АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 6

УДК 534.26

© 1993 г. С. В. Будрин, Г. И. Иванов

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ИЗ ОТКРЫТОГО КОНЦА ТРУБЫ, СОЕДИНЕННОГО СО СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Рассмотрен процесс излучения плоской волны из открытого конца трубы, соединенного со сферической оболочкой. Получены приближенные выражения для амплитуды колебаний конструкции и для акустических полей во внешнем пространстве и внутри трубы, справедливые для малых угловых размеров отверстия. Приведены частотные характеристики эффективности излучения при различных значениях коэффициента потерь в материале оболочки.

Рассмотрим конструкцию следующего вида (рис. 1). В сферической оболочке радиуса R вырезано круглое отверстие. Радиус отверстия будем считать много меньшим радиуса оболочки с тем, чтобы на сферическом сегменте, продолжающем оболочку внутрь отверстия, можно было бы считать, что $\partial/\partial\xi = \partial/\partial z$ (система координат изображена на рис. 1).

К отверстию присоединена труба длиной $L < 2R$ таким образом, что срезы оболочки и трубы находятся в одной плоскости и жестко связаны друг с другом.

Снаружи оболочки находится акустическая среда, характеризуемая плотностью ρ_0 и скоростью распространения звука c_0. Аналогичные параметры для среды, находящейся внутри трубы, равны ρ_1 и c_1. В области, находящейся внутри оболочки, но снаружи трубы — вакуум.

От конца трубы, находящегося внутри оболочки, по среде приходит плоская волна амплитуды p_0, зависящая от времени по закону $e^{-i\omega t}$. Частоту волны ω будем считать много меньшей кольцевой частоты трубы.

Повторным отражением волны от конца трубы, находящегося внутри оболочки, пренебрегаем. Не учитываются также и отраженные волны, возникающие в стенках трубы.

Требуется определить амплитуды колебаний оболочки и трубы и акустические поля в обеих средах.

Сформулируем поставленную задачу математически. Для определения колебаний оболочки следует решить систему из двух уравнений [1]:

$$(e - 1)\, \Delta\Delta w - 2\,(1 - e)\, \Delta w + \alpha w - \beta v = (e^2/)\, p_1\,(R, \theta), \tag{1}$$

$$(e - 1)\, \Delta v - \delta \Delta w + \gamma w - (2 + \omega_1^2)\, v = a^2 p_1\,(R, \theta). \tag{2}$$

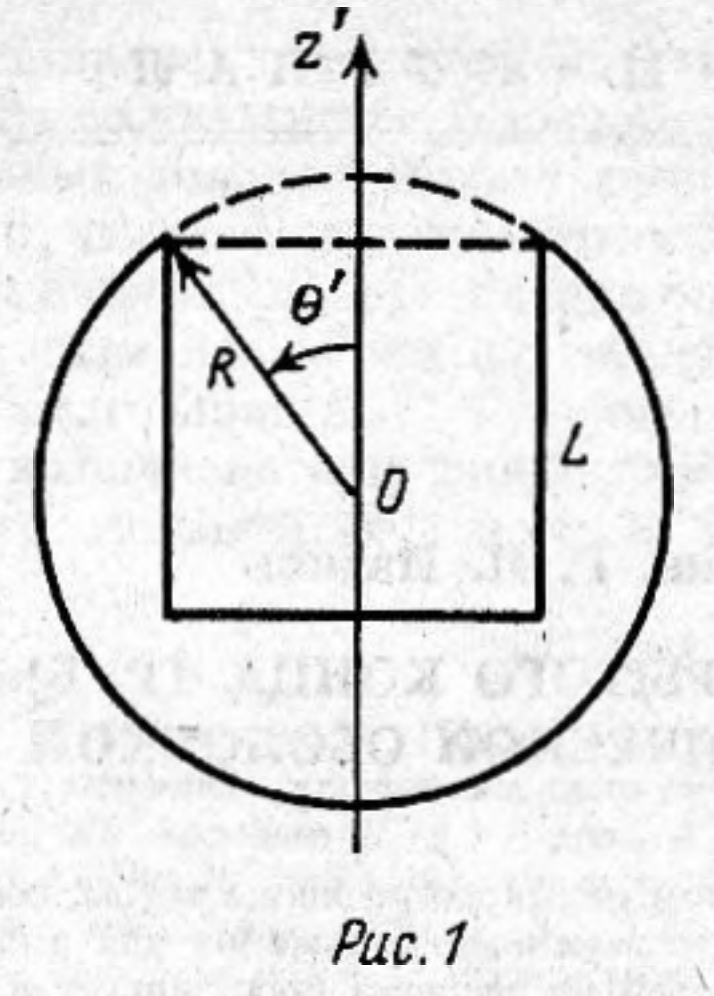
Что касается колебаний трубы, то они в диапазоне частот много ниже кольцевой могут быть описаны двумя независимыми уравнениями [1]:

$$D_\tau\,((\partial^4 w_\tau/\partial z^4) - k_{\text{и}\tau}^4 w_\tau) + (B_\tau/R_0^2)\, w_\tau = p_2\,(R_0, z), \tag{3}$$

$$(\partial^2 u_\tau/\partial z^2) + k_{\text{п}\tau}^2 u_\tau = 0. \tag{4}$$

В этих четырех уравнениях обозначено:

$$\alpha = (\omega_1^2/e) - (2/e)\,(1 + \sigma) - 2\,(1 - \sigma);\;\; \beta = ((1 + \sigma)/e) + 1 + \omega_1^2 - \sigma;$$



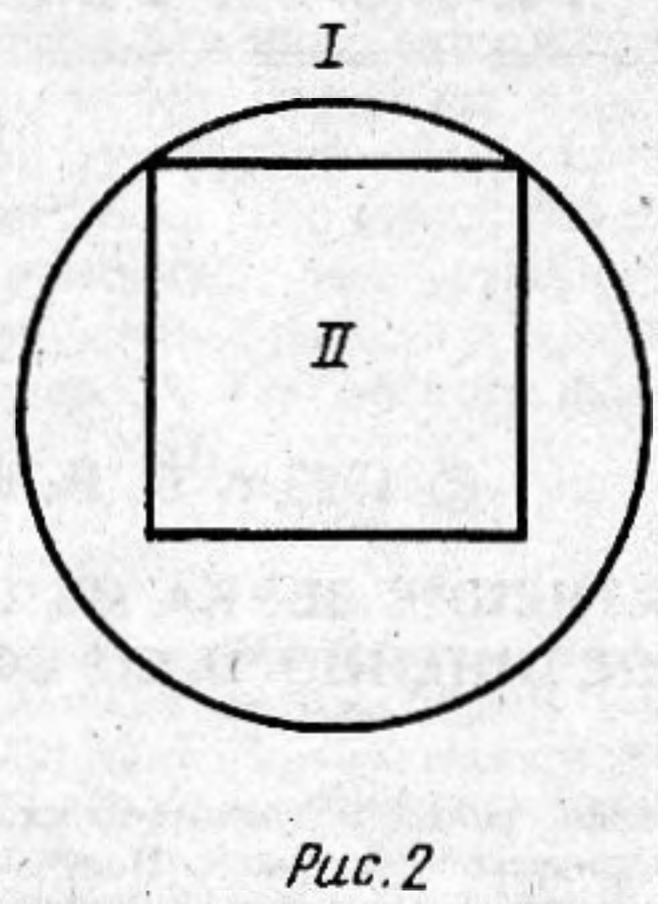


Рис. 1. Используемая система координат
Рис. 2. Условное разбиение пространства на области

$$\gamma = e\,(1-\sigma) + 1 + \sigma - 2e;\quad \delta = \omega_1^2 - 2\,(1+\sigma) - 2e\,(1-\sigma);\quad e = h^2/(12R^2);$$

$$v = 1/\sin\theta\,\partial/\partial\theta\,(u\sin\theta); \tag{5}$$

$$\Delta = 1/\sin\theta\,\partial/\partial\theta\,(\sin\theta\,\partial/\partial\theta);$$

