

УДК 534.213

© 1990 г.

Р. Г. Галиуллин, А. З. Мурзаханова, И. П. Ревва

**ВЛИЯНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА
В ПОЛУОТКРЫТОЙ ТРУБЕ**

Предлагается расчет влияния потерь внутри трубы на амплитуду резонансных колебаний газа в трубе с открытым концом, генерирующих нестационарную струю.

Известно, что образование нестационарной струи на открытом конце трубы при резонансных колебаниях газа обуславливает нелинейный характер поведения системы [1]. В [2, 3] рассмотрены колебания газа в цилиндрической трубе с открытым концом для случая, когда энергия, вводимая поршнем, полностью отводится с помощью нестационарной струи.

В данной работе рассчитывается влияние потерь энергии внутри трубы, связанных с вязкостью и теплопроводностью газа, на амплитуду резонансных колебаний, генерирующих нестационарную струю на открытом конце трубы.

Рассмотрим колебания газа в узкой цилиндрической трубе ($R/l \ll 1$, где R — радиус, l — длина трубы), возбуждаемые гармонически колеблющимся поршнем с небольшой амплитудой смещения l_0 ($l_0/l \ll 1$). Пусть нелинейность внутри трубы можно считать малой, т. е. $U/\omega l \ll 1$, где ω — циклическая частота колебаний, U — амплитуда колебаний скорости, вместе с тем $\omega R/V \ll 1$, где V — амплитуда колебаний осевой скорости на открытом конце.

Тогда первое (акустическое) приближение описывается системой

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} &= \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right), & \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_1) \right] &= 0, \\ \rho_0 c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_1}{\partial t}, & p_1 &= \rho_0 RT_1 + RT_0 \rho_1, \end{aligned} \tag{1}$$

где p — давление; ρ — плотность; T — температура; u , v — осевая и радиальная компоненты скорости; μ — коэффициент динамической вязкости; λ — коэффициент теплопроводности; индексы указывают на соответствующее приближение. С учетом изотермичности граничные условия на стенке имеют вид $u_1=0$, $v_1=0$, $T_1=0$ на $r=R$. Решение системы (1) выражается через функции Бесселя от аргумента $z=r\sqrt{\omega/\nu} \sqrt{i\nu}$ [4], где ν — коэффициент кинематической вязкости. Волновое число

$$ik = \pm k_0 \left\{ \frac{J_0(z_0)}{J_2(z_0)} \left[\kappa + (\kappa - 1) \frac{J_2(z_0 \sqrt{Pr})}{J_0(z_0 \sqrt{Pr})} \right] \right\}^{1/2}, \tag{2}$$

где $k_0 = \omega/c_0$, $z_0 = R\sqrt{\omega/\nu} \sqrt{i\nu}$, $Pr = \nu/a$, a — коэффициент температуропроводности, $\kappa = c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей, J_0 , J_2 — функции Бесселя соответствующего порядка, является комплексным и частотно-зависимым, т. е. его можно представить в виде

$$k = \pm k_0 [(1 + \beta'(\omega)) + i\beta''(\omega)]. \tag{3}$$

Согласно [5], действительная часть добавки $\beta'(\omega)$ к волновому числу определяет дисперсию, а мнимая $i\beta''(\omega)$ — поглощение. В рассматриваемом

мом случае они обусловлены трением о стенку и теплопроводностью в пограничном слое, являясь мерой обратного влияния пограничных слоев на ядро потока. В случае высокочастотных колебаний ($R\sqrt{\omega/2\nu} \gg 1$) воспользуемся асимптотическими разложениями функции J_0 и J_2 для больших значений аргумента. Тогда $\beta'(\omega)$, $\beta''(\omega)$ могут быть вычислены с любой, наперед заданной, точностью: так, если достаточна точность H^{-1} , где $H=R\sqrt{\omega/2\nu}$, получим

$$\beta'(\omega) = -\beta''(\omega) = 0,5 \left(1 + \frac{\kappa-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) H^{-1}. \quad (4)$$

Проведем аналогичные разложения выражений для колебаний термодинамических величин. Получим

$$p_1 = [-A \exp(ikx) - B \exp(-ikx)] \exp(i\omega t),$$

$$u_1 = \frac{k}{\rho_0 \omega} [A \exp(ikx) - B \exp(-ikx)] [1 - \bar{r}^{-1/2} \exp(-(1+i)\eta)] \exp(i\omega t),$$

$$v_1 = (1+i) (\omega R / 2\rho_0 c_0^2 H) \left\{ \left(\frac{\kappa-1}{\sqrt{\text{Pr}}} + 1 \right) \bar{r} - \right. \\ \left. - \bar{r}^{-1/2} \left[\exp(-(1+i)\eta) + \frac{\kappa-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \exp(-(1+i)\eta\sqrt{\text{Pr}}) \right] \right\} p_1, \quad (5)$$

$$T_1 = \frac{1}{\rho_0 c_p} [1 - \bar{r}^{-1/2} \exp(-(1+i)\eta\sqrt{\text{Pr}})] p_1,$$

$$\rho_1 = \frac{1}{c_0^2} [1 + (\kappa-1)\bar{r}^{-1/2} \exp(-(1+i)\eta\sqrt{\text{Pr}})] p_1,$$

где $\bar{r}=r/R$, $\eta=H(1-\bar{r})$, A и B — константы, которые предстоит определить из граничных условий на концах трубы.

