АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 6

УДК 534.2:629

© 1993 г. А. Ф. Гладенко, А. Ф. Соболев

ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ ПЛАВНО НЕОДНОРОДНОГО КАНАЛА С ПОТОКОМ

В данной работе описывается построение главного члена асимптотического разложения функции Грина по малому параметру в осесимметричном плавно неоднородном канале с дозвуковым безвихревым сжимаемым потоком. Малый параметр обратно пропорционален характерному масштабу неоднородности канала. При построении были использованы предположения о полноте собственных функций неоднородного канала и о независимости акустического поля вблизи источника от формы канала и импеданса стенок.

В связи с разработкой эффективных средств снижения шума силовых установок самолетов большое значение имеет исследование распространения звука в каналах с потоком. В работе [1] даны общие уравнения аэроакустики и представлено систематическое изложение вопросов распространения звука в однородных каналах с потоком.

Решение аналогичных задач существенно усложняется в случае неоднородных каналов при наличии стационарного, но переменного по каналу потока газа. Учет неоднородности позволяет, с одной стороны, приблизиться к реальным каналам, с другой — учесть изменения граничных условий, возникающие из-за уменьшения уровня звука на стенке канала по мере распространения звука по каналу и нарастания пограничного слоя. В силу своей сложности задача о распространении звука в неоднородных каналах не допускает точного решения. Для построения приближенных частных решений разработаны различные аналитические и численные методы: метод многих масштабов [2], метод волновой огибающей [3] и т. д. В работе [4] получены частные решения уравнения Блохинцева в плавно неоднородном цилиндрическом канале с потенциальным и изоэнтропическим потоком в виде разложения по малому параметру ε, обратно пропорциональному характерному масштабу неоднородности. В работах [5—7] проведено исследование этих решений вблизи особых точек, в частности вблизи точек ветвления характеристического уравнения и вблизи точек поворота. Определены новые качественные особенности, связанные с раздвоением мод и резонансными явлениями внутри канала между каустическими поверхностями. Вместе с тем представляет интерес определить, как новые качественные особенности, присущие неоднородному каналу, проявляются на фоне многомодового возбуждения, когда поле создается некоторым источником.

В данной работе предпринята попытка построения формального асимптотического решения для поля точечного источника (функции Грина) в плавно неоднородном канале с потоком в главном приближении по параметру неоднородности на основе частных решений, полученных в работах [4—7]. Фактически вопрос ставится следующим образом: как, зная частные решения, получить общее, соответствующее заданному источнику. Предложено решение задачи, полученное путем соответствующего обобщения эталонной задачи. В качестве последней рассмотрена задача о поле точечного источника в однородном канале с потоком и постоянным импедансом стенок, решение которой впервые получено в работе [8]. В основе обобщения лежат два предположения: совокупность частных решений уравнения Блохинцева полна; поле вблизи источника не зависит от формы канала и импеданса стенок.

Рассмотрим распространение акустических возмущений в осесимметричном канале с дозвуковым потенциальным изоэнтропическим потоком. Сечение и импеданс стенки канала медленно изменяются вдоль оси. Потенциал акустических возмущений должен удовлетворять уравнению Блохинцева с правой частью ([9], с. 33)

$$\frac{D^2B}{Dt^2} - c^2\nabla^2 B - (\nabla\Pi, \nabla B) - \frac{DB}{Dt}(\mathbf{V}, \nabla \ln c^2) = \delta(r - r_0)\, e^{-i\omega t},$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla), \quad c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2}\mathbf{V}^2,$$

B — потенциал акустических возмущений, c_0 — скорость звука в покоящейся среде, $\gamma = 1,\ 4$, $\mathbf{V}$ — скорость основного потока, $r(r_0)$ — координаты точки наблюдения (источника). В случае идеального газа $\Pi = c^2/(\gamma - 1)$.

Воспользовавшись соотношениями

$$\nabla\Pi = \frac{1}{\gamma - 1}\nabla c^2 = -\tfrac{1}{2}\nabla v^2, \quad \frac{Dc^2}{Dt} = (\mathbf{v}\cdot\nabla c^2),$$

уравнение Блохинцева можно легко преобразовать к виду

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{c^2}\frac{DB}{Dt}\right) + \frac{1}{2c^2}(\nabla v^2 \nabla B) - \nabla^2 B = \delta(r - r_0)\, e^{-i\omega t}. \tag{1}$$

Скорость основного потока при стационарном потенциальном течении сжимаемого газа должна удовлетворять следующему уравнению ([10], с. 598):

$$c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = 0.$$

На импедансной стенке необходимо выполнение граничного условия Майерса [11]

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial h \partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho Y \frac{DB}{Dt}\right) + \frac{DB}{Dt}\rho Y\left(\mathbf{n}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial h}\right) = 0, \tag{2}$$

где ρ — плотность газа в потоке, n — нормаль к стенке канала, Y — акустическая проводимость (адмитанс) стенки. Кроме того, на стенке должно выполняться условие непротекания для основного потока $(\mathbf{v}\mathbf{n}) = 0$.