$u(\theta)$ и $w(\theta)$ — угловая и радиальная компоненты смещения оболочки, $\omega_1 = \dfrac{\omega R}{c_s}$, $c_s = \sqrt{\dfrac{E}{\rho\,(1-\sigma^2)}}$, $a^2 = \dfrac{R^2}{\rho L c_s^2} = \dfrac{R^2\,(1-\sigma^2)}{Eh}$, $(E,\ E_т)$ — модули Юнга материалов оболочки и трубы, $(\sigma,\ \sigma_т)$ — коэффициенты Пуассона этих материалов, $(\rho,\ \rho_т)$ — их плотности, $(h,\ h_т)$ — толщины оболочки трубы, $D_т = \dfrac{E_т h_т^3}{12\,(1-\sigma_т^2)}$; $B_т = \dfrac{E_т h_т}{1-\sigma_т^2}$; $k_{ит}^4 = (w^2\rho_т h_т)/D_т$; $c_{пт}^2 = E_т/(\rho_т\,(1-\sigma_т^2))$; $\omega = 2\pi f$, f — частота падающей волны, p_1 и p_2 — давления снаружи оболочки и внутри трубы.

К написанным уравнениям надо добавить граничные условия, требующие равенства между собой смещений и углов поворота срезов оболочки и трубы:

$$u\,(\theta')\cos\theta' + w\,(\theta')\sin\theta' = w_т\,(H), \tag{6}$$

$$u\,(\theta')\sin\theta' + w\,(\theta')\cos\theta' = u_т\,(H), \tag{7}$$

$$(\partial w_т/\partial z)_{Z=H} = 1/R\,(\partial w/\partial\theta)_{\theta=\theta'},\quad \theta' = \arcsin\left(\frac{R_0}{R}\right). \tag{8}$$

Для акустических полей надо решить уравнения Гельмгольца:

$$\Delta p_1 + (\partial^2 p_1/\partial\xi^2) + (2/\xi)\,(\partial p_1/\partial\xi_1) + k_0^2 p_1 = 0$$

— для области снаружи оболочки и

$$(\partial^2 p_2/\partial r^2) + 1/r\,(\partial p_2/\partial r) + (\partial^2 p_2/\partial z^2) + k_1^2 p_2 = 0$$

— для области внутри трубы. Эти два уравнения должны решаться при граничных условиях, требующих непрерывности давления и нормальной составляющей скорости на границе раздела сред и выполнения условия прилипания на внешней поверхности оболочки и на внутренней поверхности трубы:

$$p_1 (R, \theta) = p_0 \exp (ik_1 H) + p_{\text{отр}} (r, H), \tag{9.1}$$

$$(\partial p_1/\partial \xi)_{\xi=R} = (\rho_0/\rho_1) (ik_1 p_0 \exp (ik_1 H) + (\partial p_{\text{отр}}/\partial z)_{z=H} \tag{9.2}$$

$$\left.\begin{array}{l}(\partial p_1/\partial \xi)_{\xi=R} = \rho_0 \omega^2 w (\theta) \\ (\partial p_2/\partial r)_{r=R_0} = \rho_1 \omega^2 w_{\text{т}} (z)\end{array}\right\}. \tag{10}$$

Решение задачи будем строить методом граничных интегральных уравнений. Для этого все пространство, заполненное акустической средой, разобьем на области так, как показано на рис. 2. Возьмем в качестве функций Грина функцию Грина внешней задачи для абсолютно жесткой сферы

$$g (\xi, \theta, \xi_0, \theta_0) = (ik_0/2) \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2} \right) p_l (\cos \theta) p_l (\cos \theta_0) \times$$

$$\times [h_l^{(1)} (k_0\xi) h_l^{(1)} (k_0\xi_0) s (l) - h_l^{(1)} (k_0\xi_>) (j_l (k_0\xi_<)]$$

и функцию Грина внутренней задачи для полубесконечного абсолютно жесткого цилиндра

$$g_2 (r, z, r_0, z_0) = -(2i/R_0^2) \sum_{n=0}^{\infty} J_0 \left(j_n \frac{r}{R_0} \right) J_0 \left(j_n \frac{r_0}{R_0} \right) \Big/ (J_0^2 (j_n) (k_1^2 - j_n^2/R_0^2)^{\frac{1}{2}}) \times$$

$$\times \exp (-iz_< (k_1^2 - j_n^2/R_0^2)^{\frac{1}{2}}) \cos (z_> (k_1^2 - j_n^2/R_0^2)^{\frac{1}{2}})$$

и запишем интегралы Гельмгольца для выделенных областей с учетом условий прилипания (10):

$$p_1 (\xi_0, \theta_0) = \rho_0 \omega^2 R^2 \int_{\theta'}^{\pi} g (R, \theta, \xi_0, \theta_0) w (\theta) \sin \theta \, d\theta +$$

$$+ (\rho_0/\rho_1) R^2 \int_0^{\theta'} (\partial p_1/\partial \xi)_{\xi=R} g (R, \theta, \xi_0, \theta_0) \sin \theta \, d\theta, \tag{11}$$

$$p_2 (r_0, z_0) = - \int_0^{R_0} (\partial p_2/\partial z)_{Z=H} g_2 (r, H, r_0, z_0) \, r \, dr -$$

$$- \rho_1 \omega^2 R_0 \int_{H-L}^{H} w_{\text{т}} (z) g_2 (R_0, z, r_0, z_0) \, dz. \tag{12}$$

В приведенных формулах $p_l(x)$ — полиномы Лежандра, $h_l^{(1)}(x)$ и $j_l(x)$ — сферические функции Ханкеля и Бесселя,

$$s (l) = (\partial/\partial z (j_l (z)))_{z=k_0R}/(\partial/\partial z (h_l^{(1)} (z))_{z=k_0R}),$$

$J_0(x)$ — обычные функции Бесселя, j_n — неотрицательные корни функции $J_1(x)$, расположенные в порядке возрастания, $(\xi_>, \xi_<)$ и $(z_>, z_<)$ — соответственно большая и меньшая из величин (ξ, ξ_0) и (z, z_0).

