н. С., Крупин В. Д. Нормальные моды в волноводе с моделью дна в виде низкоскоростного неоднородного слоя с поглощением // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 391-397.
15. Агеева Н. С., Крупин В. Д. Трансформация мод в волноводе с непрерывно-переходным поглощающим слоем дна // Акуст. журн. 1989. Т. 25. № 3. С. 385-390.
16. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
17. Уилкинсон Дж., Райни К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1976. 392 с.
18. Митченко А. Д. Алгоритмы исчерпывания трехдиагональных симметрических и двухдиагональных матриц с гарантированной оценкой точности // Тр. Ин-та математики АН СССР. Сиб. отделение. 1985. Т. 6. С. 110-161.

19. Марчук Г. И., Шайдунов В. В. Повышение точности разностных схем. М.: Наука, 1979. 390 с.
20. Labianca F. M. Normal modes, virtual modes and alternative representations in the theory of surface duct sound propagation // J. Acoust. Soc. Amer. 1973. V. 53. № 4. P. 1137-1147.
21. Tindle C. T., Stamp A. P., Guthrie K. Virtual modes and the surface boundary condition in underwater acoustics // J. Sound Vibr. 1976. V. 49. № 2. P. 231-240.

Институт прикладной математики  
ДВО Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
03.04.90

*G. V. Alekseev, E. G. Komarov*

#### THE FAST ALGORITHM OF EIGENVALUE COMPUTATION FOR A MULTILAYERED ABSORBING WAVEGUIDE

The fast numerical algorithm for defining eigenvalues of a multilayered absorbing acoustic waveguide is developed. The algorithm is based on discretization of the differential spectral problem with the help of the finite difference method, determination of algebraic spectral problem eigenvalues by the *OL*-algorithm and improvement of accuracy of the solution obtained by the standard Richardson extrapolation. Some test examples illustrate the rate and the accuracy of the developed algorithm.