В отличие от точных решений [4] полученные выражения имеют особенность при $r \rightarrow 0$ из-за появления множителя $\bar{r}^{-1/2}$. Это обусловлено тем, что при $r \rightarrow 0$ имеем $z \rightarrow 0$ и использованные асимптотические разложения функций J_0 и J_1 для больших значений аргумента z перестают работать.

Таким образом, выражения (5) справедливы всюду, за исключением области размером RH^{-1} вблизи оси канала.

В ядре потока размером $\bar{r} \approx 1 - 4,6 H^{-1}$ с точностью 1% справедливы соотношения

$$p_1 = [-A \exp(ikx) - B \exp(-ikx)] \exp(i\omega t),$$

$$u_1 = \frac{k}{\rho_0 \omega} [A \exp(ikx) - B \exp(-ikx)] \exp(i\omega t), \quad (6)$$

$$v_1 = (1+i) (\omega R / 2\rho_0 c_0^2 H) \left(\frac{\kappa-1}{\sqrt{\text{Pr}}} + 1 \right) \bar{r} p_1, \quad T_1 = \frac{p_1}{\rho_0 c_p}, \quad \rho_1 = \frac{p_1}{c_0^2}.$$

Наличие динамического пограничного слоя приводит к появлению эффекта вытеснения, который можно учесть, если осреднить осевую скорость по сечению трубы и потребовать, чтобы граничные условия на концах выполнялись для этой осредненной скорости. Для удобства в последующих вычислениях целесообразно колебания давления и скорости представить в виде

$$\tilde{p}_1 = r_1 \cos(kx + \alpha + i\beta) \exp i(\omega t + \psi), \quad (7)$$

$$\tilde{u}_1 = r_1 \mu_1 \sin(kx + \alpha + i\beta) \exp i\left(\omega t + \psi + \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

где $\tilde{p}_1 = p_1 / \rho_0 c_0^2$, $\tilde{u}_1 = u_1 / c_0$; r_1 , β — модуль и главное значение аргумента безразмерной амплитуды колебаний соответственно; μ_1 , φ — модуль и

главное значение аргумента функции

$$\Phi = [(1+\beta') - i\beta'] \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{J_0(z)}{J_0(z_0)} \right\} \bar{r} d\bar{r}. \quad (8)$$

Рассмотрим граничные условия. Пусть поршень совершает колебания $x=l_0 \cos \omega t$, где l_0 — амплитуда смещения, тогда скорость поршня $u_n = -\omega l_0 \sin \omega t$. Если $\omega l_0/c_0 = M = \varepsilon^2$, ε — малый параметр, то с точностью до членов порядка ε^4 справедливо соотношение $u_1 = -\omega l_0 \sin \omega t$ при $x=0$. Запишем это условие в виде

$$\tilde{u}_1(x=0) = M \exp \left[i \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (9)$$

При формулировании граничного условия на открытом конце узких труб необходимо учесть малость потерь на акустическое излучение по сравнению со струйными потерями (условие $\omega R/V \ll 1$), а также требование, чтобы давление на открытом конце не содержало постоянной составляющей [3]. Для акустического приближения будем иметь

$$\tilde{p}_1(x=l) = m V \tilde{u}_1(x=l), \quad (10)$$

где m — коэффициент, учитывающий геометрию открытого конца, V — амплитуда колебаний осевой скорости.

Подставим выражения (7) в (9), (10). После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} r_1 \mu_1 \sin \alpha \operatorname{ch} \beta &= M \cos(\psi + \varphi), & r_1 \mu_1 \cos \alpha \operatorname{sh} \beta &= -M \sin(\psi + \varphi), \\ \cos [k_0 l(1+\beta') + \alpha] \operatorname{ch} (k_0 l \beta' - \beta) &= m r_1 \mu_1^2 [\sin^2 [k_0 l(1+\beta') + \alpha] \times \\ &\times \operatorname{ch}^2 (k_0 l \beta' - \beta) + \cos^2 [k_0 l(1+\beta') + \alpha] \operatorname{sh}^2 (k_0 l \beta' - \beta)] \sin \varphi, & (11) \\ \sin [k_0 l(1+\beta') + \alpha] \operatorname{sh} (k_0 l \beta' - \beta) &= m r_1 \mu_1^2 [\sin^2 [k_0 l(1+\beta') + \alpha] \times \\ &\times \operatorname{ch}^2 (k_0 l \beta' - \beta) + \cos^2 [k_0 l(1+\beta') + \alpha] \operatorname{sh}^2 [k_0 l \beta' - \beta)] \cos \varphi. \end{aligned}$$