Рассмотрим теперь процессы, происходящие в конструкции. Запишем соотношения, являющиеся следствием второй теоремы Грина [2]:

$$\iint_{S_т} \{w_т (\partial^4 G_r/\partial z^4) - G_r (\partial^4 w_т/\partial z^4)\}\, dS_т = \oint_L \{w_т \partial/\partial n\, (\partial^2 G_r/\partial z^2) -$$

$$- (\partial w_т/\partial n)(\partial^2 G_r/\partial z^2) + (\partial^2 w_т/\partial z^2)(\partial G_r/\partial n) - G_r \partial/\partial n/(\partial^2 w_т/\partial z^2)\}\, dl, \tag{13}$$

$$\iint_{S_т} (u_т (\partial^2 G_z/\partial z^2) - G_z (\partial^2 u_т/\partial z^2))\, dS_т = \oint_L (u_т (\partial G_z/\partial n) - G_z (\partial u_т/\partial n))\, dl, \tag{14}$$

$$\iint_S (w\Delta\Delta G_\xi - G_\xi \Delta\Delta w)\, dS = R^2 \oint_L (w (\partial \Delta G_\xi/\partial n) -$$

$$- (\partial w/\partial n)\Delta G_\xi + \Delta w (\partial G_\xi/\partial n) - (\partial \Delta w/\partial n) G_\xi)\, dl, \tag{15}$$

$$\iint_S (F\Delta G_\theta - G_\theta \Delta F)\, dS = R^2 \oint_L (F (\partial G_\theta/\partial n) - G_\theta (\partial F/\partial n))\, dl, \tag{16}$$

$$F = (e - 1)\, v(\theta) - \delta w(\theta).$$

Здесь S и $S_т$ — поверхности оболочки и трубы, L — контур, проходящий по краю среза, n — нормали к этим поверхностям. Функции Грина G_r, G_z, G_ξ, G_θ являются решениями следующих задач:

$$\left.\begin{array}{l} D_т ((\partial^4 G_r/\partial z^4) - k_{ит}^4 G_r) + (B/R_0^2)\, G_r = \delta (z - z_0) \\ G_r (H, z_0) = 0, \quad (\partial G_r/\partial z)_{Z=H} = 0 \end{array}\right\}, \tag{17}$$

$$\left.\begin{array}{l} (\partial^2 G_z/\partial z^2) - k_{пт}^2 G_z = \delta (z - z_0) \\ G_z (H, z_0) = 0 \end{array}\right\}, \tag{18}$$

$$\left.\begin{array}{l} (e - 1)\, \Delta\Delta G_\xi - 2 (1 - e)\, \Delta G_\xi + \alpha G_\xi = (1/R^2 \sin\theta))\, \delta (\theta - \theta_0) \\ G_\xi (\theta', \theta_0) = 0, \quad (\partial G_\xi/\partial\theta)_{\theta=\theta'} = 0 \end{array}\right\}, \tag{19}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta G_\theta - (\gamma/\delta)\, G_\theta = (1/(R^2 \sin\theta))\, \delta (\theta - \theta_0) \\ G_\theta (\theta', \theta_0) = 0 \end{array}\right\}. \tag{20}$$

Явный вид функций нетрудно найти с помощью преобразования Фурье — Бесселя

$$G_r (z, z_0) = i/(4D_т)\, [\exp (i\varkappa_1 |z - z_0|)/\varkappa_1^3 + \exp (i\varkappa_2 |z - z_0|)/\varkappa_2^3] +$$

$$+ c_1 (z_0) \exp (-i\varkappa_1 z) + c_2 (z_0) \exp (-i\varkappa_2 z), \tag{21}$$

$$G_z (z, z_0) = -i/(2k_{пт})\, (\exp (ik_{пт} |z - z_0|) + \exp (ik_{пт} (2H - z_0 - z))), \tag{22}$$

$$G_\xi (\theta, \theta_0) = \frac{1}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{p_n (\cos\theta)\, p_n (\cos\theta_0)}{\Delta_1 (n)} -$$

$$- \frac{1}{R^2} p_{\nu_1} (\cos\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{\Delta_1 (n)} p_n (\cos\theta_0)\, s_1 (n) -$$

$$- \frac{1}{R^2} p_{\nu_2} (\cos\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{\Delta_1 (n)} p_n (\cos\theta_0)\, s_2 (n), \tag{23}$$

$$G_\theta(\theta,\theta_0) = -\frac{1}{R^2}\int_{n=0}^{\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{\Delta_2(n)}p_n(\cos\theta)\,p_n(\cos\theta_0) +$$

$$+\frac{1}{R^2}\frac{p_{\mu_1}(\cos\theta)}{p_{\mu_1}(\cos\theta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{\Delta_2(n)}p_n(\cos\theta_0)\,p_n(\cos\theta'). \tag{24}$$

$\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — корни уравнения

$$\varkappa^4 - k_и^4 + B_т/(R_0^2 D_т) = 0,$$

удовлетворяющие условию $\operatorname{Im}\varkappa_i \geq 0$,

$$\Delta_1(n) = (e-1)\,n^2(n+1)^2 + 2(1-e)\,n(n+1) + \alpha,$$

$$s_1(n) = -\frac{p_n(\cos\theta')\,c_{\nu_2}^{\frac{3}{2}}(\cos\theta') - c_{n_1}^{\frac{3}{2}}(\cos\theta')\,p_{\nu_2}(\cos\theta')}{p_{\nu_1}(\cos\theta')\,c_{\nu_2}^{\frac{3}{2}}(\cos\theta') - p_{\nu_2}(\cos\theta')\,c_{\nu_1}^{\frac{3}{2}}(\cos\theta')},$$

$$s_2(n) = -\frac{p_{\nu_1}(\cos\theta')\,c_{n}^{\frac{3}{2}}(\cos\theta') - c_{\nu_1}^{\frac{3}{2}}(\cos\theta')\,p_{n}(\cos\theta')}{p_{\nu_1}(\cos\theta')\,c_{\nu_2}^{\frac{3}{2}}(\cos\theta') - p_{\nu_2}(\cos\theta')\,c_{\nu_1}^{\frac{3}{2}}(\cos\theta')},$$

$$\Delta_2(n) = n(n+1) + \frac{\gamma}{\delta},\quad \mu_1 = -1 + \sqrt{1-\frac{4\gamma}{\delta}},$$

$c_\nu^\lambda(x)$ — функции Гегенбауэра [3], $\Delta_3 = \exp(-iH(\varkappa_1+\varkappa_2))(\varkappa_1-\varkappa_2)$, ν_1 и ν_2 — два корня уравнения $\Delta_1(\nu) = 0$, удовлетворяющие условию $\operatorname{Im}\nu_i \geq 0$

$$c_1 = \frac{i}{D_т}\frac{\exp(-i\varkappa_2 H)}{\Delta_3}\left\{\varkappa_2\left[\frac{\exp(i\varkappa_1(H-z_0))}{4\varkappa_1^3} + \frac{\exp(i\varkappa_2(H-z_0))}{4\varkappa_2^3}\right] +\right.$$

$$\left.+\frac{\exp(i\varkappa_1(H-z_0))}{4\varkappa_1^2} + \frac{\exp(i\varkappa_2(H-z_0))}{4\varkappa_2^3}\right\},$$

$$c_2 = -\frac{i}{D_т}\frac{\exp(i\varkappa_1 H)}{\Delta_3}\left\{\varkappa_1\left[\frac{\exp(i\varkappa_1(H-z_0))}{4\varkappa_1^3} + \frac{\exp(i\varkappa_2(H-z_0))}{4\varkappa_1^2}\right] +\right.$$

$$\left.+\frac{\exp(i\varkappa_1(H-z_0))}{4\varkappa_1^2} + \frac{\exp(i\varkappa_2(H-z_0))}{4\varkappa_2^2}\right\}.$$