Предположение о медленности изменения сечения канала подразумевает, что углы наклона стенки канала к оси всюду малы. Формально это условие можно записать, задав уравнение стенки канала в виде $r = a(\varepsilon z)$, где ε — малый параметр, z — координата вдоль оси канала, a — радиус канала на расстоянии z от начала координат. Условие медленности изменения адмитанса вдоль оси канала запишем в виде $Y = Y(\varepsilon z)$. Будем предполагать, что все производные функций $a(\varepsilon z)$ и $Y(\varepsilon z)$ ограничены.

Плотность газа в потоке связана с плотностью газа в отсутствие его ρ_0 соотношением

$$\rho = \rho_0 \sigma^{-2/(\gamma-1)},$$

где $\sigma = c_0/c = \sqrt{1 - (\gamma - 1/2)M^2}$ — отношение скоростей звука в точке торможения и в потоке, $M = v/c$ — число Маха. Учет сжимаемости приводит к уточнению параметра $\beta = \rho c Y$

$$\beta = \beta_0 \sigma, \quad x = (\gamma - 1)/(\gamma + 1),$$

где $\beta_0 = \rho_0 c_0 Y$ — безразмерная проводимость в отсутствие потока, а также волнового числа $k = k_0\sigma$ и числа Маха

$$M = M_0\sigma, \ \ k_0 = \omega/c_0.$$

Частные решения уравнения (1) с граничными условиями (2) были получены в работе [1]. Не вдаваясь в детали, дадим схему построения этих решений методом эталонных функций. Предполагая в дальнейшем зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$, решение уравнения (1) ищем в виде

$$\Phi - (gJ_m(\Psi) - ihJ_m'(\Psi))\, e^{i(S+m\theta)}, \tag{3}$$

где $J_m(\Psi)$ — функция Бесселя порядка m, $J_m'(\Psi)$ — производная по аргументу. Неизвестные функции S, Ψ, g, h, зависящие от медленной переменной $\xi = \varepsilon z$, подлежат определению. После подстановки (3) в (1), в котором оператор $\partial/\partial t$ заменен на $-i\omega$, приравнивания нулю сомножителей, стоящих при J_m и J_m' и учете требования, чтобы лучевая структура решения (3) была согласована с уравнениями геометрической акустики неоднородной движущейся среды, получим относительно S, Ψ, g, h две системы уравнений. Первая система, эквивалентная уравнению эйконала, определяет S и Ψ. Вторая система, эквивалентная уравнению переноса, и при известных S и Ψ определяет g и h. Граничным условием для первой системы служит: $\Psi = \zeta_{mn}(\xi)$ при $r = a(\xi)$. Функция $\zeta_{mn}(\xi)$ является решением характеристического уравнения

$$F = \zeta J_m'(\zeta) - ika\beta\,(1 - \alpha M/k)^2 J_m(\zeta) = 0, \tag{4}$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, $\beta = \rho c Y$ — удельный адмитанс. M — число Маха потока, $\alpha = (-kM \pm \sqrt{g})/(1 - M^2)$, $q = k^2 - (1 - M^2)\,\zeta^2/a^2$, причем $\operatorname{Im}\sqrt{q} > 0$, знак + (—) перед $\sqrt{g}$ соответствует распространению по потоку (против потока). В уравнении (4) a, β, M зависят от ξ. Граничное условие для второй системы получим при подстановке (3) в граничное условие (2), в котором оператор $\partial/\partial t$ заменен на $-i\omega$, и учете граничного условия, налагаемого на Ψ. Функции S, Ψ, g, h ищутся в виде разложений по целым степеням ε. Подстановка искомых разложений в соответствующие уравнения приводит к рекуррентной системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Решение этой системы позволяет получить выражения для S, Ψ, g и h с требуемой точностью. Здесь мы выпишем главный член асимптотического разложения решения (3)

$$\Phi_{mn} = A_{mn}\,[\rho_0/k_0\bar{\rho}(\xi)]^{1/2} N_{mn}^{-1/2}(\xi)\, J_m \times$$

$$\times \left(\zeta_{mn}(\xi)\frac{r}{a(\xi)}\right) \exp\left[\, i\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\xi} \alpha_{mn}(\tau)\, d\tau + m\theta\right] + O(\varepsilon), \tag{5}$$

где A_{mn} — произвольная постоянная, ρ_0 — плотность газа в полностью заторможенном потоке, $\bar{\rho}(\xi)$ — плотность газа в неоднородном потоке в квазиодномерном приближении,

$$N_{mn}(\xi) = ia^2\sqrt{q_{mn}}\,\frac{\partial F}{\partial \zeta_{mn}} J_m(\zeta_{mn})/\zeta_{mn}. \tag{6}$$