Система (11) полностью определяет четыре неизвестные величины r_1 , ψ , α , β . Для определения входящих в систему коэффициентов μ_1 , φ требуется вычислить функцию Φ . При $H \gg 1$, пусть $H > 10$, получим $\Phi = 1 - (1 - i)(1-a)H^{-1}$, где $a = 0,5(1 + (\kappa - 1)/\sqrt{\operatorname{Pr}})$, что дает

$$\mu_1 = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{1-a}{H} \right) \right]^2 + \left(\frac{1-a}{H} \right)^2}, \quad \sin \varphi = \frac{1-a}{\mu_1 H},$$

т. е. $\mu_1 \sim 1$, $\sin \varphi \sim \varphi \sim H^{-1} \sim \varepsilon \ll 1$. Предположим, что $\beta \sim \varepsilon$, тогда $\operatorname{sh} \beta \simeq \beta$, $\operatorname{ch} \beta \simeq 1$, а в силу $\beta' \simeq H^{-1}$ и $\operatorname{sh} (k_0 l \beta' - \beta) \simeq k_0 l \beta' - \beta$, $\operatorname{ch} (k_0 l \beta' - \beta) \simeq 1$. Получим

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - k_0 l(1+\beta'), \quad \beta = k_0 l \beta' + m r_1 \mu_1^2, \quad (12)$$

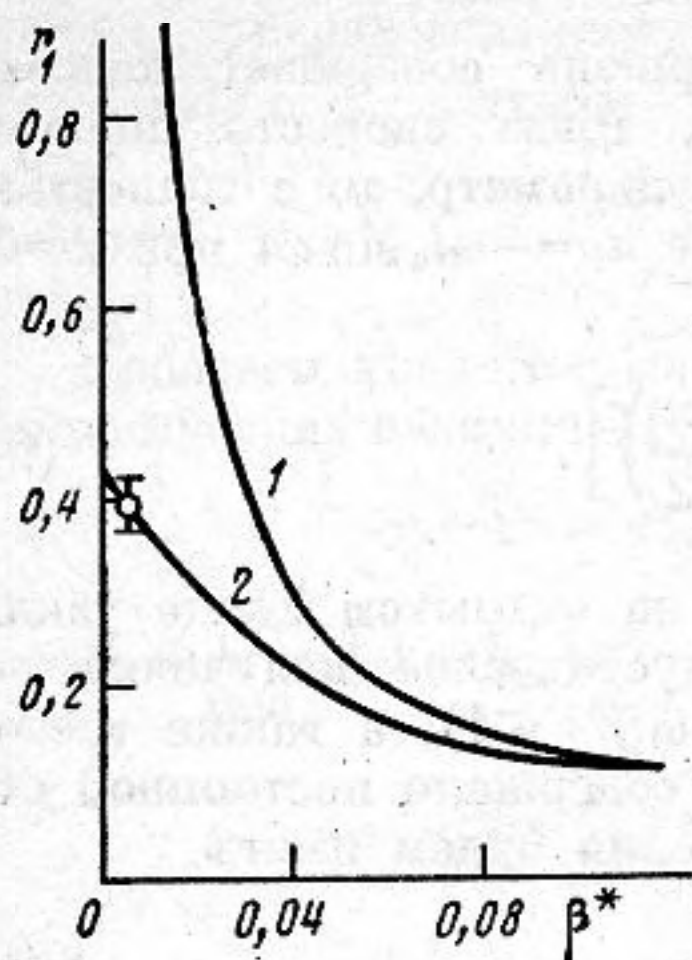
при этом безразмерная амплитуда колебаний давления находится из формулы

$$\mu_1 r_1 [\cos^2 k_0 l(1+\beta') + \sin^2 k_0 l(1+\beta') (k_0 l \beta' + m r_1 \mu_1^2)^2]^{1/2} = M. \quad (13)$$

Помимо пристеночных потерь в системе существуют и другие виды диссипации, поэтому справедливость соотношения (4) далеко неочевидна. При конечной амплитуде колебаний весьма важным может стать нелинейное поглощение, связанное с генерацией высших гармоник [6]. Оценка его для $l=4$ м и $M=0,1$ дает значение $\alpha_n \simeq 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$. Это приблизительно в 5 раз меньше величины $k_0 \beta'$, вытекающей из (4). В связи с тем, что M редко превышает 0,1 (в [3], например, описыва-

ются эксперименты с $M \approx 0,0556$), то эту оценку следует рассматривать как оценку сверху.