Используя уравнения задач (17)—(20), а также уравнения (1)—(4) и формулы (11)—(12), соотношения (13)—(16) можно преобразовать к виду

$$w_т(z_0) = D_т w_т(H)\,(\partial^3 G_r/\partial z^3)_{z=H} - D w_т'(H)\,(\partial^2 G_r/\partial z^2)_{z=H} +$$

$$+\int_0^{R_0} s_3(r,z_0)(\partial p_2/\partial z)_{z=H}\,r\,dr + \rho_1\omega^2\int_{H-L}^{H} s_4(z,z_0)\,w_т(z)\,dz, \tag{25}$$

$$u_т(z_0) = u_т(H)(\partial G_z/\partial z)_{z=H}, \tag{26}$$

$$w(\theta_0) = a^2 R^4 \rho_0\omega^2/e\int_{\theta'}^{\pi} F_1(\theta,\theta_0)\,w(\theta)\sin\theta\,d\theta +$$

$$+ a^2R^2\rho_0/(e\rho_1) \int_0^{R_0} F_1(\theta_r, \theta_0)(\partial p_2/\partial z)_{z=H}\, r\, dr +$$

$$+ R^2\beta \int_{\theta'}^{\pi} G_\xi(\theta, \theta_0)\, v(\theta) \sin\theta\, d\theta - (e-1)\sin\theta' w(\theta')(\partial\Delta G_\xi/\partial\theta)_{\theta=\theta'} R^2 +$$

$$+ (e-1)\sin\theta'(\Delta G_\xi(\theta, \theta_0))_{\theta=\theta'} R^2 w'(\theta'), \tag{27}$$

$$F(\theta_0) = \rho_0\omega^2a^2R^4 \int_{\theta'}^{\pi} F_2(\theta, \theta_0)\, w(\theta) \sin\theta\, d\theta +$$

$$+ a^2R^2\rho_0/\rho_1 \int_0^{\theta'} (\partial p_2/\partial z)_{z=H} F_2(\theta_r, \theta_0)\, r\, dr +$$

$$+ R^2(2 + \omega_1^2 - \gamma/\delta\,(e-1)) \int_{\theta'}^{\pi} G_\theta(\theta, \theta_0)\, v(\theta) \sin\theta\, d\theta +$$

$$+ \sin\theta'(e-1)\, v(\theta')(\partial G_\theta/\partial\theta)_{\theta=\theta'} R^2 - \sin\theta'\delta w(\theta')(\partial G_\theta/\partial\theta)_{\theta=\theta'} R^2. \tag{28}$$

Здесь обозначено:

$$s_3(r, z_0) = -\int_{H-L}^{H} G_r(z, z_0)\, g_2(r, H, R_0, z)\, dz,$$

$$s_4(z, z_0) = -R_0 \int_{H-L}^{H} G_r(z_1, z_0)\, g_2(R_0, z, R_0, z_1)\, dz_1,$$

$$F_1(\theta, \theta_0) = \int_{\theta'}^{\pi} G_\xi(\theta_1, \theta_0)\, g(R, \theta, R, \theta_1) \sin\theta_1\, d\theta_1,$$

$$F_2(\theta, \theta_0) = \int_{\theta'}^{\pi} G_\theta(\theta_1, \theta_0)\, g(R, \theta, R, \theta_1) \sin\theta_1\, d\theta_1, \quad \theta_r = \operatorname{arctg}(r/H).$$

Подставив сюда выражения (21)—(24), можно вычислить интегралы с помощью формулы [3]

$$\int p_n(z)\, p_m(z)\, dz = ((z^2-1)^{\frac{1}{2}}(p_n(z)\, p_m^1(z) - p_n^1(z)\, p_m(z)))/((n-m)(n+m+1)),$$

и убедиться, что функции s_4, F_1, G_θ непрерывны в основных квадратах [4]. Следовательно, соотношения (25), (27), (28) представляют собой систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно величин w_τ, w и v. В [4] показано также, что решение уравнения вида

$$u(x_0) = F(x_0) + \int_a^b K(x, x_0)\, u(x)\, dx$$

может быть представлено следующим образом:

$$u(x_0) = F(x_0) + 1/D_1 \int_a^b R_1(x, x_0)\, F(x)\, dx, \tag{29}$$

где

$$D_1 = 1 - \int_a^b K(x, x)\, dx + \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) \end{vmatrix} dx_1\, dx_2 - \ldots, \tag{30}$$

$$R_1(x, x_0) = K(x, x_0) - \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, x_0 & K(x_1, x_0) \\ K(x, x_1 & K(x_1, x_1) \end{vmatrix} dx_1 + \ldots . \quad (31)$$

Используя это обстоятельство, можно построить решение системы (25)—(28). Для этого сначала обратим интегральный оператор, стоящий в уравнении (25). В этом случае в формулах (29)—(31) надо положить

$$a = H - L, \ \ b = H, \ \ K(x, x_0) = \rho_1 \omega^2 s_4(z, z_0),$$

$$F(x) = D_\tau w_\tau(H) (d^3 G_r / \partial z^3)_{z=H} - D_\tau w_\tau'(H) (\partial^2 G_r / \partial z^2)_{z=H} +$$

$$+ \int_0^{R_0} s_3(r, z_0) (\partial p_2 / \partial z)_{z=H} r \, dr.$$

Это дает

$$w_\tau(z_0) = D_\tau s_5(z_0) w_\tau(H) - D_\tau s_6(z_0) w_\tau'(H) + \int_0^{R_0} s_7(r, z_0) (\partial p_2 / \partial z)_{z=H} r \, dr, \quad (32)$$

где

$$s_5(z_0) = (\partial^3 G_r / \partial z^3)_{z=H} + 1/D_1 \int_{H-L}^{H} R_1(z, z_0) (\partial^3 G_r / \partial z^3)_{z=H} dz,$$

$$s_6(z_0) = (\partial^2 G_r / \partial z^2)_{z=H} + 1/D_1 \int_{H-L}^{H} R_1(z, z_0) (\partial^2 G_r / \partial z^2)_{z=H} dz,$$

$$s_7(r, z_0) = s_3(r, z_0) + 1/D_1 \int_{H-L}^{H} R_1(z, z_0) s_3(r, z) dz.$$

Затем обратим интегральный оператор, стоящий в уравнении (27). Для этого в формулах (29)—(31) следует положить

$$a = \theta', \ \ b = \pi, \ \ K(x, x_0) \to K(\theta, \theta_0) = a^2 R^4 \rho_0 \omega^2 / e \cdot \sin \theta F_1(\theta, \theta_0),$$

$$F(\theta_0) = a^2 R^2 \rho_0 / (e \rho_1) \int_0^{R_0} F_1(\theta_r, \theta_0) (\partial p_2 / \partial z)_{z=H} r \, dr +$$

$$+ R^2 \beta \int_{\theta'}^{\pi} G_\xi(\theta, \theta_0) v(\theta) \sin \theta \, d\theta - (e - 1) \sin \theta w(\theta') R^2 (\partial \Delta G_\xi / \partial \theta)_{\theta=\theta'} +$$

$$+ (e - 1) \sin \theta' \Delta G_\xi (\theta, \theta_0)_{\theta=\theta'} R^2 w'(\theta').$$