Можно показать, что разложение (5) справедливо до тех пор, пока

$$\left|\, \varepsilon \int \frac{a^2\sqrt{q_{mn}}}{2i\zeta_{mn}} \frac{\partial P_{mn}}{\partial \zeta_{mn}} \frac{N_{mn}''}{P_{mn}N_{mn}}\, d\zeta \,\right| \ll 1, \tag{7}$$

где

$$P_{mn} = \frac{ika^2\sqrt{q_{mn}}\,\zeta_{mn}}{J_m(\zeta)}\frac{\partial F}{\partial \zeta_{mn}}$$

— означает дифференцирование по ξ.

Для определения неизвестных коэффициентов A_{mn} в разложении поля точечного источника по модам (5) неоднородного канала воспользуемся решением эталонной задачи. В качестве последней рассмотрим задачу о поле точечного источника в однородном цилиндрическом канале с потоком и постоянным импедансом стенок. Учитывая, что источник звука гармонический и поток направлен вдоль оси канала z, оператор D/Dt в (1) можно заменить на оператор $-i\omega + V(\partial/\partial z)$. В этом случае уравнения (1), (2) можно записать в виде

$$\nabla^2 B_1 - k^2\left(1 + \frac{iM}{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 B_1 = -\,\delta\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{8}$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial n} = ik\beta\,\left(1 + \frac{iM}{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 B_1 = 0,\ \ r = a, \tag{9}$$

где

$$B = B_1 e^{-i\omega t},\ \ \beta = \rho c Y.$$

В дальнейшем для удобства записи заменим B_1 на B_0, предполагая наличие гармонической зависимости от времени.

Точное решение задач (8), (9) находится методом преобразования Фурье по координате z, которое применяется одновременно к уравнению (8) и граничному условию (9). В результате получается интегральное представление для поля точечного источника (функция Грина в однородном канале). Интегральное выражение преобразуется в сумму волноводных мод, используя теорему Коши о вычетах в полюсах подынтегрального выражения. Достаточно подробно эта процедура описана в работе [8]. Приведем окончательное выражение в случае простых полюсов:

$$B_0 = \sum_{m=\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^+_{mn}(r,\theta,z)\,\varphi^-_{mn}(r_0,\theta_0,z_0), \tag{10}$$

где

$$\varphi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,N_{mn}^{-1/2} J_m(\zeta_{mn} r/a)\, e^{\pm i(\alpha_{mn} z + m\theta)}, \tag{11}$$

$$N_{mn} = ia^2\sqrt{q_{mn}}\,\frac{\partial F}{\partial \zeta_{mn}}\,J_m(\zeta_{mn})/\zeta_{mn},$$

ζ_{mn} — корни уравнения

$$F(\zeta) = \zeta J_m{}'(\zeta) - ika\beta\left(1 - M\frac{\alpha}{k}\right)^2 J_m(\zeta) = 0,$$

$$\alpha_{mn} = \frac{-\,kM \pm \sqrt{q_m}}{1 - M^2},$$

$$q_{mn} = k^2 - \frac{(1 - M^2)\,\zeta^2_{mn}}{a^2},\ \ \mathrm{Im}\sqrt{q_{mn}} > 0,$$

$(r,\ \theta,\ z)$ — координаты точки наблюдения в цилиндрической системе координат; $(r_0,\ \theta_0,\ z_0)$ — координаты источника; знак + (—) перед $\sqrt{q_{mn}}$ соответствует $z - z_0 > 0$ $(z - z_0 < 0)$. Вид частных решений в однородном канале (11) совершенно аналогичен виду соответствующих решений в неоднородном канале с единственным исключением, что во втором случае все параметры, от которых зависит решение, являются медленными функциями продольной координаты $\xi = \varepsilon z$, т. е. решение как бы подстраивается под медленное изменение радиуса канала и импеданса стенок.

Относительно выражения (10) можно доказать справедливость следующих утверждений:

функция Грина удовлетворяет уравнению (8) и граничному условию (9);

поле вблизи источника имеет особенность вида $1/\sqrt{r^2(1-M^2)+z^2}$, что соответствует полю точечного источника в отсутствие границ;

функция Грина удовлетворяет принципу взаимности следующего вида:

$$B_0(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0 M) = B_0(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}; -M).$$

По аналогии с выражением (10) составим формальный ряд из решений (5) для неоднородного канала. Неизвестные коэффициенты определим из условия, чтобы при $z \to z_0$ полученное таким образом решение переходило в решение (10), поскольку вблизи источника поле по предположению не зависит от формы канала. В результате получим

$$\overline{B} = \sum_{m=\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^+_{mn}(\xi, r, \theta)\Phi^-_{mn}(\zeta_0, r_0, \theta), \tag{12}$$