Можно показать далее, что при низкочастотных колебаниях поглощение, происходящее в объеме среды [7], невелико: для трубы с $l=4$ м, резонирующей на частоте 21,4 Гц, $\alpha_0 \approx 10^{-9}$ м⁻¹. Следовательно, если в системе реализуется ламинарный режим движения,



то оценка затухания по соотношению $\beta^* = k_0 \beta'$, где β' определяется (4), будет корректной. Этот вывод не согласуется с классической теорией, согласно которой $\beta^* = 0,5 k_0 H^{-1}$, т. е. примерно в 1,5 раза меньше, чем это следует из (4) [8]. Подобное расхождение можно объяснить тем, что классическая теория упускает влияние температурного пограничного слоя, который образуется, если, например, поддерживать температуру стенки постоянной. Влияние этого фактора учитывается в (4) слагаемым $(\kappa=1)/\sqrt{Pr}$, которое при $\kappa=1,4$, $Pr=0,72$ равно 0,47. Эксперименты подтверждают такое заключение [8].

Вдали от резонанса $k_0 l (1 + \beta') \rightarrow 0$, $\pi \dots$, из (13) следует $r_1 = \mu_1^{-1} M$, что соответствует линейной теории. На около-резонансных частотах, когда $k_0 l (1 + \beta') \approx \pi/2$, поведение решения существенно зависит от того, образуется на открытом конце струя ($m \neq 0$) или нет ($m = 0$). Если $m = 0$, то при $\mu_1 \approx 1$ получаем

$$r_1 = M (k_0 l \beta')^{-1}. \quad (14)$$

Сходный результат описан в [7] для случая возбуждения колебаний давлением, приложенным на открытом конце трубы.

При $m \neq 0$ (на открытом конце образуется струя) решение имеет вид

$$r_1 = (2m^{-1}) \{ [(k_0 l \beta')^2 + 4mM]^{1/2} - k_0 l \beta' \}. \quad (15)$$

Сравнение (14) и (15) показывает, что формирование струи оказывает существенное влияние на характер зависимости $r_1 = r_1(M, \beta)$. Наглядно этот вывод демонстрируется на рисунке. Там же нанесено значение амплитуды первой гармоники, наблюдавшееся в эксперименте [3] для $M = 0,056$, $l = 4,5$ м, $\beta^* = 6,4 \cdot 10^{-3}$ м⁻¹. Значительное расхождение экспериментального результата с линией 1 (в условиях [3] формула (14) дает абсурдный результат $r_1 = 1,92$) и совпадение с расчетом по формуле (15) говорят о том, что вплоть до точки пересечения кривых $\beta^* = \beta_{кр}^*$ за установление амплитуды ответственны два механизма — потери за счет образования струи на открытом конце трубы и пристеночные потери внутри трубы. Вместе с тем при $\beta^* > \beta_{кр}^*$ следует ожидать режим, когда за амплитуду ответственны лишь пристеночные потери, т. е. выполняется (14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Disselhorst J. H. M., Van Wijngaarden L. Flow in the exit of open pipes during acoustic resonance // J. Fluid. Mech. 1980. V. 99. № 2. P. 293–319.
2. Галиуллин Р. Г., Ревва И. П., Халимов Г. Г. Нелинейные колебания газа в полуконической трубе // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 5. С. 617–623.
3. Галиуллин Р. Г., Ревва И. П., Пермьяков Е. И. Колебания газа большой амплитуды в трубе с открытым концом // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 3. С. 433–437.
4. Галиуллин Р. Г., Ревва И. П., Халимов Г. Г. Теория термических автоколебаний. Казань: Изд-во КГУ, 1982. 156 с.
5. Руденко О. В., Солюян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
6. Галицкий Б. М., Рыжов Ю. А., Якуш Е. В. Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. М.: Машиностроение, 1977. 256 с.
7. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 391 с.

8. *Беляев И. М., Белик Н. П., Польшин А. В.* Термоакустические колебания газожидкостных потоков в сложных трубопроводах энергетических установок. Киев; Донецк: Виша школа, 1985. 160 с.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступила в редакцию
31.10.89

R. G. Galiullin, A. Z. Murzakhanova, I. P. Pevva

**THE ABSORPTION EFFECT ON NONLINEAR GAS OSCILLATIONS
IN A HALF-OPENED TUBE**

The calculation of influence of losses inside a tube with an open end on an amplitude of gas resonance oscillations, which generate a nonstationary jet flow, is carried out.