Тогда решение уравнения (27) запишется в виде

$$w(\theta_0) = a^2 R^2 \rho_0 / (e \rho_1) \int_0^{R_0} F_3(\theta_r, \theta_0) (\partial p_2 / \partial z)_{z=H} r \, dr +$$

$$+ R^2 w(\theta') F_4(\theta_0) + R^2 w'(\theta') F_5(\theta_0) + R^2 \beta \int_{\theta'}^{\pi} F_6(\theta, \theta_0) v(\theta) \sin \theta \, d\theta, \quad (33)$$

где

$$F_3(\theta_r, \theta_0) = F_1(\theta_r, \theta_0) + 1/D_1 \int_{\theta'}^{\pi} R_1(\theta, \theta_0) F_1(\theta_r, \theta) d\theta,$$

$$F_4(\theta_0) = (\partial \Delta G_\xi/\partial\theta)_{\theta=\theta'} + 1/D_1 \int_{\theta'}^{\pi} R_1(\theta, \theta_0)\,(\partial \Delta G_\xi/\partial\theta)_{\theta=\theta'}\, d\theta,$$

$$F_5(\theta_0) = (\Delta G_\xi)_{\theta=\theta'} + 1/D_1 \int_{\theta'}^{\pi} R_1(\theta, \theta_0)\,(\Delta G_\xi)_{\theta=\theta'}\, d\theta,$$

$$F_6(\theta, \theta_0) = G_\xi(\theta, \theta_0) + 1/D_1 \int_{\theta'}^{\pi} R_1(\theta_1, \theta_0)\, G_\xi(\theta, \theta_1)\, d\theta_1.$$

Теперь подставим (32) в (28), исключив $w(\theta)$:

$$v(\theta_0) = \int_{\theta'}^{\pi} F_7(\theta, \theta_0)\, v(\theta) \sin\theta\, d\theta +$$

$$+ a^2R^2\rho_0/\rho_1 \int_0^{R_0} (dp_2/\partial z)_{z=H} F_8(\theta_r, \theta_0)\, r\, dr +$$

$$+ F_9(\theta_0)\, v(\theta') + F_{10}(\theta_0)\, w(\theta') + F_{11}(\theta_0)\, w'(\theta'). \qquad (34)$$

Здесь обозначено:

$$F_7(\theta, \theta_0) = R^2\,(2 + \omega_1^2 - \gamma/\delta\,(e-1))\, G_0(\theta, \theta_0) + \delta R^2 \beta F_6(\theta, \theta_0) +$$

$$+ \beta\rho_0\omega^2 a^2 R^6 \int_{\theta'}^{\pi} F_6(\theta, \theta_1)\, F_2(\theta_1, \theta_0) \sin\theta_1\, d\theta_1,$$

$$F_8(\theta_r, \theta_0) = a^2R^2\rho_0/\rho_1 F_2(\theta_r, \theta_0) + \delta a^2R^2\rho_0/(e\rho_1)\, F_1(\theta_r, \theta_0) +$$

$$+ \rho_0\omega^2 a^4 R^6 \rho_0/(e\rho_1) \int_{\theta'}^{\pi} F_3(\theta_r, \theta_1)\, F_2(\theta_1, \theta_0) \sin\theta_1\, d\theta_1,$$

$$F_9(\theta_0) = R^2 \sin\theta'\,(e-1)\,(\partial G_\theta/\partial\theta)_{\theta=\theta'},$$

$$F_{10}(\theta_0) = -\sin\theta' R^2 \delta\,(\partial G_\theta/\partial\theta)_{\theta=\theta'} + \delta R^2 F_4(\theta_0),$$

$$F_{11} = \delta\,(e-1) \sin\theta' R^2\,(\Delta G_\xi(\theta, \theta_0))_{\theta=\theta'}.$$

Для того чтобы обратить оператор, стоящий в уравнении (34), надо в (29)—(31) положить

$$a = \theta', \quad b = \pi, \quad K(x, x_0) \to K(\theta, \theta_0) = F_7(\theta, \theta_0) \sin\theta,$$

$$F(\theta_0) = a^2R^2\rho_0/\rho_1 \int_0^{R_0} (\partial p_2/\partial z)_{z=H} F_8(\theta_r, \theta_0)\, r\, dr +$$

$$+ F_9(\theta_0)\, v(\theta') + F_{10}(\theta_0)\, w(\theta') + F_{11}(\theta_0)\, w'(\theta').$$

Тогда получим

$$v(\theta_0) = \int_0^{R_0} (\partial p_2/\partial z)_{z=H} F_{12}(\theta_r, \theta_0)\, r\, dr + F_{13}(\theta_0)\, v(\theta') +$$

$$+ F_{14}(\theta_0)\, w(\theta') + F_{15}(\theta_0)\, w'(\theta'), \qquad (35)$$

где

$$F_{12}(\theta_r, \theta_0) \left[F_8(\theta_r, \theta_0) + 1/D_1 \int_{\theta'}^{\pi} R_1(\theta, \theta_0)\, F_8(\theta_r, \theta)\, d\theta \right] a^2R^2\rho_0/\rho_1,$$

$$F_{13}(\theta_0) = F_9(\theta_0) + 1/D_1 \int_{\theta'}^{\pi} R_1(\theta, \theta_0) F_9(\theta)\, d\theta,$$

$$F_{14}(\theta_0) = F_{10}(\theta_0) + 1/D_1 \int_{\theta'}^{\pi} R_1(\theta, \theta_0) F_{10}(\theta)\, d\theta,$$

$$F_{15}(\theta_0) = F_{11}(\theta_0) + 1/D_1 \int_{\theta'}^{\pi} R_1(\theta, \theta_0) F_{11}(\theta)\, d\theta.$$

Положим далее в (35) $\theta = \theta'$ и получим уравнение относительно $v(\theta')$, решив которое, исключим эту величину из (35). Учтя также в левой части явный вид величины $v(\theta)$ (5), придем к соотношению вида

$$\partial u/\partial\theta_0 + \operatorname{ctg}\theta_0 u = \int_0^{R_0} (\partial p_2(r, z)/\partial z)_{z=H} F_{16}(\theta_r, \theta_0)\, r\, dr +$$

$$+ w(\theta') F_{17}(\theta_0) + w'(\theta') F_{18}(\theta_0), \tag{36}$$

где

$$F_{16}(\theta_r, \theta_0) = F_{12}(\theta_r, \theta_0) + F_{13}(\theta_0) F_{12}(\theta_r, \theta')(1 - F_{13}(\theta'))^{-1},$$

$$F_{17}(\theta_0) = F_{14}(\theta_0) + F_{13}(\theta_0) F_{14}(\theta')(1 - F_{13}(\theta'))^{-1},$$

$$F_{18}(\theta_0) = F_{15}(\theta_0) + F_{13}(\theta_0) F_{15}(\theta')(1 - F_{13}(\theta'))^{-1}.$$