где

$$\Phi^+_{mn}(\xi, r, \theta) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\rho(\xi)}} N^{-1/2}_{mn}(\xi) J_m\left(\zeta_{mn}(\xi)\frac{r}{a(\xi)}\right) \exp \times$$

$$\times \left[i\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\xi} \alpha_{mn}(\xi)\, d\xi + m\theta\right)\right],$$

$$\Phi^-_{mn}(\xi_0, r_0, \theta_0) = \sqrt{\frac{\rho(\xi_0)}{2\pi}} N^{-1/2}(\xi_0) J_m(\zeta_{mn} \times$$

$$\times (\xi_0)\frac{r}{a(\xi_0)}) \exp\left[-\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\xi_0} \alpha_{mn}(\xi)\, d\xi + m\theta\right)\right].$$

При этом в формуле для α_{mn}, как и в случае однородного канала, берется знак + (—) перед $\sqrt{g_{mn}}$, если $\xi - \xi_0 > 0$ $(\xi - \xi_0 < 0)$. Нетрудно заметить, что построенная таким образом функция Грина удовлетворяет принципу взаимности следующего вида:

$$\overline{\rho}(\xi)\,\overline{B}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0, M; \varepsilon) = \overline{\rho}(\xi_0)\,\mathrm{B}(\mathbf{r}_0|\mathbf{r}, -M; \varepsilon).$$

При $\varepsilon \to 0$ $\overline{B}$ переходит в B_0.

В заключение заметим, что при условии выполнения неравенства (7) отбрасываемые добавки не будут давать существенного вклада при переходе от частных решений (5) к общему решению (12). Действительно при $m, n \to \infty$ $|\zeta_{mn}|$ также стремится к бесконечности. При этом $P_{mn} = \zeta^3_{mn}$, $N_{mn} \sim \mathrm{const}$. А это с учетом того, что производные по ξ ограничены, означает, что величина под интегралом в (9) стремится к нулю с ростом m и n.

Возникает вопрос, как быть в тех случаях, когда условие (7) не выполняется? А оно не выполняется вблизи двойных точек характеристического уравнения (4), где $\partial F/\partial\zeta = 0$ и вблизи точек поворота, где $q(\xi) = 0$. В этом случае соответствующие частные решения в разложении (12) должны быть исключены и заменены на модифицированные решения, которые получены в работах [2—4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марвин Е., Голдстейн.* Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981.
2. *Найфэ А. Н., Кайзер Дж. Е., Телионис Д. П.* Распространение звука в кольцевых каналах с переменным сечением//Ракетная техника и космонавтика. 1975. Т. 13. № 1. С. 80—87.
3. *Найфэ А. Н., Шейкер Б. С., Кайзер Дж. Е.* Распространение звука в неоднородных каналах круглого сечения с осредненным потоком сжимаемой среды//Ракетная техника и космонавтика. 1980. Т. 18. № 6. С. 46—59.
4. *Гладенко А. Ф., Леонтьев Е. А.* Распространение акустических возмущений в плавно неоднородном цилиндрическом канале с потенциальным изоэнтропическим потоком//Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 2. С. 171—177.
5. *Гладенко А. Ф., Леонтьев Е. А.* Метод пограничного слоя в задаче распространения звука в канале переменного сечения с потоком//Акуст. журн. 1987. Т. 33. С. 212—218.
6. *Гладенко А. Ф., Леонтьев Е. А.* Распространение звука в плавно неоднородном канале с потоком при наличии двух точек поворота//Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 6. С. 1008—1013.
7. *Гладенко А. Ф., Леонтьев Е. А.* Раздвоение мод в волноводе с импедансными стенками//Акуст. журн. 1988. Т. 3. № 5. С. 820—827.
8. *Соболев А. Ф.* Определение шума вентилятора в облицованном канале с потоком методом функции Грина//Тр. ЦАГИ. 1988. Вып. 2355. С. 75—82.
9. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
11. *Myers M. K.* On the acoustic boundary condition in the presence of the flow//J. Sound and Vibr. 1980. V. 71. № 3. P. 429—434.

Государственный научно-исследовательский
Центр ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского

Поступила в редакцию
12.03.93

A. F. Gladenko, A. F. Sobolev

GREEN FUNCTION IN A SMOOTHLY NONUNIFORM DUCT WITH A FLOW

The paper describes the construction of the main term of the Green function asymptotic expansion with respect to a small parameter in an axially — symmetrical smoothly — nonuniform duct with a subsonic vortex — less compressible flow. The small parameter is inversely proportional to the characteristic scale of the duct nonuniformity. Assumptions on the completeness of nonuniform duct eigenfunctiones and on the independence of acoustic field near the source from the duct form and walls impedance have been utilized.