Это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка относительно величины $u(\theta_0)$, решив которое, найдем

$$u(\theta_0) = \int_0^{R_0} (\partial p_2(r, z)/\partial z)_{z=H} F_{19}(\theta_r, \theta_0)\, r\, dr + w(\theta') F_{20}(\theta_0) + w'(\theta') F_{21}(\theta_0). \tag{37}$$

Здесь обозначено:

$$F_{19}(\theta_r, \theta_0) = 1/\sin\theta_0 \int_{\pi}^{\theta_0} F_{16}(\theta_r, \theta_1) \sin\theta_1\, d\theta_1.$$

$$F_{20}(\theta_0) = 1/\sin\theta_0 \int_{\pi}^{\theta_0} F_{17}(\theta_1) \sin\theta_1\, d\theta_1,$$

$$F_{21}(\theta_0) = 1/\sin\theta_0 \int_{\pi}^{\theta_0} F_{18}(\theta_1) \sin\theta_1\, d\theta_1.$$

Теперь с помощью соотношений (5) и (36) исключим $v(\theta)$ из (33):

$$w(\theta_0) = \int_0^{R_0} F_{22}(\theta_r, \theta_0)(\partial p_2(r, z)/\partial z)_{z=H} r\, dr + w(\theta') F_{23}(\theta_0) + w'(\theta') F_{24}(\theta_0). \tag{38}$$

Вновь введенные здесь функции имеют вид

$$F_{22}(\theta_r, \theta_0) = F_3(\theta_r, \theta_0) + R^2\beta \int_{\theta'}^{\pi} F_6(\theta, \theta_0) F_{16}(\theta_r, \theta) \sin\theta\, d\theta,$$

$$F_{23}(\theta_0) = R^2 F_4(\theta_0) + R^2\beta \int_{\theta'}^{\pi} F_6(\theta, \theta_0) F_{17}(\theta_0) \sin\theta\, d\theta,$$

$$F_{24}(\theta_0) = R^2 F_5(\theta_0) + R^2\beta \int_{\theta'}^{\pi} F_6(\theta, \theta_0) F_{18}(\theta) \sin\theta\, d\theta.$$

Положив теперь в (38) $\theta = \theta'$, получим уравнение для определения $w(\theta')$. Найдя из него эту величину, исключим ее из (37) и из (38):

$$u(\theta_0) = \int_0^{R_0} (\partial p_2(r, z)/\partial z)_{z=H} F_{25}(\theta_r, \theta_0)\, r\, dr + w'(\theta') F_{26}(\theta_0), \tag{39}$$

$$w(\theta_0) = \int_0^{R_0} F_{27}(\theta_r, \theta_0)/(\partial p_2(r, z)/\partial z)_{z=H} r\, dr + w'(\theta') F_{28}(\theta_0). \tag{40}$$

В этих формулах обозначено:

$$F_{25}(\theta_r, \theta_0) = F_{19}(\theta_r, \theta_0) + F_{20}(\theta_0) F_{22}(\theta_r, \theta')(1 - F_{23}(\theta'))^{-1},$$

$$F_{26}(\theta_0) = F_{21}(\theta_0) + F_{20}(\theta_0) F_{24}(\theta')(1 - F_{23}(\theta'))^{-1},$$

$$F_{27}(\theta_r, \theta_0) = F_{22}(\theta_r, \theta_0) + F_{23}(\theta_0) F_{22}(\theta_r, \theta')(1 - F_{23}(\theta'))^{-1},$$

$$F_{28}(\theta_0) = F_{24}(\theta_0) + F_{23}(\theta_0) F_{24}(\theta')(1 - F_{23}(\theta'))^{-1}.$$

Выполним далее подстановку ((39), (40)) $\to$ (6) $\to$ (32):

$$w_\tau(z_0) = s_8(z_0) w_\tau'(H) + s_9(z_0) w'(\theta') + \int_0^{R_0} s_{10}(r, z_0)(\partial p_2/\partial z)_{z=H} r\, dr. \tag{41}$$

Здесь

$$s_8(z_0) = -D_\tau s_6(z_0),$$

$$s_9(z_0) = D_\tau s_5(z_0)(F_{26}(\theta') \cos\theta' + F_{28}(\theta') \sin\theta'),$$

$$s_{10}(r, z_0) = s_7(r, z_0) + D_\tau s_5(z_0)(F_{25}(\theta_r, \theta') \cos\theta' + F_{27}(\theta_r, \theta') \sin\theta').$$

Продифференцировав (41) по z_0 и положив в нем $z_0 = H$, получим (с учетом (8)) уравнение для определения $w'(\theta')$:

$$1/R\,(\partial w/\partial\theta)_{\theta=\theta'} = w_\tau'(H)(s_8'(H) + R s_9'(H)) + \int_0^{R_0} s_{10}'(r, H)(\partial p_2/\partial z)_{z=H} r\, dr.$$

Разрешив уравнение относительно $w'(\theta')$, подставим ее в соотношения (39)—(41):

$$u(\theta_0) = \int_0^{R_0} (\partial p_2(r, z)/\partial z)_{z=H} F_{29}(\theta_r, \theta_0)\, r\, dr, \tag{42}$$

$$w(\theta_0) = \int_0^{R_0} F_{30}(\theta_r, \theta_0)(\partial p_2(r, z)/\partial z)_{z=H} r\, dr, \tag{43}$$

$$w_\tau(z_0) = \int_0^{R_0} s_{11}(r, z_0)(\partial p_2/\partial z)_{z=H} r\, dr. \tag{44}$$

Введенные здесь новые функции имеют вид

$$F_{29}(\theta_r, \theta_0) = F_{25}(\theta_r, \theta_0) + F_{26}(\theta_0) s_{10}'(r, H)(1 - s_8'(H) - R s_9'(H))^{-1},$$

$$F_{30}(\theta_r, \theta_0) = F_{27}(\theta_r, \theta_0) + F_{28}(\theta_0) s_{10}'(r, H)(1 - s_8'(H) - R s_9'(H))^{-1},$$

$$s_{11}(r, z_0) = s_{10}(r, z_0) + (s_8(z_0) + Rs_9(z_0))\, s_{10}'(r, H)\,(1 - s_8'(H) - Rs_9'(H))^{-1}.$$

Далее после подстановки (43) → (11), (44) → (12), ((42), (44)) → (7) → (26) с учетом второго из условий (10) имеем

$$p_1(\xi_0, \theta_0) = \int_0^{\theta'} (\partial p_1/\partial \xi)_{\xi=R} F_{31}(\theta, \xi_0, \theta_0) \sin\theta\, d\theta, \tag{45}$$

$$p_2(r_0, z_0) = \int_0^{R_0} (\partial p_2/\partial z)_{z=H} s_{12}(r, r_0, z_0)\, r\, dr, \tag{46}$$

$$u_\tau(z_0) = (\partial G_z(z, z_0)/\partial z)_{z=H} \int_0^{R_0} (\partial p_2/\partial z)_{z=H} s_{13}(r)\, r\, dr, \tag{47}$$

где

$$F_{31}(\theta, \xi_0, \theta_0) = \rho_0 \omega^2 R^4 \int_{\theta'}^{\pi} g(R, \theta_1, \xi_0, \theta_0) F_{30}(\theta, \theta_1) \sin\theta_1\, d\theta_1 +$$

$$+ (\rho_0/\rho_1) R^2 g(R, \theta, \xi_0, \theta_0),$$

$$s_{12}(r, r_0, z_0) = -g_2(r, H, r_0, z_0) - \rho_1 \omega^2 R_0 \int_{H-L}^{H} s_{11}(r, z)\, g_2(R_0, z, r_0, z_0)\, dz,$$

$$s_{13}(r) = F_{29}(\theta_r, \theta') \sin\theta' + F_{30}(\theta_r, \theta') \cos\theta'.$$

Учтем теперь, что после внутри трубы может быть представлено в виде

$$p_2(r, z) = p_0 \exp(ik_1 z) + p_{\text{отр}}(r, z).$$

Тогда из выражений (42)—(47) следует, что

$$u(\theta_0) = ik_1 p_0 \exp(ik_1 H) \int_0^{R_0} F_{29}(\theta_r, \theta_0)\, r\, dr + \int_0^{R_0} (\partial p_{\text{отр}}(r, z)/\partial z)_{z=H} F_{29}(\theta_r, \theta_0)\, r\, dr, \tag{48}$$

$$w(\theta_0) = ik_1 p_0 \exp(ik_1 H) \int_0^{R_0} F_{30}(\theta_r, \theta_0)\, r\, dr + \int_0^{R_0} (\partial p_{\text{отр}}(r, z)/\partial z)_{z=H} F_{30}(\theta_r, \theta_0)\, r\, dr, \tag{49}$$

$$w_\tau(z_0) = ik_1 p_0 \exp(ik_1 H) \int_0^{R_0} s_{11}(r, z_0)\, r\, dr + \int_0^{R_0} (\partial p_{\text{отр}}(r, z)/\partial z)_{z=H} s_{11}(r, z_0)\, r\, dr, \tag{50}$$

$$p_1(\xi_0, \theta_0) = ik_1 p_0 \exp(ik_1 H) \int_0^{\theta'} F_{31}(\theta, \xi_0, \theta_0) \sin\theta\, d\theta +$$

$$+ \rho_0/\rho_1 \int_0^{\theta'} (\partial p_{\text{отр}}/\partial \xi)_{\xi=R} F_{31}(\theta, \xi_0, \theta_0) \sin\theta\, d\theta, \tag{51}$$

$$p_2(r_0, z_0) = ik_1 p_0 \exp(ik_1 H) \int_0^{R_0} s_{12}(r, r_0, z_0)\, r\, dr + \int_0^{R_0} (\partial p_{\text{отр}}/\partial z)_{z=H} s_{12}(r, r_0, z_0)\, r\, dr, \tag{52}$$

$$u_т(z_0) = (\partial G_z(z, z_0)/\partial z)_{z=H} \left(\int_0^{R_0} s_{13}(r)\, r\, dr ik_1 p_0 \exp(ik_1 H) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{R_0} (\partial p_{отр}/\partial z)_{z=H} s_{13}(r)\, r\, dr \right). \tag{53}$$

Таким образом, все искомые величины выразились через $(\partial p_{отр}/\partial z)_{z=H}$. Для ее нахождения используем оставшееся граничное условие (9.1). Подставляя в него выражения (51) и (52), приходим к уравнению вида

$$\int_0^{R_0} (\partial p_{отр}/\partial z)_{z=H} F_{32}(r, r_0)\, r\, dr = p_0 F_{33}(r_0), \tag{54}$$

где

$$F_{32}(r, r_0) = \rho_0/\rho_1 F_{31}(\theta_r, R, \theta_{r_0}) - s_{12}(r, r_0, H),$$

$$F_{33}(r_0) = ik_1 \exp(ik_1 H) \int_0^{R_0} s_{12}(r, r_0, H)\, r\, dr -$$

$$- ik_1 \exp(ik_1 H) \int_0^{\theta'} F_{31}(\theta, R, \theta_{r_0}) \sin\theta\, d\theta.$$

Для нахождения решения этого уравнения введем в рассмотрение функцию

$$U_2(r) = \sum_{n=1}^{N} d_n J_0(j_n r/R_0), \tag{55}$$

где j_n — неотрицательные корни функции $J_1(x)$, расположенные в порядке возрастания, а коэффициенты d_n пока неизвестны. Подставим эту функцию в левую часть уравнения (54) вместо $(\partial p_{отр}/\partial z)_{z=H}$:

$$\sum_{n=1}^{N} d_n F_{34}(j_n, r_0) = p_0 F_{33}(r_0).$$

Здесь

$$F_{34}(j_n, r_0) = \int_0^{R_0} J_0(j_n r/R_0)\, F_{32}(r, r_0)\, r\, dr.$$

Выберем теперь на отрезке $[0, R_0]$ N произвольных точек и составим систему из N уравнений:

$$\sum_{n=1}^{N} d_n F_{34}(j_n, r_0^{(i)}) = p_0 F_{33}(r_0^{(i)}), \quad i = 1, 2, \ldots N.$$

Решив эту систему, найдем коэффициенты d_n. Очевидно, что теперь после подстановки разложения (55) в (54), получается соотношение, которое верно в точках $r_0 = r_0^{(i)}$ и неверно в остальных точках отрезка $[0, R_0]$. Введем далее в рассмотрение величину

$$\Delta_1 = \max_{[0, R_0]} \left| \sum_{n=1}^{N} d_n F_{34}(j_n, r_0) - p_0 F_{33}(r_0) \right|.$$

Нетрудно понять, что условие $\Delta_1 < \varepsilon$, где ε — наперед заданная малая величина, может служить в качестве критерия точности, с которой функцию $U_2(r)$ можно считать решением уравнения (54). Решив уравнение (54), можно подставить

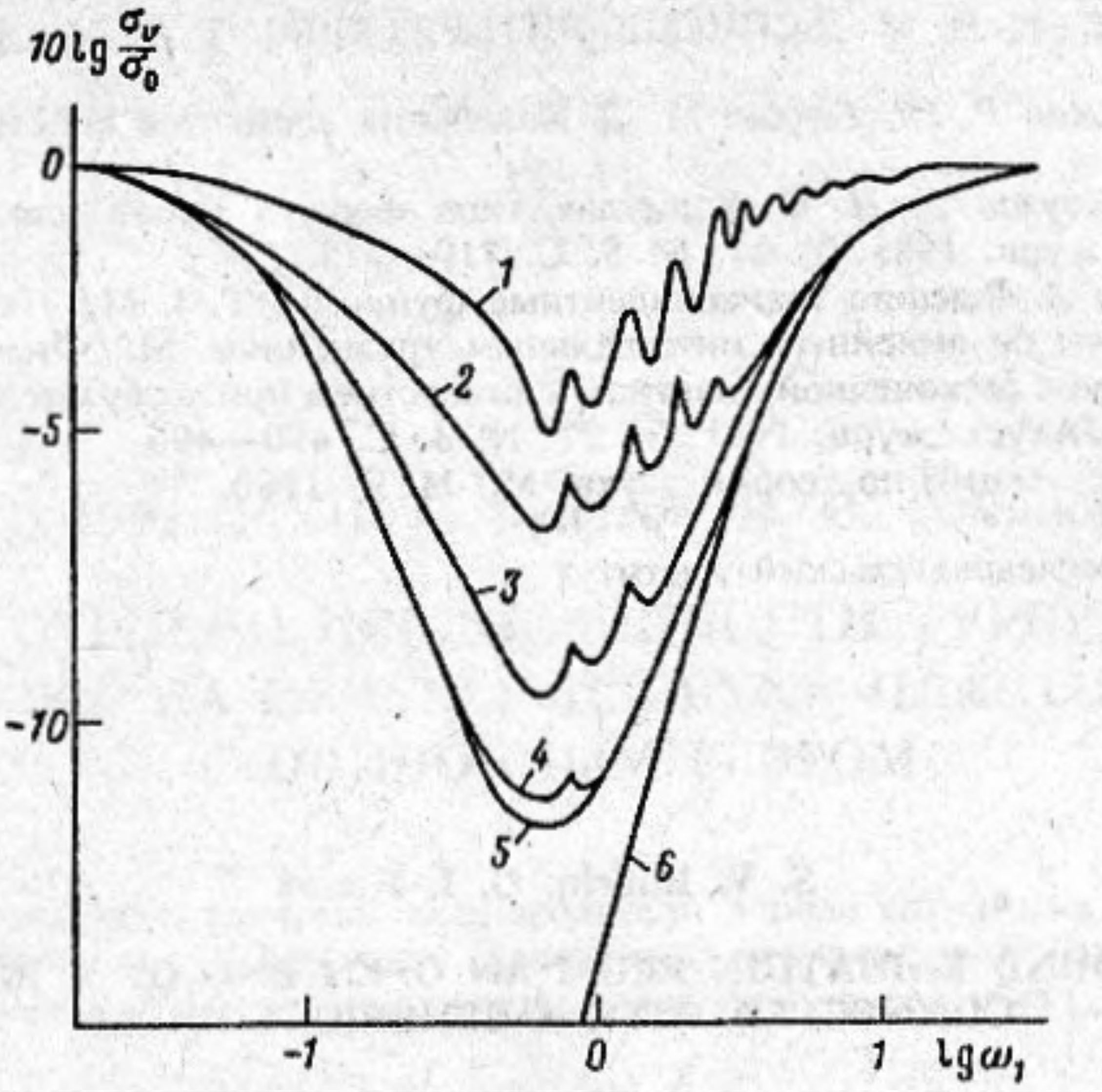


Рис. 3. Частотная зависимость эффективности излучения. σ_0 — эффективность излучения пульсирующей сферы [6], η — коэффициент потерь в материале оболочки. Кривая *1* соответствует $\eta = 0$, *2* — $\eta = 10^{-4}$, *3* — $\eta = 10^{-2}$, *4* — $\eta = 10^{-1}$, *5* — эффективность излучения, рассчитанная по формуле (*56*) при $\eta = 10^{-1}$, *6* — эффективность излучения из трубы, соединенной с бесконечной пластиной [5]

найденную величину в формулы (48)—(53) и получить таким образом полное решение поставленной задачи.

По полученным формулам был произведен расчет эффективности излучения из отверстия. В качестве примера была рассмотрена оболочка из стали толщиной 5 см и радиусом 5 м. Радиус отверстия составлял 10 см. Пространство снаружи оболочки и внутри трубы было заполнено водой. Результаты расчета приведены на рис. 3.

Немонотонный характер зависимости эффективности излучения от частоты связан с наличием в излученном во внешнюю среду поле резонансов, соответствующих квазиизгибным формам колебаний оболочки.

Далее, как видно из приведенного рисунка, при изменении коэффициента потерь в материале оболочки от 0 до 0,1 эффективность излучения изменяется в несколько раз. Это говорит о том, что величина энергии, переизлученной из оболочки во внешнюю среду при отсутствии потерь, гораздо больше величины энергии, излучаемой во внешнее пространство непосредственно из отверстия.

На рис. 3 приведена также частотная характеристика эффективности излучения плоской волны из трубы, соединенной с пластиной, рассчитанная методом, изложенным в работе [5]. Видно, что эффективность излучения для сферической оболочки близка к эффективности излучения для пластины на частотах выше частоты первого квазиизгибного резонанса при значениях коэффициента потерь, соответствующих реальным значениям для натурных объектов.

Это обстоятельство позволяет на основании теории размерностей получить приближенное выражение для эффективности излучения в виде

$$\sigma_v/\sigma_0 = [1 + 2\gamma^2/(1 + f_0^2/f^2)^2]^{-1}, \tag{56}$$

где $\gamma = \rho_0 c_0/(\rho h \omega)$, f_0 — частота первого квазиизгибного резонанса, σ_0 — эффективность излучения пульсирующей сферы [6]. Как видно из рис. 3, при реальных значениях коэффициента потерь (0,05—0,15) точная величина эффективности излучения мало отличается от приближенной оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авербух А. З., Вейцман Р. И., Генкин М. Д.* Колебания элементов конструкций в жидкости. М.: Наука, 1987.
2. *Белинский Б. П., Коузов Д. П.* О формулах типа формул Грина для изгибно колеблющейся пластины//Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 5. С. 710—718.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1973.
4. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959.
5. *Иванов Г. И.* Излучение бесконечной пластины с отверстием при возбуждении силой, приложенной к краю отверстия//Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 3. С. 490—496.
6. *Ржевкин С. Н.* Курс лекций по теории звука. М.: МГУ, 1960.

Центральный научно-исследовательский институт
им. А. Н. Крылова

Поступила в редакцию
23.03.92
После исправления
02.02.93

S. V. Budrin, G. I. Ivanov

SOUND RADIATION FROM AN OPEN END OF A PIPE CONNECTED WITH A SPHERICAL SHELL

A construction consisting of a spherical shell with a round orifice and a round pipe of finite length, which is connected by one of its ends to the orifice, is considered. The radius of the orifice and the pipe are considered to be much smaller than the shell radius. Media with different acoustic impedances are outside the shell and inside the pipe. There is vacuum inside the area within the shell but outside the pipe. A plane wave propagates in the medium from the pipe end located inside the shell.

Expressions for oscillation amplitude of the construction and for acoustic fields in the external medium and the medium inside the pipe are obtained under these conditions. Calculations results for radiation efficiency from the orifice are given for different values of the coefficient of losses in the shell material. Frequency dependence of radiation efficiency is shown to have a resonant character. Namely, a sharp decrease of radiation efficiency takes place at low losses at frequencies corresponding to quasi-flexural resonances of the spherical shell. If the coefficient of losses increases then, first, the decrease of radiation efficiency medium level occurs and, second, the character of frequency dependence becomes more smooth.

An approximate formula allowing to calculate radiation efficiency to a good precision at large values of losses coefficient is proposed.